

Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças

Error Analysis in Calculus: a Research to Base Changes

Helena Noronha Cury
Mariana Cassol

Resumo

Neste artigo, apresentamos, inicialmente, diferentes formas de focar os erros cometidos por alunos em disciplinas matemáticas. A seguir, relatamos uma experiência com análise de erros em Cálculo Diferencial e Integral, apontando conclusões sobre as dificuldades dos estudantes e sugerindo mudanças na metodologia de trabalho em sala de aula. Consideramos que a introdução da investigação em sala de aula é uma forma de tornar o aluno sujeito de seu próprio processo de aprendizagem, responsabilizando-se pelos erros cometidos.

Palavras-chave: *Análise de erros, Cálculo Diferencial e Integral, Educação Matemática*

Abstract

In this paper, we present different ways of focusing student's errors in mathematical contents. Further, we relate an experiment with error analysis in Differential and Integral Calculus, pointing out some conclusions about student's difficulties and suggesting changes in methodology. We consider that, through research in classroom, the students can become the subjects of their own learning process, being responsible for the errors they make.

Key words: *Error analysis, Integral and Differential Calculus, Mathematics Education.*

1. Introdução

A análise de erros, como abordagem de pesquisa em Educação Matemática, tem sido enfocada de formas diversas, de acordo com os pressupostos teóricos nos quais se baseiam os investigadores, dos objetivos

das pesquisas, dos conteúdos envolvidos e dos níveis de ensino.

A significativa produção em Educação Matemática nos últimos anos, bem como o acesso a dissertações, teses e artigos, através de bancos de dados ou da Internet, possibilita fazer uma distinção inicial entre os

Helena Noronha – Doutorado em Educação, Mestrado em Educação, Graduação em Matemática. Professora da PUCRS.

Mariana Cassol – Mestranda em Matemática (PUCRS).

diversos estudos. Em um primeiro tipo de trabalho, há apenas a detecção e classificação dos erros cometidos pelos alunos. Não sendo explicitada uma teoria cognitiva ou pedagógica, aparecem, implícitas, as teorias do pesquisador sobre ensino e aprendizagem. Dessa forma, muitas vezes a análise dos erros está posta somente como uma maneira de criticar os estudantes ou o ensino que lhes foi ministrado, sem qualquer preocupação em buscar as causas dos erros ou as possibilidades de aproveitá-los para propor mudanças.

Em um segundo tipo de pesquisa, também é feita a análise e classificação dos erros, mas a preocupação subjacente é com as causas dos mesmos, com ênfase nos conteúdos, trazendo considerações sobre sua origem, sobre obstáculos inerentes aos mesmos, sobre as concepções dos alunos e sobre o processo de ensino-aprendizagem. Sob esse enfoque, temos trabalhos como os de Cury (1988, 1990), Borasi (1985), Bathelt (1999), Ribeiro (2001) e Freitas (2002), entre muitos outros. As teorias fundamentam as discussões sobre as causas ou as propostas de uso dos resultados no ensino. Aportes piagetianos e vygotkianos são freqüentes, bem como idéias de autores franceses, que trabalham com engenharia didática. Nesse segundo tipo, a ênfase não é nos erros, mas nas causas e conseqüências dos mesmos, ainda que parte do trabalho seja feito sobre eles.

Em um terceiro tipo de pesquisa, a ênfase desloca-se para as atividades propostas para os estudantes e, na análise de suas soluções, os erros aparecem e são discutidos, mas sempre sob a luz da teoria que subsidiou a proposta inicial e os objetivos da investigação. Podemos exemplificar com os trabalhos de Maranhão e Iglioni (2003), que traz o aporte da teoria de Duval, e o de Sauer (2004), que busca apoio em Piaget para propor os ambientes de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Nesse tipo de pesquisa, não há a preocupação com os erros, mas com o funciona-

mento cognitivo do aluno no processo de aprendizagem. Duval (2003) aponta esse fato ao afirmar que:

A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em decimais, neste ou naquele conceito geométrico etc. A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino (p. 12).

Com vistas a uma caracterização das pesquisas sobre erros, podemos, ainda, avaliar as metodologias de pesquisa e de análise dos dados. Alguns estudos empregam instrumentos planejados especificamente para a coleta de informações, com questões específicas sobre determinado conteúdo (Moren, David e Machado, 1992), outros utilizam respostas a questões de prova (Cury, 2003a) ou exercícios propostos em aula (Baldino e Cabral, 1999; CABRAL, 2001). Também são empregadas, em conjunto com as questões ou em separado, entrevistas para confirmar as hipóteses sobre as causas dos erros (Notari, 2002).

A análise dos dados, em geral, apresenta uma classificação para os erros, listando-os ou indicando o número de ocorrências de cada tipo. As entrevistas são somente transcritas ou submetidas à análise de conteúdo. De qualquer forma, a análise global leva em conta os referenciais teóricos subjacentes e há sugestões de mudanças para o processo de ensino do conteúdo em questão.

Ainda que os fundamentos teóricos variem e que os resultados sejam empregados para diferentes propósitos, consideramos que é possível adotar uma metodologia de análise dos erros que se baseie nos pressupostos da análise de conteúdo, haja vista a semelhança de tarefas entre as duas abordagens (Cury, 2003b)

Com base nas considerações acima, vamos apresentar, neste artigo, uma pesquisa realizada com alunos de um curso de Engenharia Química, com o objetivo de detectar e classificar os erros cometidos em Cálculo, propondo, como conclusão, mudanças necessárias para que os estudantes venham a buscar soluções para suas próprias dificuldades.

2. A experiência realizada e as atividades propostas

Trabalhando com ensino de Cálculo Diferencial e Integral A, já realizamos várias experiências, testando recursos e metodologias variadas. No entanto, se alguns resultados foram obtidos no sentido de uma melhor habilidade na resolução de exercícios nas disciplinas subsequentes, em geral ainda há problemas, pois a cada semestre notamos mais dificuldades nos alunos de Cálculo A, em termos de conhecimentos de Matemática básica, resolução de problemas e capacidade de argumentação.

A análise dos erros cometidos pelos estudantes, em provas ou em trabalhos de sala de aula, mostra que os estudantes não dominam conteúdos de Álgebra e Geometria do ensino fundamental, bem como os relativos a Trigonometria e Geometria Espacial, do ensino médio. Esse problema, somando-se a dificuldades de abstração e generalização, leva muitos alunos a reprovar na disciplina ou evadir-se dos cursos da área de Ciências Exatas.

A partir dessas constatações, configurou-se um problema para pesquisar: quais são as possíveis causas dos erros cometidos pelos alunos de Cálculo Diferencial e Integral A e como podemos auxiliá-los a superar suas dificuldades? Realizamos, assim, uma investigação, durante o ano de 2003, com os seguintes objetivos:

- analisar os erros em questões de Cálculo A, cometidos por alunos de um

curso de Engenharia Química, ao resolverem problemas e exercícios, em trabalhos individuais ou grupais;

- detectar possíveis causas para os erros;
- a partir dos dados obtidos, propor estratégias para envolver os alunos na busca de soluções para suas próprias dificuldades, atendendo-os em grupos ou individualmente.

A disciplina em questão é semestral, com oito créditos, abrangendo conteúdos usualmente trabalhados em disciplinas de Cálculo A (funções, limites, derivadas, integrais), acrescidos de técnicas de integração, seqüências e séries. Em cada semestre, foram realizadas várias atividades, com cômputo de acertos e erros, para que, após cada ação, pudéssemos adaptar o planejamento às necessidades da turma.

Inicialmente os estudantes realizaram um pré-teste, sobre conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, pré-requisitos para o estudo de Cálculo; a seguir, houve trabalhos sobre conteúdos específicos, como funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, incluindo as hiperbólicas; limites e derivadas; regras de L'Hôpital; derivadas das inversas das funções trigonométricas; diferenciais; integral definida.

Também foram realizadas atividades em laboratório de Informática, com uso do *software* Maple, abordando movimentos de gráficos, domínio e imagem de funções, limites, continuidade e problemas de otimização.

Além disso, houve sessões de estudo, em que os alunos com maiores dificuldades puderam, em horário alternativo, resolver exercícios e mostrar as dúvidas, tendo atendimento e observação da bolsista e da professora orientadora. Das três provas de verificação da aprendizagem, realizadas em cada semestre, foram escolhidas questões com maior índice de erros cometidos e estes, por sua vez, foram classificados e analisados. De todas as atividades realiza-

das e dos dados obtidos, vamos destacar, neste artigo, apenas a análise dos erros nas questões de prova, em cada semestre, para posteriormente discuti-los e sugerir atividades a partir dos resultados.

3. A análise dos erros

Para evidenciar os problemas detectados, vamos apresentar em seqüência os resultados dos dois semestres, em cada uma das provas.

3.1 Erros na Primeira Prova

A primeira prova do primeiro semestre de 2003, da disciplina de Cálculo I para o curso de Engenharia Química, foi realizada por 45 alunos. A questão escolhida para análise tem o seguinte enunciado:

Esboce o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{para } x < 0 \\ e^{-x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Os erros cometidos pelos alunos foram classificados em quatro categorias. A descrição de cada uma delas é uma forma de interpretar a atuação do aluno ao resolver a questão, buscando entender as possíveis causas dos erros. Assim, temos a seguinte categorização:

a) Desconhecimento do gráfico da exponencial. Neste tipo de erro, o aluno, não plotando pontos em um sistema de eixos, apenas esboça gráficos, de funções como a linear ou a quadrática, que lhes são mais conhecidas.

b) Realização de simetria em relação a um eixo horizontal ou vertical. Neste caso, o aluno esboça um dos gráficos em um dos quadrantes e realiza uma simetria em relação a um dos eixos para obter o outro, confundindo-se em relação ao eixo ou ao próprio esboço.

c) Erro no conceito de função. O aluno esboça, para todo x real, o gráfico de cada uma das funções, fazendo com que para cada elemento do domínio exista mais de uma imagem.

d) Erros de cálculo. O aluno tenta plotar os pontos no gráfico, mas erra os cálculos, ao efetuar potências de e , por exemplo.

No segundo semestre, a primeira prova foi realizada por 30 alunos. Havendo uma pequena diferença no cronograma e, conseqüentemente nos conteúdos de cada prova, optamos, neste artigo, por apresentar apenas as questões cujos conteúdos são comparáveis com as do primeiro semestre, visto que nosso interesse, ao detalhar os tipos de erros, é de apresentar algumas considerações sobre possíveis mudanças na metodologia de ensino. No entanto, é importante salientar que, em qualquer dos exemplos, cada aluno pode ter cometido erros de mais de um tipo, o que aumenta muito o número de ocorrências.

Para comparar com o primeiro semestre, vamos, então, apresentar a questão a seguir, que 16 alunos erraram.

Esboce o gráfico da função.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4 \\ -x + 4, & x > 4 \end{cases}$$

Tendo visto as dificuldades dos alunos na questão relativa à função exponencial, propusemos, nesta, leis que nos permitiriam entender melhor as alternativas apresentadas. Os erros foram classificados em seis categorias, algumas já descritas anteriormente:

a) Erro no conceito de função.

b) Erro no cálculo dos valores do intervalo. O aluno confunde-se com os sinais de desigualdade, substituindo erradamente os valores das extremidades, em cada função.

c) Erro no traçado da função linear dada. Mesmo tendo a possibilidade de cal-

cular valores para plotar os pontos, o aluno esboça o gráfico da reta com a inclinação errada.

- d) Desconhecimento do gráfico de \sqrt{x}
- e) Desconhecimento do gráfico de e^{-x}
- f) Desconhecimento do gráfico de $f(x) = -x+4$.

3.2 Erros na Segunda Prova

No primeiro semestre, a segunda prova foi realizada por 41 alunos e escolhemos três questões para análise, face ao elevado número de erros nas mesmas. Dez alunos erraram a primeira questão, cujo

enunciado é: *Calcule* $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Os erros foram classificados em quatro categorias, descritas a seguir:

a) Aplicação não adequada das regras de L'Hôpital. O limite em questão não permite a aplicação dessas regras e mesmo assim o aluno deriva numerador e denominador, substituindo, a seguir, o valor de x.

b) Erros relacionados a conteúdos de álgebra do ensino básico. O aluno "cancela" x^2 do numerador com x do denominador, obtendo $-(x+3)$ e substituindo, então, o valor de x.

c) Erros relacionados ao conceito de limite. O aluno não compreende que o sinal "+" indica um limite lateral.

d) Erros de cálculo nas substituições ou lapsos de escrita. Consideramos um lapso, por exemplo, o "esquecimento" da expressão "lim" no encadeamento das igualdades.

Trinta e um alunos erraram a segunda questão analisada, a saber:

Apresentando o desenvolvimento, calcule a derivada da função dada por

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3}{2x^3 - 5}$$

Os erros foram classificados em três categorias, descritas a seguir:

a) Erros relacionados a conteúdos de Álgebra do ensino básico. Mesmo aplicando corretamente a regra da derivada do quociente, o aluno erra ao multiplicar monômio por binômio, em cálculo de produto de potências de mesma base ou na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

b) Erros na aplicação de regras de derivação. O aluno confunde os sinais no numerador da derivada ou erra a derivada de um dos membros.

c) Aplicação equivocada das regras de L'Hôpital. Por ter estudado as regras de L'Hôpital imediatamente antes da prova, alguns alunos se confundiram e derivaram numerador e denominador, ao invés de aplicar a regra da derivada do quociente.

Trinta e dois alunos erraram a terceira questão:

Apresentando o desenvolvimento, calcule a derivada da função dada por

$$f(x) = \text{sen}^2(2x^4 - 3)$$

Os erros foram classificados em duas categorias, descritas a seguir:

a) Erros na derivada da função composta. Nesta classe estão incluídos vários erros, causados, provavelmente, pela dificuldade em reconhecer a função composta, o que ocasiona, por exemplo, a derivação da função seno em primeiro lugar. Os diversos exemplos foram descritos em Cury (2003b).

b) Erros relacionados com o conceito de função trigonométrica ou, mais especificamente, com o argumento da função. O aluno, acertando ou errando as regras, confunde-se no momento de indicar o argumento da função, surgindo, por exemplo, respostas como $2.\text{sen}.\text{cos}$.

No segundo semestre, a segunda prova foi realizada por 27 alunos e a questão sobre derivadas, comparável às duas anteriores, que 9 alunos erraram, é:

Derive implicitamente a função dada por $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$.

Os erros foram classificados em quatro categorias, a saber:

a) Erro na aplicação de regras de derivação.

b) Não compreensão do conceito de função implícita. O aluno deriva indiferentemente ambas as variáveis, não considerando que y possa ser função implícita de x .

c) Erro no processo de derivação implícita. O aluno deriva pela regra correta (do produto ou da potência), mas esquece de indicar a derivada de y .

d) Lاپso, quando o aluno deriva corretamente e erra ao copiar uma expressão na etapa seguinte.

3.3 Erros na Terceira Prova

A terceira prova do primeiro semestre foi realizada por 37 alunos e escolhemos duas questões para análise. Vinte sete alunos erraram a primeira questão, cujo enunciado é:

$$\text{Calcule } \int x \cdot e^{3x} \cdot dx$$

Os erros foram classificados em três categorias, descritas a seguir:

a) Erros no método usado. O aluno tenta resolver a integral usando métodos que não lhe permitem encontrar resposta.

b) Erro relativo à técnica de integração por partes. Mesmo usando o método adequado, o aluno confunde-se na escolha de u e dv .

c) Erro por falsa generalização. O aluno não reconhece função composta em e^{3x} , falsamente generalizando o resultado conhecido,

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Vinte alunos erraram a segunda questão, a saber:

$$\text{Calcule } \int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Os erros foram classificados em seis categorias, descritas a seguir:

a) Erro no método de integração. O aluno não reconhece o tipo de integral e escolhe um método que não se revela adequado.

b) Não identificação da variável de integração. Mesmo fazendo corretamente a substituição de x por $\text{sen } t$, o aluno mistura dx e dt nas expressões.

c) Erro no processo de diferenciação. Ao realizar a diferencial de x , para efetuar a substituição de dx , o aluno erra o procedimento, em geral esquecendo do “ dt ”, o que acarreta problemas subsequentes.

d) Erros em procedimentos algébricos. Em geral, há erros nos cancelamentos, após as substituições de variável, ou o aluno considera que a raiz da diferença é a diferença das raízes.

e) Falta de argumento no cosseno, ao substituir dx ou a expressão do radicando.

f) Lapsos de escrita, que se evidenciam quando o aluno escreve corretamente uma expressão e esquece algum elemento na seguinte.

No segundo semestre, a terceira prova foi realizada por 27 alunos. Quatorze deles erraram a questão analisada:

$$\text{Calcule } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx, \text{ com a substituição } x = 2 \sec t.$$

Os erros foram classificados em seis categorias, descritas a seguir:

a) Erro no método de integração.

b) Não identificação da variável de integração.

c) Erro no processo de diferenciação.

d) Erros em procedimentos algébricos.

e) Falsa generalização da regra da integral da soma. Sabendo que a integral da soma de duas funções é a soma das integrais das mesmas, o aluno falsamente generaliza essa regra para a integral do produto de funções.

f) Não aplicação da tabela de integração. Mesmo dispondo de tabelas, o

aluno não reconhece, no final, que o resultado está indicado nas mesmas.

4. Conclusões e sugestões

Focalizamos o trabalho realizado no ano de 2003 com as turmas de um curso de Engenharia Química, dando ênfase à análise dos erros cometidos em questões de provas. Uma síntese dos dados obtidos pode nos auxiliar a propor mudanças, usando os erros como base para as discussões.

Na questão escolhida para análise na primeira prova, referente ao gráfico de uma função dada por mais de uma lei, consideramos que a confusão referente aos movimentos de simetria pode ser explicada pelo fato de que muitos alunos, não tendo estudado funções exponenciais no ensino médio, só visualizavam o elemento destacado, a saber, o expoente negativo, considerando, então, que deveriam fazer simetria do gráfico.

Talvez pela mesma razão, ou seja, por não ter estudado gráficos de funções, os estudantes confundiram-se bastante em relação ao próprio conceito, esboçando os gráficos das funções para todo x real, erro que já tinha sido detectado em pesquisa anterior (CURY, 1990). Também mostraram não conhecer o traçado dos gráficos das funções básicas, que deveriam ter sido estudadas no ensino médio e com as quais, com certeza, trabalharam na disciplina de Cálculo I.

Na segunda prova, notamos que houve erros em conteúdos de Álgebra do ensino básico, especialmente relacionados a operações e propriedades, produtos notáveis e fatoração, bem como outros relativos a funções trigonométricas, especialmente a falta de argumento das funções seno ou cosseno.

Na terceira prova, novamente surgiram erros em procedimentos algébricos, nas questões relativas a métodos de

integração, acrescidos de dificuldades em empregar os procedimentos.

O que nos mostrou o trabalho realizado durante o ano de 2003, com o acompanhamento sistemático dos alunos e a análise de erros das provas? Em primeiro lugar, parece-nos que a transição para o ensino superior está trazendo dificuldades para alunos e professores, pois muitos estudantes apresentam lacunas em termos de conhecimentos pré-requisitos. Ribeiro (2001), em pesquisa realizada em São Paulo, detectou erros em conteúdos de Álgebra na resolução de questões aplicadas a alunos de 8^a série e muitos deles estão presentes, ainda, nas respostas dos estudantes que ingressam na Universidade, conforme as pesquisas que vimos realizando (Cury, 1990, 2003a).

Em segundo lugar – e essa é uma hipótese que está posta para futuras investigações – parece-nos que a maior parte dos alunos não têm o hábito de buscar informações nos livros didáticos, esperando que tudo lhes seja apresentado pronto. Dessa forma, ficam apenas com os exemplos de aula e não discutem dúvidas que podem surgir quando estudam sozinhos.

Além disso, muitos estudantes, ainda que recebam comentários sobre suas resoluções, não conseguem entender os próprios erros; parece-nos, então, que lhes falta uma reflexão sobre sua própria aprendizagem. Face às considerações feitas, consideramos que é de suma importância o acompanhamento de todas as atividades realizadas pelos alunos, pois nos permite entender suas dificuldades e adaptar o ensino às suas reais necessidades.

As perguntas em sala de aula, o acompanhamento feito a cada dupla, durante os trabalhos, o atendimento individualizado, por ocasião das sessões de estudo, corroboraram as informações que já tínhamos, referentes às dificuldades dos alunos em conteúdos de ensino fundamental e médio.

Julgamos, assim, que é primordial repensar o ensino de Cálculo para alunos ingressantes em cursos superiores, empre-

gando metodologias e recursos variados e, especialmente, destinando períodos para atendimento individual, seja com monitores, seja com bolsistas de Iniciação Científica, ou até mesmo com alunos de mestrado, que podem realizar seus estágios curriculares com atividades voltadas para os alunos das disciplinas matemáticas iniciais dos cursos de graduação.

Mas, antes de tudo, cremos que é necessário mudar a metodologia de trabalho, encontrando alguma forma de desafiar os estudantes, propondo atividades motivadoras, que lhes despertem o interesse pelo estudo, pela realização das tarefas propostas, pelo monitoramento de sua própria cognição.

Propostas de investigação em sala de aula, apresentadas, por exemplo, em Porlán e Rivero (1998), Ballenilla (1999) ou Demo (2000) e, no caso da Matemática, por Ponte et al. (2003), sugerem que o educar pela pesquisa se torna uma forma de construir conhecimento, envolvendo os alunos em atividades semelhantes àquelas que os cientistas desenvolvem.

Ponte et al. (2003) consideram que:

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (p. 23).

Não é simples modificar comportamentos há muito estabelecidos e tanto alunos quanto professores relutam em assumir outros papéis. Os docentes, em geral, consideram que o estudante aprende se lhe “repassarmos” os conteúdos e solicitarmos que os “devolvam” em exercícios ou nas provas. Os alunos, acostumados com esse tipo de contrato didático, não se comprometem com um esforço próprio de construir o conhecimento e preferem recebê-lo pronto,

com a ilusão de que terão aprendido.

Analisando as dificuldades de um aluno ao calcular uma integral indefinida, Baldino e Cabral (1999) mostram como é necessário construir estratégias para lidar com tais dificuldades. Efetivamente,

[...] insidir sobre os obstáculos para obter uma modificação das concepções dos alunos em situação de aprendizagem é uma tarefa que, desde já, se apresenta como escapando ao domínio meramente cognitivo e abrangendo, também, o domínio pedagógico, ou seja, a organização e os valores da sala de aula (Baldino e Cabral, 1999, p. 10).

Em nossa pesquisa com alunos de Engenharia Química, detectamos e classificamos os erros. Vimos, por exemplo, que a raiz quadrada causou dificuldades para alguns alunos, tanto no reconhecimento do gráfico da função dada por quanto no cálculo de. Vamos, então, ilustrar o uso da pesquisa em sala de aula para levar o aluno a enfocar, de formas diversas, o conteúdo sobre o qual mostra ter concepções errôneas.

Ponte et al. (2003) consideram que uma aula de investigação desenvolve-se em três fases: introdução da tarefa pelo professor, realização da investigação, em duplas ou pequenos grupos e discussão dos resultados, quando os alunos relatam ao grande grupo o que foi feito.

Para propor uma tarefa que aborde o conteúdo *raiz quadrada*, apoiamos-nos, ainda, em idéias de Douady (1986), que afirma:

A observação dos procedimentos dos alunos, do conteúdo cognitivo de suas trocas em situação de comunicação, suscitou nossa atenção sobre a importância das mudanças de quadro espontâneas (isto é, por iniciativa do aluno) ou provocadas (pela intervenção de um outro aluno ou do professor) para avançar na pesquisa de um problema, para desbloquear uma situação, para fazer evoluir as concepções (p.10).

Assim, consideramos a possibilidade de propor uma tarefa que, inicialmente, aborda conteúdos de Geometria, mas que passa para cálculos de raízes quadradas de

somas, de diferenças entre números racionais e irracionais, podendo, ainda, levar ao esboço dos gráficos das funções envolvidas. Pensamos, assim, em mudar os *quadros*, ou seja, passar do geométrico para o algébrico, na abordagem do problema. A proposta é a seguinte:

Trabalhando em duplas, desenhem um quadrado de lado 2 unidades e, em seguida, tomando como vértices os pontos médios dos lados desse quadrado, desenhem um novo quadrado, e assim sucessivamente. Calculem o lado de cada quadrado, bem como os raios das circunferências circunscritas e inscritas a cada um dos quadrados. A seguir, apresentem essas medidas em uma tabela e investiguem possíveis relações entre elas. O que vocês podem usar para discutir a questão? Que outras questões podem ser pensadas usando a mesma figura?

Em uma investigação em sala de aula, o professor sabe o que pensou inicialmente mas não imagina o que possam pensar os alunos; assim, é uma empreitada em que a insegurança, a dúvida, a possibilidade de errar ou não saber responder está sempre presente e o docente tem que conviver com isso, tornando-se um investigador juntamente com seus alunos e mostrando-lhes que esse é o caminho real de uma pesquisa. Colocando à disposição dos alunos recursos variados, como computadores e calculadoras, o professor pode sugerir, se questionado, que os estudantes usem algum deles, tendo, também, a oportunidade de observar como os estudantes concebem o uso de tais recursos.

O interesse maior, em nosso entender, especialmente se estamos preocupados com um determinado tipo de erro e com as suas possíveis causas, reside em ouvir o aluno, ao acompanhar o trabalho das duplas e ao solicitar que expliquem o que pensaram. É nesses momentos que as dificuldades vêm à tona e podemos interferir, não impondo uma resposta certa, mas bus-

cando levar o aluno a entender as razões pelas quais comete um determinado erro.

Para isso, é fundamental o auxílio dos colegas, pois, além de compartilharem dificuldades, têm uma linguagem e uma simbologia que não são aquelas aceitas pela comunidade. Assim, por exemplo, entender que um sinal de igualdade pode estar apenas indicando encadeamentos de raciocínios, ajuda a compreender por onde passaram os pensamentos dos alunos na resolução da tarefa.

Além da “escuta diferencial” (Cabral, 2001), o professor, ao ouvir os relatos dos alunos, pode intervir com novos questionamentos, abordando itens ainda não trabalhados na tarefa, como a derivação ou a integração, levando a aula em uma direção que é nova para todos. Saber lidar com o desconhecido, fazer conjecturas, tomar decisões, são atitudes que estão subliminarmente envolvidas no tipo de atividade que propomos e que, sem dúvida, tem seu componente eminentemente pedagógico, haja vista a importância de educar para a vida e não apenas para que o aluno saiba conteúdos que lhes vão ser solicitados em uma próxima disciplina.

Para cada erro detectado e classificado em nossa pesquisa, poderíamos planejar uma tarefa para ser investigada pelos alunos, modificando, aos poucos, a metodologia tradicional, em que o professor apresenta conteúdos e o aluno copia, para uma outra, em que o aluno é sujeito de sua aprendizagem, responsabilizando-se pelos acertos e erros dela decorrentes. Pela amostra que tivemos – com muitos aspectos já observados em outras investigações que realizamos sobre ensino de Cálculo – consideramos que é urgente encontrar métodos e técnicas variadas, para que o aluno da área de Ciências Exatas possa aproveitar, das disciplinas matemáticas, todas as potencialidades para desenvolver seu pensamento e para auxiliá-lo em suas vida, pessoal e profissional.

Referências

- BALDINO, R.R.; CABRAL, T.C.B. Erro do significado ou significado do erro? *Boletim Gepem*, n. 35, p. 9-41, 1999.
- BALLENILLA, F. *Enseñar investigando*. 3. ed. Sevilla: Díada, 1999.
- BATHELT, Regina E. *Erros e concepções de alunos sobre a idéia de número*. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 1999.
- BORASI, R. Using errors as springboards for the learning of mathematics: an introduction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v.7, n. 3-4, p. 1-14, 1985.
- CABRAL, T.C.B. Lógica da intervenção didática. In: CURY, H.H. (Org.). *Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 89-128.
- CURY, Helena N. *Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos de 3º grau*. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988
- _____. *Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral: análise, classificação e tentativas de superação*. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática, 1990. Relatório de pesquisa.
- _____. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: IME, 2003a. CD-ROM.
- _____. Análise de erros e análise de conteúdo: subsídios para uma proposta metodológica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., Santos, 2003. *Anais...* São Paulo: SBEM, 2003b. CD-ROM.
- DEMO, P. *Educar pela pesquisa*. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2000.
- DOUADY, R. Jeu de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v.7, n.2, p. 5-31, 1986.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus, 2003. p. 11-33.
- FREITAS, M.A. de. *Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.
- MARANHÃO, M.C.S.A.; IGLIORI, S.B.C. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus, 2003. p. 57-70.
- MOREN, E.B.S.; DAVID, M.M.M.S.; MACHADO, M.P.L. Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo ensino-aprendizagem. *Cadernos de Pesquisa*, n.83, p. 45-51, nov. 1992.
- NOTARI, A.M. *Simplificação de frações aritméticas e algébricas: um diagnóstico comparativo dos procedimentos*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.
- PONTE, J.P da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- PORLÁN, R.; RIVERO, A. *El conocimiento de los profesores*. Sevilla: Díada, 1998.
- RIBEIRO, A. J. *Analisando o desempenho de alunos de ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP*. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
- SAUER, L.Z. *O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos*. 2004. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.