

Cognición matemática¹ ¿Modelo de Inteligencia o para el desarrollo de la inteligencia?

*Mathematical cognition²
Intelligence model or model for developing
intelligence?*

Fredy E. González
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
fgonzalez@ipmar.upel.edu.ve

*La pregunta es como el anzuelo para pescar en el mar de las ideas
Miguel de Guzmán (1991)*

Resumen

En el presente texto, el autor desarrolla algunas ideas acerca de la Cognición Matemática; esta noción se vincula íntimamente con otras que la sirven de referencia: Pensamiento, Inteligencia, Modelaje, Competencia Matemática, Procesos Cognitivos, Metacognición, Procesamiento de Información, Resolución de Problemas, y otras tantas, propias de las Ciencias Cognitivas, las cuales constituyen el contexto en el que adquiere sentido y significado el constructo Cognición Matemática. La respuesta acerca de ¿Qué es la Cognición Matemática? requiere, necesariamente de la consideración previa acerca del Ser de la Matemática; por tanto, se hará una breve revisión de las respuestas que, históricamente, se han dado a la pregunta ¿Qué es la Matemática? a partir de lo cual se derivan cuestiones de naturaleza epistemológica y didáctica; esto significa que las concepciones que se suscriben acerca de lo que la Matemática es, incidirá sobre los modos como los docentes enseñan esta disciplina y, sobre los criterios que serán tomados en cuenta para decidir el nivel de dominio sobre la

¹Este trabajo se corresponde con la conferencia pronunciada por su autor en el IV Simposio de Educación Matemática, realizado en Chivilcoy (Provincia de Buenos Aires, Argentina) durante los días 7 al 10 de Mayo de 2002

²This article is the final result of a speech given by it's author in th IV Simposio de Educación Matemática, fulfilled in Chivilvoy (county of Buenos Aires, Argentina) from 7th to 10th of may, in 2002.

Matemática que puede atribuirse a una persona en particular. Además de lo anterior, se hará un breve recorrido histórico en relación con el modo como se ha concebido a la Matemática en la Psicología; así se tocarán los siguientes temas: Mente, Conducta y Cognición, que conforman la secuencia que, desde el punto de vista psicológico, se ha seguido para el estudio del desempeño intelectual de los seres humanos; es así como se comparan brevemente los enfoques psicológicos Gestaltista, Conductivista y Cognoscitivista en cuanto a la respuesta que dan al desempeño matemático. Luego, se aborda el asunto de las Inteligencias Múltiples, y se ubica en ésta la actuación en Matemática. Finalmente, se esboza el tema de la Inteligencia Emocional y con referencia a ella, se trata el asunto de los factores afectivos en la adquisición de conocimientos matemáticos esbozando la noción de Matemática Emocional. Sobre la base de todo lo anterior, el autor propone una respuesta a la pregunta planteada en cuanto a la relación entre Inteligencia y Cognición Matemática.

Descriptores: Educación Matemática; Ciencias Cognitivas; Matemática Emocional; Inteligencia Exitosa.

Abstract

In this article, the author presents some considerations about mathematical cognition; this notion is closely related to others that can be used as its references: thought, intelligence, modelling, mathematical competence, cognitive processes, metacognition, information process; solving problems, and so many, all of them characteristic of Cognitive Sciences which offers the context where meaning and signification are acquired in mathematical cognition. The answer to what mathematical cognition is, requires, necessarily, previous considerations about the subject of mathematics; so it will be processed a brief revision of the answers that historically have been given to the question – What is mathematics? – aiming to discuss them within an epistemological and didactical frame. Thus it must be paid attention to the fact that, the conceptions over what mathematics is about are deeply related to the ways math teachers develop their work, and also, to the conditions necessary to establish the level of Knowledge of any person in this particular field. This article also does some historical discussion over the ways Mathematics has been conceived by Psychology, in this matter some points were detached: Mind, Cognition and Behavior, which conform the sequency that – according to a psychological point of view – the studies concerning the intelectual performance of human beings have fallowed up. Also, distint phychological emphasis were compared such as Gestalt, Conductivism and Cognitivism concerning to their theorical statements over mathematical performance. Thus, this article contemplates also the matter of multiple intelligences and its relation with the actuation in Mathematics. Finaly, some considerations are articulated over the matter of the Emotional Intelligence and, related to it, the discussion over the emotional factors in the process of acquiring math knowledge, trying to deal with the notion of emotional mathematics. Considering what has been discussed so far, the author comes up with an answer to the question over the relation between Inteligence and Mathematical Cognition.

Key-words: Math Education, Cognitive Sciences, Emotional Mathematics, Successfull intelligence.

Introducción

El tema que se desarrolla en este trabajo vincula tres nociones fundamentales: Matemática, Cognición e Inteligencia; éstas se han redimensionado en el tiempo reciente; la primera está renovándose (como toda ciencia realmente viva) para dar cabida a un cúmulo de nociones nuevas derivadas de las exigencias que plantea la Sociedad Digitalizada (como se denomina a la era actual donde el Ser Humano ve ampliada su capacidad hasta dimensiones ilimitadas e insospechadas hace poco tiempo atrás; sea suficiente considerar las experiencias de Cyborg: seres humanos a quienes le han sido implantados chips que les permiten poner a funcionar artefactos electrónicos con sólo acercarse a ellos); así mismo, los estudios que se han venido haciendo en relación con el funcionamiento del Cerebro Humano han dado lugar a un conjunto de nuevas disciplinas (Neurofilosofía, entre otras) que nos ofrecen novedades en relación con el desempeño intelectual de las personas (Cerebro Triuno, Lateralidad Hemisférica, Cerebro Total, son sólo algunas de las conceptualizaciones con las que ahora se cuenta); todo lo anterior conforma un contexto en cuyo marco se genera la necesidad de revisar el significado de lo que se entiende por Inteligencia (ésta no se reduce ya al QI, como lo pretendieron -y exitosamente lo lograron durante décadas- los suscriptores de las posiciones psicométricas); ¡No!, Inteligencia ya no es igual a Coeficiente Intelectual (QI); ahora este constructo incluye otras dimensiones; Múltiples Inteligencias (Gardner, 1983), Inteligencia Emocional (Goleman, 1995) e Inteligencia Exitosa (Sternberg, 1997), son sólo tres de las aventuras teóricas que se han emprendido en este esfuerzo redefinitorio de la actividad intelectual humana.

En lo que sigue, el autor ofrecerá información sobre cuya base sustentará una respuesta a la interrogante formulada en la expresión que sirve de título al presente

trabajo. El recorrido comenzará con una breve exposición acerca de las diferentes concepciones que a lo largo de la historia se han sostenido en torno a la Matemática como ciencia; luego, se hará lo propio con las Ciencias Cognitivas y en este contexto se harán algunas consideraciones en relación con la reconceptualización que se ha producido de la actividad mental, como consecuencia del desplazamiento de la Psicología Conductista por parte de las psicologías de orientación cognoscitivista. Estos dos ámbitos se hacen converger en el proceso de búsqueda de respuesta a la pregunta ¿Qué significa Pensar Matemáticamente?, el cual conducirá al constructo Competencia Matemática, concepto éste de naturaleza compleja, una de cuyas dimensiones será propuesta como definición de Cognición Matemática. (conjunto de procesos de naturaleza cognitiva y metacognitiva que una persona activa cuando está abocada a la realización de alguna tarea intelectual que le demanda exigencias matemáticas de variado tipo).

Hecho lo anterior, se pasará a considerar el constructo Inteligencia; el abordaje se hará de soslayo, dado lo elusivo de este término. En efecto, en lugar de formular una pregunta de naturaleza ontológica ¿Qué es la Inteligencia?, se apelará al recurso de señalar cuáles son los comportamientos que una persona debe exhibir para que pueda ser considerada como Inteligente. Con estos tres bloques se está en condiciones de intentar ofrecer una respuesta a la pregunta que ha inspirado el tema ¿Modelo de Inteligencia o para el Desarrollo de la Inteligencia? Aquí se considerarán las implicaciones y connotaciones de otros dos vocablos claves: Modelo y Desarrollo. En el primer caso, a modelo se le asigna la connotación de "ejemplar, digno de ser seguido" la cual se corresponde con el significado de Paradigma, en su versión platónica; desde este punto de vista, al considerar a la Cognición Matemática como la posibilidad de activar procesos intelectuales de orden

superior y de carácter general, semejantes de aquellos comportamientos esperados en la personas consideradas inteligentes, entonces podría concluirse afirmativamente en relación con la primera parte de la pregunta. No obstante si, precisamente, gracias a la transferencia y/o aplicación, a otros contextos (propios de la actuación cotidiana, que puede lograrse cuando se actúa metacognoscitivamente) de los procesos constitutivos de la Cognición Matemática, entonces ésta (considerada en su dimensión dinámica, procesual) podría contribuir al desarrollo de la Inteligencia; de tal manera que la interrogante no alude a dos cuestiones contradictorias, mutuamente excluyentes, sino relativizables en función del aspecto o dimensión de la Cognición Matemática que sea resaltado.

Parte I

¿Qué es la matemática?³

El Objeto y el Método de la Matemática tienen carácter histórico; esto significa que esta disciplina científica no ha sido siempre como lo que es hoy, sin que –como todas las demás ciencias- ha evolucionado a lo largo de los diferentes períodos en los que suele dividirse su historia. Seguidamente se hará un breve esbozo de la Historia de la Matemática desde sus orígenes hasta la actualidad, haciendo énfasis en las modificaciones que han sufrido tanto el ámbito de la realidad del cual se ocupa, como la metódica que se desarrollado para abordarlo.

Objeto y Método de la Matemática en sus Orígenes:

Resulta necesario decir que, como en todas las ciencias, en la Matemática se da un período pre-científico que podría

ubicarse desde el Período Neolítico (cuando los hombres dejan de ser recolectores y cazadores para transformarse en productores) hasta los griegos (siglo VI a.C.). Los intercambios de objetos y otros bienes, durante la Edad de Piedra, estimularon la Aritmética (arte de contar) la cual constituye la primera actividad matemática del Ser Humano. Los trabajos de cestería, tejido y alfarería, que implicaban la elaboración de dibujos y la realización de algunas mediciones, marcaron el inicio de la geometría. Este período culmina alrededor del Siglo VI a.C., cuando los griegos comienzan a concebir las nociones matemáticas como puramente abstractas.

La actividad matemática de las antiguas civilizaciones (Egipto, Caldea, Babilonia) de acuerdo con Bosch (1971), se redujo a la “invención de ciertos procedimientos de cálculo destinados a resolver problemas concretos, tales como reparto de mercancías o medición de terrenos” (p. 13). Durante este período se acumuló una gran cantidad de material matemático concreto en forma de métodos para: efectuar operaciones aritméticas, calcular áreas y volúmenes, resolver algunas clases de problemas.

Puede afirmarse que este es el período de formación de la Aritmética y de la Geometría. Durante este tiempo la Matemática consistió en una colección de reglas aisladas deducidas de la experiencia y directamente conectadas con la vida diaria. Estas reglas no formaban todavía un sistema lógicamente unificado; de aquí que pueda decirse que, para esta época, la Matemática aún no constituye una ciencia.

Como se ve, durante el primer período de su desarrollo, la Matemática se presenta en íntima relación con las necesidades prácticas del Ser Humano. Ésta se considera como la etapa empírico-práctica, durante la cual la veracidad de las proposiciones y teoremas era contrastada constantemente en los tratos del hombre con la naturaleza y con su propia

³Esta parte del documento se apoya sobre un trabajo anterior del autor: González, F. (1995). *La Matemática: Una Excursión hacia su Objeto y su Método*. Maracay (Aragua, Venezuela): COPIHER

estructura social. Las necesidades de comunicación y de registro fueron las que hicieron imprescindible la creación de símbolos para representar los números y las figuras. En esto jugó un papel crucial el lenguaje; en un principio los símbolos numéricos no fueron otra cosa que signos ideográficos que permitían materializar el concepto de número.

La orientación de la Matemática en esta época, es calculística y algorítmica y, como hecho cultural, estaba condicionada por todo un sistema de concepciones mágico-religiosas, expresadas o defendidas por corrientes diversas que, puede decirse, correspondían al pensar filosófico de quienes ejercían el control político de la sociedad.

Objeto y Método de la Matemática para los Griegos, Orientales Medios y Renacentistas Europeos:

Como ya se dijo, en las antiguas civilizaciones se produjo un proceso de acumulación de hechos matemáticos que respondían a ciertas necesidades inmediatas de la vida cotidiana pero no poseían una organización teórica sistemática; son los griegos quienes transforman en ciencia teórica todo ese cúmulo de información matemática.

Con los griegos se desarrolla el concepto de demostración que es un método basado en el razonamiento, llevado a cabo de modo que engendre una certeza necesaria en el sujeto; eventualmente, se parte de proposiciones cuya verdad haya sido convencionalmente aceptada (noción comunes y postulados). El razonamiento se inicia a partir de un mínimo de objetos matemáticos que no son el término de razonamiento matemático alguno, sino que son el requisito para el comienzo mismo de todo el discurso matemático (noción primitivas).

La demostración matemática, concebida por los griegos, constituye la expresión en esta disciplina del "reduccionismo atomista", concepción filosófica predomi-

nante en la sociedad helena, que impregnó todo el pensamiento especulativo griego hasta el siglo IV a. C., y consiste en "partir de un conjunto relativamente pequeño de entidades simples y obtener todas las otras entidades mediante operaciones lógicas y combinaciones de las nociones primitivas; de este modo, el conocimiento del mundo se reduce al de las entidades primitivas y al buen uso de los mecanismos lógicos" (Bosch, 1971; p. 16).

Durante todo este período se mantiene el predominio del paradigma aristotélico; el carácter abstracto de la Matemática comienza a perfilarse mejor. Se dice que durante esta etapa, la Matemática alcanzó su primer grado de abstracción al considerar conceptos generales y estudiar objetos matemáticos.

También con los griegos se da la primera gran crisis de fundamentos en la Matemática; en efecto, el descubrimiento de los números irracionales, por parte de los pitagóricos, creó una conmoción en un sistema en el que se concebía que sólo los racionales tenían "derecho" a ser considerados como números. La crisis causada por la presencia de los números irracionales fue resuelta por métodos eminentemente geométricos.

En la Antigua Grecia, sólo se podían concebir dos ramas de la Matemática: Aritmética y Geometría; sólo esta última, a diferencia de la primera, recibió un tratamiento científico; en efecto, los griegos habían logrado algunos resultados notables en Geometría los cuales fueron absorbidos en los Elementos de Euclides; éste presentó la Geometría como un sistema bien construido; su trabajo está considerado como la primera teoría matemática propiamente dicha. En los Elementos se haya el modelo de la estructura básica de lo que es una teoría matemática en el sentido contemporáneo actual.

En relación con la Aritmética, cabe a los árabes e indios el mérito histórico de haber elaborado los rudimentos del cálculo

algebraico que sería de suma importancia para el desarrollo de la Matemática en Europa.

Por otro lado, en el Oriente Medio se nota que la preocupación básica era la solución de problemas prácticos; por esto, fueron desarrollados muchos procedimientos de cálculo y algoritmos especiales, haciendo poco énfasis en lo demostrativo al estilo griego y descuidando el rigor.

El aporte de los pueblos orientales puede estimarse a partir de los siguientes hechos: inventaron el sistema de numeración decimal, introdujeron los números negativos, comenzaron a operar con los números irracionales sin representarlos geoméricamente, diseñaron símbolos especiales para las operaciones algebraicas, desarrollaron el álgebra elemental y la trigonometría, concibieron métodos de solución de ecuaciones, entre muchos otros aportes.

Por su parte, el Renacimiento Europeo, desde el punto de vista matemático, trasciende por dos invenciones cruciales: la Geometría Analítica (Descartes y Fermat) y el Cálculo Infinitesimal (Newton y Leibniz). Con la Geometría Analítica se funden dos disciplinas: la Geometría y el Álgebra; con ello se pone de manifiesto el parentesco que vincula los conceptos geométricos con los algebraicos. En la Geometría Analítica los pares de números se representan por puntos y las ecuaciones con dos incógnitas se representan con curvas; con estas ideas se logra una representación geométrica para todo problema algebraico y una cierta interpretación algebraica para todo problema geométrico. Esto constituyó la base de un notable progreso en la Matemática porque "al dar una representación geométrica para los problema algebraicos, se facilitó la intuición de éstos, cuya naturaleza puramente geométrica y abstracta hacía difícil su comprensión intuitiva; al dar una interpretación algebraica para todo problema geométrico, se facilitó la introducción del cálculo en la geometría, con lo cual ésta ganó en agilidad" (Bosch, 1971: p. 42).

La búsqueda de relaciones entre nociones presuntamente divorciadas, que fue "uno de los rasgos notables del espíritu renacentista" (Bosch, 1971; p. 34), que también se manifestó con la invención del cálculo infinitesimal, el cual permitió la unificación de dos problemas aparentemente desvinculados: el trazado de tangentes y el cálculo de áreas. Los métodos del cálculo infinitesimal invadieron la totalidad de las investigaciones que se hacían en la Matemática y se aplicaron en la Física; este interés en las aplicaciones constituye uno de los rasgos que distinguen el quehacer matemático renacentista del de los griegos; en efecto, mientras los griegos eran partidarios decididos de la especulación pura y se alejaban de las aplicaciones, porque éstas "hacían plebeya" a la Matemática, los matemáticos renacentistas "hallaron una particular delectación en aplicar los métodos infinitesimales a otras ramas del conocimiento más cercanas a la técnica y a la realidad práctica" (Bosch, 1971; p. 77).

Otra diferencia con los griegos es que los renacentistas abandonan al "reduccionismo atomista"; en este sentido, no parten de un conjunto bien determinado de conceptos elementales y axiomas básicos para construir en forma rigurosamente deductiva la totalidad del edificio matemático; el cálculo infinitesimal no es un sistema axiomático-deductivo, al contrario, sus primeros principios no están nada claros; sus deducciones se basan en una confusa mezcla de razonamiento lógico, proposiciones intuitivas e ideas metafísicas (Bosch, 1971). Ese débil basamento lógico del cálculo infinitesimal fue el que hizo posible que las severas críticas que se le hicieron, particularmente las del Obispo Berkeley, fueran irrefutables. Estas críticas condujeron a la segunda gran crisis de fundamentos de la Matemática cuya solución se produjo en el marco del movimiento denominado "introducción del rigor", que consistió en dotar de una fuerte base de sustentación lógica a los mé-

todos infinitesimales y en impulsar la comprensión profunda de sus conceptos fundamentales (límite, derivada, diferencial e integral, etc.).

El Objeto y Método de la Matemática Contemporánea:

La comprensión por parte de los propios matemáticos de que el cálculo infinitesimal era “un coloso con los pies de barro”, generó en ellos una voluntad de sistematización, de rigor, de reestructuración de las definiciones básicas y de crítica de los primeros principios. Este movimiento propició la aparición de la teoría de conjuntos, la cual “inauguró un estilo original de pensamiento, destinado a impregnar toda la Matemática y buena parte del conocimiento teórico general” (Bosch, 1971; p. 95). Este autor afirma que la teoría de conjuntos permitió cambiar, en pocas décadas, toda la fisonomía del edificio matemático y destaca la importancia conceptual de la teoría de conjuntos puesto que: (a) constituye una metodología y una propedéutica para todo el conocimiento teórico; (b) permite incorporar el infinito actual a los métodos rigurosos de la Matemática; (c) proporciona bases lógicas sólidas al edificio matemático. (Para más información acerca de la trascendencia de la Teoría de Conjuntos en la Matemática y su enseñanza, véanse Arrieche, 1999, 2002).

Sin embargo, el surgimiento de las paradojas en la Teoría de Conjuntos (por ejemplo, el problema del estatus del conjunto de todos los conjuntos) desencadenó la tercera gran crisis en los fundamentos de la Matemática, de la cual se derivan tres de las filosofías contemporáneas de la Matemática: el Logicismo, el Formalismo, y el Intuicionismo.

Los logicistas sostienen que toda la Matemática es reducible a la lógica; es decir, los conceptos matemáticos se pueden definir mediante nociones lógicas simples: “La Matemática es una rama de la Lógica. En vez de ser sólo una herramienta de la Mate-

mática, la Lógica se convierte en la progenitora de la Matemática. Todos los conceptos matemáticos tienen que ser formulados en términos de conceptos lógicos y todos los teoremas matemáticos tienen que ser desarrollados como teoremas de Lógica; la distinción entre Matemática y Lógica es sólo cuestión de conveniencia práctica” (Eves y Newson, 1965; p. 300). El Logicismo, al pretender que los conceptos básicos de la Matemática podían definirse mediante recursos puramente lógicos, hace que la “Matemática pierda su autonomía para convertirse en una parte de la Lógica, o, en el mejor de los casos, constituya con la Lógica una única y misma disciplina” (Babini, 1968).

Por su parte, bajo la concepción formalista “la Matemática no es más que una colección de sistemas formales, cada uno con su propia lógica y su propia Matemática, con sus propios conceptos, axiomas, reglas de inferencia y teoremas. La tarea de la Matemática es el desarrollo de cada uno de estos sistemas formales” (Ortíz, 1988; p. 202). Para el formalismo, la Matemática es una ciencia sin presuposiciones, los objetos del pensamiento matemático son los símbolos mismos, libres de contenido, “los símbolos *per se* son la esencia de la Matemática formalista” (Ortíz, 1988; p. 201). La formalización de un sistema comprende: (a) Especificación completa de los signos, o sea, el “vocabulario”; (b) Establecimiento de las reglas de “formulación”, o reglas de “gramática” que indica las combinaciones de signos permitidas en la construcción de “fórmulas”; (c) Establecimiento de las “reglas de transformación” que indican cómo unas fórmulas pueden derivarse de otras; éstas son las llamadas reglas de inferencia; (d) Especificación de los axiomas, o sea, la selección de las fórmulas que sirven de fundamento a todo el sistema (Babini, 1968).

Finalmente, de acuerdo con los intuicionistas, la Matemática debe ser edificada únicamente mediante métodos

constructivos finitos basados sobre la sucesión, intuitivamente dada, de los números naturales (Eves y Newson, 1965); para el Intuicionismo, la existencia Matemática significa constructividad; es decir, para probar la existencia de una entidad matemática no es suficiente mostrar que la suposición de la no-existencia de la entidad conduce a una contradicción, sino que se debe mostrar que tal entidad es construible en un número finito de pasos. De particular actualidad se considera la afirmación de acuerdo con la cual "desde el punto de vista intuicionista, la Matemática es el estudio de ciertas funciones de la mente humana que está emparentada con la filosofía, la historia y las ciencias sociales" (Ortiz, 1988; pp 196-199). En efecto, en la actualidad tiende a verse a la Matemática más como una "ciencia por hacer" que como una "ciencia hecha"; más como "proceso" que como "producto".

Al vincular a la Matemática con su historia se podría tomar conciencia del carácter progresivo de esta ciencia, la cual en su desenvolvimiento cotidiano lejos está de ese carácter riguroso, anquilosado, rígido, hermético, cerrado que se muestra en las demostraciones impecablemente presentadas en los libros de texto; al contrario de lo que se cree, al igual que otras ciencias empíricas, la Matemática: también procede por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible. Cuando se concibe a la Matemática como una ciencia hecha, como un producto, su enseñanza cae en una inmovilidad que desconoce el pasado histórico de esta ciencia, se autoencierra en sus abstracciones y coloca el énfasis en el rigor lógico. Por el contrario, cuando se concibe a la Matemática como una ciencia por hacer, como un proceso, su enseñanza se hace dinámica, recurre a su historia y a sus aplicaciones, se apoya en objetos y situaciones concre-

tas y estimula la intuición. Mayores detalles acerca de la relación entre la enseñanza de la Matemática y la concepción que se suscriba acerca de ella como disciplina científica puede ser vista en la Tesis de Doctorado de Darío Fiorentini (1994) (referida en Félix, 2001) y en González (2002 a, en prensa).

Objeto y Método de la Matemática en la Actualidad:

¿Qué es la Matemática hoy en día? "La Matemática revela patrones ocultos que nos ayudan a comprender el mundo a nuestro alrededor; mucho más que aritmética y geometría, la Matemática hoy es una disciplina diversa que trata con datos, mediciones, y observaciones de la ciencia; con inferencias, deducciones y pruebas; y con modelos matemáticos de fenómenos naturales, de la conducta humana y de los sistemas sociales" (Schoenfeld, 1992). El ciclo que va de los datos a la deducción y de aquí a la aplicación, se repite en todas las partes donde la Matemática es usada; sea una simple tarea hogareña o una compleja actividad financiera; el proceso de *hacer matemática* es mucho más que sólo efectuar cálculos y deducciones, involucra además la observación de patrones, la verificación de conjeturas y la estimación de resultados.

Para fines prácticos, la Matemáticas es una ciencia de patrones y orden. Su dominio no son las moléculas o las células, sino los números, el azar, las formas, los algoritmos y el cambio. "Los patrones estudiados por los matemáticos se dan permanentemente en la naturaleza: los patrones simétricos de las flores, los frecuentemente complicados patrones de los copos de nieve, los patrones de puntos sobre la piel de un leopardo, los patrones de voto de una población, los patrones producidos por los resultados aleatorios en un juego de dados o de ruleta, las relaciones entre las palabras que componen una oración, los patrones de sonidos que

reconocemos como música. Algunas veces los patrones son numéricos y pueden ser descritos usando aritmética. Pero frecuentemente ellos no son numéricos" (Devlin, 1997: 74).

Lo que se hace explícito aquí es un cambio de punto de vista: desde el contenido hacia los procesos, desde el "conocer matemática" hacia el "hacer matemática" (la Matemática se aprende haciéndola; González, 1995) "Además de teoremas y teorías, la Matemática ofrece distinguibles modos de pensamiento los cuales son tanto versátiles como poderosos, se incluyen en ellos la modelización, la abstracción, la optimización, el análisis lógico, la inferencia a partir de los datos, y el uso de símbolos. La experiencia con los modos de pensar matemáticos construye la potencia (el poder) matemática/o, una capacidad mental de creciente valor en esta era tecnológica que obliga a uno a leer críticamente, a identificar falacias, a detectar sesgos, a evaluar riesgos y sugerir alternativas. La Matemática nos da poder para comprender mejor el mundo de información en el que estamos sumergidos hoy en día" (National Research Council, 1989).

Enfatizar sobre los modos de producción de saberes matemáticos nos proporciona una visión de lo que la Matemática es actualmente, mejor que la relación de su contenido. La Matemática consiste en los sistemáticos intentos, basados en la observación, estudio y experimentación, para determinar la naturaleza o principios de las regularidades en sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemática pura) o modelos de sistemas abstraídos del mundo de los objetos reales (matemática aplicada).

Las herramientas de la Matemática son la abstracción, las representaciones simbólicas y la manipulación simbólica. La Matemática es cada vez más asumida como una ciencia empírica en la cual los matemáticos recaban "datos" de modo semejante a como lo hacen los demás científicos; Hacer Matemática está crecientemente siendo visto como un acto

social y colaborativo: la complejidad de los problemas actuales y la potencialidad de los recursos tecnológicos con los que se cuenta hacen necesaria y posible la cooperación mutua entre los matemáticos, independientemente de la distancia geográfica que los separe: la membresía (pertenencia) a una comunidad de practicantes de la Matemática es parte de lo que constituye el pensamiento y el conocimiento matemático; la idea de una práctica colaborativa colide con la manera estándar de pensar acerca del conocimiento. Generalmente pensamos el conocimiento como algún contenido en la mente de alguien, incluyendo estructuras y procedimientos mentales. En contraste, una práctica es una actividad de todos los días, llevada a cabo en un contexto socialmente significativo, en el cual la actividad depende de la comunicación y colaboración con otros y conocer como usar los recursos que están disponibles en la situación. El conocimiento matemático abarca: (a) conocimiento del lenguaje utilizado por lo miembros de la comunidad de practicantes de la Matemática a la cual se pertenece; (b) conocimiento de los resultados que están firmemente establecidos en la actualidad; (c) conocimiento de las cuestiones importantes que actualmente están planteadas en el ámbito de actuación de los miembros de la comunidad; (d) conocimiento de los métodos de razonamiento que son tomados como vías válidas para el establecimiento de los resultados; (e) visiones meta-matemáticas las cuales incluyen conocimiento de las metas generales de la investigación matemática y apreciación de criterios de significación y elegancia.

Parte II

¿Qué es la cognición humana?

La *Cognición* es un constructo con el que se alude a un conjunto de actividades a través de las cuales el sistema psíquico de un Ser Humano procesa información.

Dicho término hace referencia a una serie de procesos mentales que realizamos los seres humanos para adquirir, retener, interpretar, comprender, organizar, utilizar y reutilizar tanto la información existente en el medio que nos rodea, como la información que hayamos adquirido previamente. Las concepciones más recientes de la cognición la conciben como una noción de carácter multifacético y complejo, en la que son identificables, al menos, los siguientes ámbitos: procesamiento, conocimiento y pensamiento. De este modo la cognición incluye los procesos de percepción, atención, cognición espacial, imaginación, lenguaje, memoria, resolución de problemas, creatividad e inteligencia. Pero dichos procesos sirven, no sólo, para procesar información, sino también para construir representaciones de la realidad y crear conocimientos. Es decir, el término *cognición* se refiere tanto al sistema de procesamiento de la información como al contenido procesado y al resultado del proceso, es decir, al conocimiento (Martin García, 1999: 129-130). En el estudio de la cognición humana predominan dos tendencias fuertes; la primera de ellas la asume desde una perspectiva individualista, suponiendo que la constitución de la estructura cognitiva de una persona es un asunto de su estricta competencia; contraria a esta tendencia, surge la *Teoría Dialéctica de la Construcción Social de la Realidad* (González, 1997), de acuerdo con la cual la conformación de dicha estructura tiene carácter social, cultural e histórico.

Perspectiva Individualista en el Estudio de la Cognición Humana.

De acuerdo con la tendencia que la concibe como un asunto de naturaleza estrictamente personal, a la cognición se le vincula con los procesos de adquisición y procesamiento de información (analizar, inferir, comparar, etc.) los cuales se combinan de diferentes maneras para producir variedad de respuestas y ajustarse

a distintas exigencias intelectuales. Al activar dichos procesos, se produce una interacción entre la persona y la información a la cual se los aplican, que genera ideas, imágenes, conceptos, etc., todo lo cual contribuye a la configuración de una organización interiorizada y sistemática de sus experiencias y saberes, denominada *estructura cognitiva del sujeto*, la cual, a su vez, sirve de base de apoyo para la adquisición de nuevos conocimientos; hay evidencia empírica en cuanto a que, mientras más abierta, amplia y flexible sea dicha estructura, más posibilidades de crecimiento cognitivo tendrá el sujeto. De aquí que se hayan propuesto modalidades de intervención con miras a ayudarle a descubrir cuáles son los procesos que utiliza cuando se enfrenta a tareas intelectualmente exigentes (González, 1998a) y qué estrategias (i. e. modos de organizar sus recursos intelectuales para alcanzar determinados logros) le resultan más eficaces; el propósito es hacerlo tomar conciencia acerca de las estrategias que utiliza en la aplicación de sus propios recursos cognitivos, se supone que esto contribuirá a que tales estrategias sean internalizadas y por ende transferidas y generalizadas a otras situaciones.

El marco de referencia para el estudio de la cognición humana está constituido por las Ciencias Cognitivas (ver González, 1998b), particularmente la Psicología Cognitiva, la cual procura ofrecer explicaciones, diferentes a las conductistas, acerca del comportamiento intelectual humano, refiriéndolo a entidades, estados, procesos y disposiciones de naturaleza mental. De acuerdo con Pozo (1989), en la Psicología Cognitiva se pueden identificar, al menos, dos enfoques principales: (a) racionalista y constructivista, y (b) procesamiento de información, las cuales, según este mismo autor, constituyen dos maneras muy diferentes de entenderla. Desde la primera de estas dos posiciones, el aprendizaje es entendido como un proceso de reestructuración del

conocimiento previo; esta perspectiva es englobada bajo la denominación de Teoría del Cambio Conceptual (García-Mila y Martínez, 1991); por el contrario, quienes suscriben el enfoque de procesamiento de información, afirman que el aprendizaje de una persona depende fundamentalmente de los procesos, operaciones, funciones o componentes que están presentes en las diferentes maneras como dicha persona representa y procesa información; según esta corriente lo que determina lo que una persona aprenda es su actividad cognitiva y no el comportamiento del profesor ni la estrategia o materiales instruccionales utilizados. La visión de la cognición desde la perspectiva del enfoque de procesamiento de la información se sustenta sobre los siguientes principios: (a) los procesos mentales existen; (b) las personas son procesadores activos de información; (c) los procesos y estructuras mentales pueden ser revisadas mediante procedimientos ad-hoc (Ashcraft citado por Stiff, Johnson & Johnson, 1993, p.7).

Los problemas de investigación en los que se interesan quienes suscriben el Enfoque de Procesamiento de Información en la Psicología Cognitiva son los siguientes:

1. *Los aspectos arquitecturales del sistema cognitivo humano que tienen que ver con la forma como las personas organizan la información en su estructura cognitiva;* en este caso, se supone que el Sistema Cognitivo Humano funciona de manera análoga a como lo hace un computador; de acuerdo con esto, el ser humano tendría la capacidad para recoger información del medio, procesarla y tomar decisiones en función de algún tipo de criterio, para lo cual se activan dos subsistemas: el operativo y el de control. El primero se sustenta sobre la Concepción Multialmacén de la Memoria Humana: Memoria Sensorial (MS), Memoria a Corto Plazo (MCP) y Memoria a Largo Plazo (MLP); en la primera se hospeda breve y transitoria-

mente la información proveniente del medio; la segunda, es donde se producen las transformaciones de la información percibida; y, en la tercera, es donde se “archiva” el resultado de todo el proceso anterior para su posterior recuperación y uso en caso de ser necesario. La MS tiene una duración de medio segundo aproximadamente. Por tanto, es responsable de una primera impresión de la información. La MCP tiene capacidad limitada, concretamente de siete elementos (más o menos dos, según las ocasiones) y una duración que oscila entre veinte y treinta segundos. Esto quiere decir que podemos atender simultáneamente a siete elementos totalmente nuevos y que podemos retenerlos durante el tiempo citado; por tanto, si no utilizamos ninguna estrategia de recuerdo, no nos acordaremos de nada al cabo del lapso señalado. La MLP se caracteriza por no poseer límites ni en su duración ni en su capacidad, contiene toda la información que hemos ido almacenando a lo largo de nuestra vida. En el Subsistema de Control se activan dos conjuntos de procesos; uno de ellos dirige las búsquedas en la base de datos, opera con ella y difunde la información entre los almacenes de información. Este conjunto de procesos de control recibe el nombre común de procesos interpretativos, los cuales desempeñan un papel significativo en la solución de problemas, en el recuerdo y en el reconocimiento, así como en la comprensión del lenguaje y en las operaciones de cálculo. Estos procesos capacitan a los seres humanos para pensar de un modo deductivo, inductivo, analógico y algorítmico. Sin ellos, la mayor parte de lo que conocemos sería información inútil, no importa cuán bien ni cómo haya sido aprendida. El otro conjunto de procesos de control opera como un supervisor del sistema, que toma decisiones ejecutivas orientadas a

que la búsqueda rinda buenos resultados; supervisa también la localización en la MLP de partículas específicas de información así como la cantidad de esfuerzo requerida para la búsqueda y otras operaciones. Este conjunto de procesos de control es conocido como sistema monitor; este sistema es el que tiene la capacidad de metamemoria (la de conocer lo que sabe). En resumen, de acuerdo con lo anterior, la actividad mental se concibe como una tarea de procesar información la cual se lleva a cabo en varias fases: Entrada (adquisición senso-perceptiva, Memoria Sensorial), Elaboración (transformación de la información; Memoria a Corto Plazo y Memoria a Largo Plazo) y Salida (producción de información) Cada una de estas fases compromete diversos procesos cognitivos (ver González, 1995 a); así, por ejemplo, durante la Fase de Entrada se activan los mecanismos de percepción que permiten identificar las porciones de información relevante; durante la Fase de Elaboración se compara y relaciona la nueva información con la que previamente se haya adquirido y se conserva almacenada en la Memoria a Largo Plazo; y, durante la Fase de Salida se organiza la información a los fines de poder comunicarla.

2. *Los procesos cognitivos que las personas activan cuando operan con la información;* la otra línea de investigación desarrollada en la Psicología Cognitiva de acuerdo con el enfoque de Procesamiento de Información, se refiere al estudio de los procesos con los que el individuo opera sobre los datos; quienes desarrollan esta vertiente se han ocupado de diseñar razones explicativas del comportamiento diferencial que se observa en las realizaciones de una misma clase de tareas por parte de expertos y novatos. Las diferencias, al parecer no son de índole cuantitativa sino más bien cualitativa ya que se ha encontrado que, en algunas tareas, tanto expertos como novatos poseen la misma cantidad de ítemes de información; sin embargo, los expertos los tienen organizados de una manera cualitativamente diferente, lo cual parece incidir en una mejor calidad de desempeño. González (1995, junio) hizo un estudio acerca de los procesos cognitivos que, en cada una de las fases (Entrada, Elaboración y Salida) utilizan profesores de Matemática activos (es decir graduados) y en Proceso de Formación (es decir, Estudiantes para profesor de Matemática) cuyos resultados pueden apreciarse en el Cuadro 1.

Cuadro 1. PROCESOS COGNOSCITIVOS UTILIZADOS DURANTE LA REALIZACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS SEÑALADOS POR PROFESORES GRADUADOS (EXPERTOS) Y ESTUDIANTES PARA PROFESOR (NOVATOS)

ENTRADA	ELABORACIÓN	SALIDA
DOCENTES		
ASOCIACION	ABSTRACCION	APLICACIÓN
COMPRESION	ALGORITMIZACION	CONJETURAR
CAPTACION	ANALISIS	CONSERVACION
CLASIFICACION	APLICACIÓN	EJEMPLIFICACIÓN
COMPARACION	COMPROBACION	ESPECULACIÓN
CONCEPTUALIZACION	CONCRETIZACION	ESQUEMATIZACION
DESCRIPCION	DISCRIMINACION	EXTRAPOLACION
DISCERNIMIENTO	ENSAYO-ERROR	GENERALIZACION
DISCRIMINACION	ESQUEMATIZACION	INDUCCION / DEDUCCION
ENTENDIMIENTO	FORMALIZACION	INSTRUMENTACION
INTERNALIZACION	GRAFICACION	INTERRELACION
LOCALIZACION	IMAGINACION	REELABORACION

PERCEPCION	INFERENCIA	SINTESIS
RELACION	INTEGRACION	TRANSFERENCIA
	INTUICION	
	MEMORIZACION	
	PLANIFICACION	
	RAZONAMIENTO IMPLICATIVO	
	REVERSIBILIDAD	
	SERIACION	
	SIMBOLIZACION	
	TRANSFERENCIA	
	VISUALIZACION	
ESTUDIANTES		
ASOCIACION	APLICACIÓN	
COMPARACION	ANALISIS COMPARATIVO	
IDEACION	ASOCIACION	
IDENTIFICACION	DEDUCCION	
INFERENCIA	EJECUCION	
MEMORIZACION	ESQUEMATIZACION	
PERCEPCION	IDEACION	
PLANIFICACION	INTERPRETACION	
PLANTEAMIENTO DE ALT. MEMORIZACION		
VISUALIZACION		

3. *Las relaciones entre los contenidos de la estructura cognitiva y los procesos activados para operar con ellos.* En cuanto a las relaciones entre estructura y procesos, Pérez Gómez (1985) afirma que en el conocimiento científico es necesario establecer diferencias entre la estructura semántica de una disciplina (el conjunto de contenidos conceptuales relacionados entre sí de una manera determinada) y la estructura sintáctica (el conjunto de métodos y procedimientos que definen la lógica de la investigación específica en tal área del conocimiento). Del mismo modo, en la estructura de la memoria humana se deben diferenciar los cuerpos organizados de conocimiento y los procesos metodológicos que utiliza el individuo para adquirir, incrementar y aplicar dicha información. Así, se tienen dos tipos de conocimiento; (a) *Conocimiento proposicional* (figurativo), el cual se refiere a la información relacional sobre los conceptos y demás datos que una persona tiene almacenados en su

memoria y conforman una estructura organizada de cuerpos de conocimiento; (b) *Conocimiento operativo, algorítmico*, se relaciona con las capacidades de actuación mental, y con los métodos y estrategias aplicables al procesamiento de la información; se refiere a procedimientos en el sentido de configurar operaciones. En cuanto a la vinculación entre estructura y procesos, la Psicología Cognitiva basada en el Enfoque de Procesamiento de Información, ha desarrollado dos vertientes; por una parte, está la diada "conocimiento declarativo-conocimiento procedimental", que alude al contenido de la estructura cognitiva; y, por la otra, está la controversia entre "procesamiento controlado y procesamiento automatizado", la cual tiene que ver con el modo como el individuo opera con los datos que están contenidos en aquella estructura. El conocimiento declarativo es conocimiento factual acerca del significado o las características perceptuales

de las cosas; mientras que el conocimiento procedimental es conocimiento de cómo hacer algo, desde pronunciar una palabra, conducir un automóvil, transformar información en la memoria de trabajo, crear nuevos métodos de solución de problemas y monitorear la efectividad con la cual dichos métodos son implementados. Por ejemplo, organizar teoremas geométricos en una secuencia para lograr una cierta demostración, requiere conocimiento procedimental. Así que la Psicología Cognitiva ha definido dos tipos de conocimientos: el conocimiento declarativo [el *saber qué*], el cual corresponde a conocimientos sobre hechos y cosas, y el conocimiento procedimental [el *saber cómo*], el cual se refiere a cómo llevar a cabo ciertas actividades cognitivas. Con base en lo anterior, puede afirmarse que la adquisición y producción de conocimientos "se da como resultado de un proceso de interacción entre la información que procede del medio y un sujeto activo"; tiene carácter intencional, es decir, no es sólo el resultado de procesos externos, como los refuerzos asociados con el condicionamiento, sino también internos, que aún cuando no son directamente observables, llegan a controlar y dirigir el desempeño intelectual" (Jonguitud Aguilar, 2001: 26).

Perspectiva Socio-Histórica en el Estudio de la Cognición Humana

Desde las Ciencias Cognitivas, se han formulado diversas maneras de abordar el Funcionamiento Cognitivo Humano (Corral, 1991) el cual alude a los procesos que una persona activa para permitir el acceso hacia sí de los estímulos sensoriales, es decir, percibir los influjos del medio, y a los medios que utiliza para transformarlos, reducirlos, elaborarlos, almacenarlos, recuperarlos y usarlos en la realización de tareas intelectuales. De esta

manera, el estudio de la Cognición Humana se interesa por averiguar cuáles son los mecanismos psicológicos internos que explican las variaciones en la ejecución de un individuo. Sin embargo, la Cognición Humana no es un asunto exclusivamente individual; al contrario, a ella se le atribuye un carácter activo y socialmente determinado, ubicando así los procesos de adquisición del conocimiento en una perspectiva sociohistórico-cultural (Perelstein de Braslavsky, 1995) que concibe diferencias entre los procesos psicológicos elementales, de origen biológico, y los procesos psicológicos superiores, humanos, de origen social.

Para el estudio de la Cognición Humana desde una perspectiva socio-histórica, puede recurrirse a la Teoría Dialéctica de la Construcción Social de la Realidad, cuyo principio básico establece que entre el individuo y la realidad social se da una relación dialéctica; el individuo (colectivo) crea la realidad social; pero, esta realidad social, objetivada, crea al individuo. La relación entre hombre (productor) y mundo social (producto) es dialéctica; el hombre (no aislado sino en comunidades) y el mundo social interactúan; el producto vuelve a actuar sobre el productor; la sociedad es un producto humano, es una realidad objetiva; así que el hombre es un producto social.

De acuerdo con la Teoría Dialéctica de la Construcción Social de la Realidad, tres son los procesos sociales que explican la vinculación Hombre-Sociedad: (a) externalización: existen pautas de interacción institucionalizadas de acuerdo con las cuales es esperable que el individuo se comporte en determinadas situaciones; conforman un orden social previo y superior al individuo actuante que éste da por supuesto; según esto, las conductas individuales serían externalizaciones de este orden social; (b) objetivación: cada individuo se enfrenta a conductas de otros actores y a reglas y significaciones institucionalizadas que, desde su perspec-

tiva subjetiva, se le objetivizan como una realidad ante sí mismo que le constriñe; y, (c) internalización: esta estructura social objetivada que los individuos no alcanzan a percibir como su creación colectiva se perpetúa -aunque también cambia- por medio de la internalización que cada quien hace de las reglas, pautas de conducta, tipificaciones e instituciones de la sociedad en que vive (la internalización, vista desde la perspectiva de la sociedad, es lo que se llama socialización). Así que en esta construcción socio-histórica de la cognición humana se actualiza la tensión entre las dos grandes dimensiones de la vida en sociedad (Córdova, 1991, citado en González, 1997): la dimensión socio-estructural se refiere a lo dado: procesos económicos, de intercambio, jurídicos, formales de adquisición de conocimientos; instituciones escolares o de cualquier otra índole; procesos de búsqueda de poder, y, en general, todo aquello que está dado en la vida social; mientras que la dimensión socio-simbólica, tiene que ver con la forma como cada individuo, subjetivamente, se relaciona con el mundo social; en esta dimensión se ubican los juicios, categorías, valores que de alguna manera norman y regulan la propia vida personal.

Se tiene entonces que las Ciencias Cognitivas al integrar un tercer término constituido por "procesos internos de transformación" (Perelstein de Braslavsky, 1995; p. 307) que median entre el estímulo (E) y la Respuesta (R), complementan al esquema conductista clásico: E (estímulo excitante) - R (respuesta, reacción); mientras que el Enfoque Sociohistórico-Cultural, por su parte, enriquece aún más el esquema cuando, entre los *estímulos excitantes* de la acción humana, privilegia a los *estímulos sociales que provienen de la misma persona y de las otras con quienes interacciona*; entonces, en una relación dialéctica, tales estímulos a la vez que fundamentan a la Conciencia Social son el Origen Social de la Conciencia (Perelstein de Braslavsky, 1995; p. 308), y de

los Procesos Superiores del Pensamiento.

PARTE III

¿QUÉ ES LA COGNICIÓN MATEMÁTICA?

En los esfuerzos para caracterizar a la Cognición Matemática, ha participado una legión de investigadores educacionales, psicólogos, científicos sociales y filósofos, cuyos trabajos han dado lugar a un conjunto múltiple de apreciaciones relacionadas con el pensamiento matemático o con los modos del pensar matemáticamente. También los educadores matemáticos se han ocupado del asunto; entre ellos se destaca, particularmente, Alan Schoenfeld (1992) quien llevó a cabo un estudio exhaustivo del tema que fue incluido en el trascendental *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* editado por D. Grows en 1992. En su trabajo, Schoenfeld reconstruyó los principales hitos que sirven de referencia a las indagaciones acerca del Pensamiento Matemático; este autor comienza afirmando que el estudio acerca de la mente y su funcionamiento se convirtió en una disciplina empírica a finales del siglo XIX cuando Wundt, en el laboratorio que fundó en Leipzig (Alemania), utilizó la experimentación y la introspección (autorreportes de los procesos intelectuales) para recabar datos sobre cómo funciona la mente.

Por otra parte, en USA, se atribuyen a Thorndike, discípulo de William James, Padre de la Psicología estadounidense, los principales aportes iniciales a la construcción de teorías relativas a la cognición; resultan interesantes sus leyes (del efecto y del ejercicio) según las cuales, existe una alta correlación entre aprendizaje y ejercitación. Sin embargo, las debilidades de la introspección como técnica generaron fuertes cuestionamientos a las teorías mentalistas.

Mientras tanto, en Rusia, Pavlov logró un importante éxito con su planteamiento en torno a los reflejos condicionados, cuyo abordaje no requería referencia alguna al concepto de Mente; por esta vía se propagaron inusualmente las perspectivas conductistas que, en la búsqueda de razones acerca del comportamiento humano, se ocupaban sólo de la conducta observable (externa). Paralelamente, se desarrollaron los trabajos de Jean Piaget, cuyos aportes, que en un principio fueron rechazados por los psicólogos de USA por considerarlos poco rigurosos, a la larga sentaron las bases de la "perspectiva constructivista".

La pugna entre conductismo y mentalismo dio lugar a las posiciones gestaltistas que gozaron de una amplia popularidad, fortalecida a mediados del siglo XX cuando, en 1945, fueron publicados tres importantes trabajos que expresaron el renovado el interés por el estudio de los procesos de pensamiento de orden superior y la resolución de problemas: la monografía sobre *Resolución de Problemas* (Duncker, 1945); el *Ensayo sobre la psicología de la invención en el campo de la Matemática* (Hadamard, 1945) y el texto acerca del *Pensamiento Productivo* (Wertheimer, 1945); todos ellos desarrollados en el espíritu del trabajo de Graham Wallas quien, en 1926, escribió *El Arte del Pensamiento* donde planteó las cuatro fases del modelo gestaltista de resolución de problemas: *Saturación, Incubación, Inspiración y Verificación*. 1945 también fue el año de aparición del texto de Polya: "How to Solve it" (la versión en castellano, circuló bajo el título de "Cómo plantear y Resolver Problemas" Polya, 1975).

Sin embargo, el apoyarse metodológicamente en la introspección hizo que los gestaltistas fueran severamente cuestionados por los conductistas quienes, además, les criticaban la carencia de una teoría firme acerca de los mecanismos mentales, aspecto éste que sí era

satisfecho por los partidarios del conductismo quienes propusieron su teoría Estímulo-Respuesta. Sin embargo, el conductismo comenzó a debilitarse a mediados de la década de los años cincuenta del siglo XX, a raíz del desarrollo de la Teoría de los Sistemas y de la Cibernética que dieron lugar a los Programas de Inteligencia Artificial, y sirvieron de base al enfoque de Procesamiento de Información que, mediante la observación de personas involucradas en la tarea de resolver problemas, permitió hacer inferencias acerca de la estructura de sus estrategias mentales de resolución y, poco a poco, fue transfiriendo el énfasis hacia los procesos cognitivos, derribando el predominio del enfoque conductista en el estudio del comportamiento humano basándose sólo en la apreciación de las conductas observables.

Progresivamente, el trabajo de identificación de los procesos cognitivos, constitutivos de un sistema operatorio de la actividad intelectual, fue ampliándose hacia la configuración de un sistema complementario de procesos, denominados metacognitivos, encargados de supervisar, regular y controlar a los primeros; los procesos metacognitivos refieren a: (1) lo que la persona declara que conoce acerca de sus propios procesos cognitivos; (2) los procedimientos autorregulatorios que se activan, "en línea", durante la realización de tareas que reclaman alguna exigencia intelectual; (3) las creencias y actitudes. Hasta aquí predominó una visión individualista en el estudio del comportamiento humano (mentalista, conductista, cognocistivista, metacognocistivista); sin embargo, hacia finales de los años ochenta del siglo XX, comenzó a fortalecerse una perspectiva social en el estudio del comportamiento humano, en la cual se inserta la explicación constructivista socio histórica del conocimiento, asociada con el estudio del aprendizaje individual en un contexto social, de acuerdo con la cual "el

conocimiento se origina en contextos de actividad práctica, social y culturalmente organizadas" (Gómez Granel, 1991: 8).

Todo lo anterior, constituye un contexto fructífero para intentar caracterizar a la *Cognición Matemática*, esfuerzo éste que se desarrolla a partir de la próxima sección.

Formulación Teórica del Constructo "Cognición Matemática"

La expresión *Cognición Matemática* se vincula con otras nociones tales como: Razonamiento Matemático, Pensamiento Matemático, Conocimiento Matemático, Sentimiento Matemático, Perspicacia Matemática, Intuición Matemática, Fuerza Matemática, Competencia Matemática; estas expresiones están constituidas por un *Sustantivo* (razonamiento, pensamiento, conocimiento, sentimiento, perspicacia, intuición, fuerza, competencia) *Adjetivado* por el calificativo *matemático* o *matemática*. De todos ellos, el último es el que luce como más abarcador; en efecto, la competencia, es decir, la cualidad de ser capaz –competente- para realizar algo, asociada con la Matemática (*Competencia Matemática*) aludiría a la posibilidad presente en una persona de llevar a cabo tareas asociadas con la Matemática; de este modo, es plausible la conjetura de acuerdo con la cual la *Cognición Matemática* hace referencia a un conjunto de capacidades, habilidades, cualidades, y competencias, de las que dispone una persona para realizar alguna tarea matemáticamente exigente.

Como puede notarse, se ha dado una caracterización genérica de la Cognición Matemática; tal definición no es suficientemente explícita como para poder abordarla con fines de investigación; por esto, resulta pertinente tratar de obtener una definición en la cual aparezcan identificados de forma explícita los componentes que la integran; para ello podría adoptarse el Enfoque Pentadimensional (González, 2002b) de acuerdo con el cual el abordaje conceptual de la Cognición

Matemática comprendería las siguientes dimensiones: (a) Ontológica: ¿Qué clase de entidad posee la Cognición Matemática, cuál es su realidad, cuáles son sus componentes?; (b) Epistemológica: ¿Cómo se constituye, de cuál tipo son las relaciones que el sujeto establece con la Matemática y que contribuyen a la construcción de la Cognición Matemática?; (c) Metodológica: ¿Cuáles son los elementos de este conjunto de "categorías y métodos" propios de la Matemática cuyo dominio caracterizaría a una persona como matemáticamente competente?; (d) Axiológica: ¿Cómo inciden sobre la Cognición Matemática los elementos de carácter valorativo que constituyen la personalidad del Sujeto? ¿Cómo es impactada la Cognición Matemática por el grado de aproximación que el individuo manifiesta hacia la realización de tareas que comprometen el uso de algún aspecto de naturaleza matemática?; (e) Teleológica: ¿Cuál es la finalidad atribuida al desarrollo de la Competencia Matemática? De acuerdo con esto, la Cognición Matemática, además de los aspectos de naturaleza cognitiva, implicaría a las emociones y las actitudes de la persona.

Así que en el estudio de la Cognición Matemática se podrían considerar las siguientes áreas: (a) Intelectual, la cual comprende las dimensiones *Ontológica* (concepciones acerca de la Matemática como disciplina científica), *Metodológica* (conjunto de conceptos, procedimientos, reglas de operación, criterios de decisión, criterios de legitimación, métodos, tácticas y estrategias de actuación, heurísticas, característicos de los modos de actuación dentro del campo de la Matemática) y *Epistemológica* (supuestos implícitos o explícitos, ideas y concepciones acerca del modo como se produce el conocimiento matemático), (b) Afectiva, la cual constituye el ámbito de las creencias, actitudes, emociones y apreciaciones, positivas o no, hacia la Matemática, todo lo cual se asocia con el grado de valoración

que se le atribuye a esta disciplina y todo lo que ésta implica; aquí también se incluyen aspectos tales como autoconcepto matemático, es decir, la visión que la persona tiene acerca de sí misma en cuanto a sus posibilidades de abordar con posibilidades de éxito alguna tarea matemáticamente exigente (ver Gómez Chacón, 1999); (c) Volitiva, tiene que ver con los méritos (¿para qué me sirve? ¿qué finalidad tiene? ¿en qué me puede ser útil?) que se le atribuyen a la posesión de un cierto nivel de habilitación para la realización de tareas de tipo matemático.

Perspectivas en el estudio de la "Cognición Matemática"

La Cognición Matemática ha sido estudiada desde diferentes ámbitos: Histórico (Le Lionnais, 1976); Epistemológico (Piaget y Beth, 1980; Schoenfeld, 1985); Heurístico (de Guzmán, 1991; Mason, Burton, y Stacey, 1989); Psicológico (Schoenfeld, 1992); esta última perspectiva, es decir, la psicológica, es la que ha sido más enfatizada debido, quizás, a que la Cognición Matemática es un *constructo referido, predominante aunque no únicamente, a la actividad intelectual que se da en una persona cuando se aboca a una tarea cuya ejecución requiere de algún asunto relacionado con la Matemática*.

Desde el punto de vista psicológico, la Cognición Matemática ha sido abordada a partir de diferentes perspectivas teóricas que se basan en supuestos diversos acerca de cómo se adquieren los conocimientos matemáticos (Jonguitud Aguilar, 2001); este autor destaca dos orientaciones básicas aplicables al abordaje psicológico de la Cognición Matemática: (a) la *psicométrica* (interesada más en los productos que en los procesos intelectivos humanos) y (b) la *cognoscitivista* (la cual presta particular atención a los procesos interiorizados de pensamiento, puestos en marcha durante la realización de tareas complejas, sean escolares o no). La primera

de estas orientaciones constituye un enfoque cada vez más insuficiente para dar cuenta del aprendizaje humano, por tanto ha dado espacio para el desarrollo de otros enfoques en el estudio del intelecto humano entre los que se incluye la perspectiva cognoscitivista en la cual es posible identificar dos tendencias: la individualista y la sociocultural.

Desde el punto de vista *cognoscitivista individualista*, la Cognición Humana estaría caracterizada con base en los procesos cognitivos que la persona utiliza para lidiar con información, tanto la que proviene del medio externo en donde se haya inserto, como de aquella hospedada en su Estructura Cognitiva propia. En este sentido, según el nivel de incidencia sobre la información tratada, dichos procesos pueden agruparse en las siguientes clases, no disjuntas: (1) recuerdo de la información tal como ha sido recibida y sin efectuar sobre ella ningún tipo de transformación; (2) comprensión e interpretación de la información recibida; en este caso sí hay procesamiento pero éste es mínimo, consiste sólo en cambiar su forma de presentación; (3) utilización de la información; aquí se presentan dos opciones: (a) empleo de la información en situaciones similares a otras previamente conocidas o rutinarias; y, (b) uso de la información en la solución de situaciones nuevas, no rutinarias ni similares a otras que ya han sido vistas; (4) evaluación de la información; en este caso, el sujeto, sobre la base de ciertos criterios preestablecidos, formula juicios valorativos acerca de la información que se le ha proporcionado.

Es así como, desde la perspectiva cognoscitiva individualista, la ***Cognición Matemática*** *podría ser concebida como el conjunto de procesos cognoscitivos que un sujeto ejecuta cuando lleva a cabo las tareas intelectuales propias del estudio de la Matemática, las cuales se caracterizan por ser eminentemente abstractas y relacionarse con el análisis, evaluación, procesamiento, uso, interpretación,*

traducción, reordenación y producción de información simbólica. En efecto, el estudio exitoso de la Matemática, supone que el sujeto es capaz de: pensar más allá de la realidad concreta; manejar, a nivel lógico, enunciados verbales y proposicionales en lugar de objetos concretos; entender y apreciar plenamente las abstracciones simbólicas (Labinowicz, 1982).

De tal manera que, para apreciar los niveles de Cognición Matemática que exhibe una persona, sería necesario: (a) Identificar los modos de raciocino propios de alguna de las áreas específicas de la Matemática (Álgebra, Análisis, Geometría, etc.) que dicha persona pone en marcha; (b) Reconocer las estrategias que emplea para recordar (recuperar de la memoria); almacenar en la memoria, utilizar, re-elaborar y producir información de carácter matemático; (c) Establecer cuál es el nivel de destreza que posee en cuanto al manejo de conceptos, procedimientos, reglas de operación, criterios de decisión, criterios de legitimación, heurísticas, métodos, tácticas y estrategias de actuación propios de la Matemática; (d) Reconocer cuáles son las actitudes que tiene en relación con la Matemática; tanto de las actitudes matemáticas, propiamente dichas como de las actitudes hacia las matemáticas (Gómez Chacón, 1999); (e) Evaluar su capacidad para reconocer los aspectos matemáticos presentes en asuntos propios de la vida cotidiana; (f) Apreciar el grado de habilidad que la persona se autoatribuye para captar la presencia de cuestiones matemáticas en las más diversas situaciones, aún en aquellas que aparentemente nada tienen que ver con la Matemática; (g) Percibir el nivel de conciencia que la persona tiene acerca del grado en que se siente capaz para utilizar las más diversas herramientas matemáticas.

Tomando en cuenta que para cada disciplina existen procesos cognitivos particulares, entonces una caracterización de la Cognición Matemática requeriría de la

identificación de los procesos cognitivos que desarrolla un individuo cuando tiene necesidad de llevar a cabo alguna actividad matemática. Esto obliga a establecer lo que significa que alguien haya “aprendido Matemática” o que sea “matemáticamente competente”. Si se suscribe la afirmación da acuerdo con la cual aprender una ciencia consiste en desarrollar la capacidad de operar con los procesos de la ciencia en cuestión, podría decirse que el aprendizaje de la Matemática se aprecia con base en la capacidad que tenga el sujeto para manipular o manejar procesos matemáticos; de este modo, la Cognición Matemática se caracterizaría por el dominio de los procesos con los que opera la Matemática

Por otro lado, cuando se asume que aprender una disciplina particular implica el dominio de un tipo de pensamiento específico, en el caso de la Matemática se tendría que la Cognición Matemática haría referencia a un modo de pensar matemático; esto significa que un sujeto es matemáticamente competente si maneja conceptualmente un conjunto de categorías propias de la Matemática y los métodos propios de esta disciplina.

Resumiendo lo anterior, podemos decir con Arrieta (1989) que la Cognición Matemática se caracteriza no sólo por la capacidad para realizar ejercicios y repetir información, dominar los algoritmos y las operaciones, sino que, además, exige que el individuo sea capaz de pensar matemáticamente y de resolver problemas complejos; la Cognición Matemática se manifiesta mediante la aplicación de las teorías matemáticas apropiadas, de los conocimientos básicos (hechos, destrezas, conceptos, estructuras conceptuales y estrategias generales) necesarios. Pero, *¿Qué hemos de entender por Pensar Matemáticamente?*

Swing y Peterson (1988) consideran que este tipo de pensamiento implica “el establecimiento de conexiones intelectivamente significativas entre los

múltiples tipos de conocimientos que componen un dominio matemático particular" (p. 54). Entre tales conexiones figuran, según Swing y Peterson, las que se establecen entre "(a) conceptos y procedimientos, símbolos y referentes concretos (dibujos u otro material manipulable); (b) conceptos o procedimientos generales y ejemplos específicos; (c) conocimiento nuevo y conocimiento previo; (d) mundo real, lenguaje y experiencias diarias con la terminología y los símbolos matemáticos" (p. 54). Evidencia de comprensión matemática da un sujeto cuando conecta no sólo el nombre de un concepto con una representación concreta suya sino cuando, además, dicho concepto es interconectado con otras unidades de conocimiento (dibujos, definiciones, fórmulas de cálculo, ejemplos) y el aprendiz comprende cómo y por qué estos componentes se interrelacionan unos con otros.

Por su parte, Schoenfeld (1992) afirma que pensar matemáticamente significa: (a) desarrollar un punto de vista matemático, valorando los procesos de matematización y abstracción y tener predilección hacia su aplicación; (b) desarrollar competencia en el uso de las herramientas de la Matemática y usarlas al servicio del proceso de asignación de sentido matemático (i.e descubrimiento de la estructura profunda, del modelo matemático subyacente, en las situaciones cotidianas que son matematizables, o sea, susceptibles de ser expresadas, comunicadas, abordadas, estudiadas, representadas, idealizadas, abstraídas, mediante el uso de alguno o algunos de los componentes de la matemática: nociones, conceptos, reglas, principios, modelos, modos de operación, esquemas, estructuras, teoremas, etc.).

Se tiene entonces que una caracterización de la Cognición Matemática implicaría el establecimiento de los niveles en los que una persona se desempeña durante la realización de tareas matemáticamente exigentes (González, 1998a), como lo es, por ejemplo, la resolución de un problema mate-

mático con texto (enunciados escritos que hacen referencia a situaciones posibles en la cotidianidad y que responden a un modelo matemático subyacente). En este caso, la persona, sobre la base de un conocimiento de sus estrategias y estilos cognoscitivos individuales, es capaz de: reconstruir los itinerarios seguidos durante el proceso de búsqueda de la solución; identificar las dificultades encontradas así como los puntos de apoyo que le permitieron superarlas y actuar en consecuencia; reconocer las estrategias que utilizó, distinguiendo las que le resultaron exitosas de las que no lo fueron; imaginar situaciones futuras donde las estrategias utilizadas pudieran aplicarse con alguna probabilidad de éxito (Jonguitud Aguilar, 2001: 27).

Otras habilidades intelectuales especialmente relacionadas con la Cognición Matemática son las siguientes: capacidad para: (a) razonar con conceptos, relaciones, propiedades abstractas, axiomas y teorías; (b) usar símbolos para expresar ideas; (c) aplicar distintas clases de razonamientos en sus diferentes modos abstractos de pensamiento; (d) planear largos procedimientos para alcanzar un objetivo dado; (e) criticar sus propio razonamiento y chequear la validez de sus conclusiones apelando a otra información.

Finalmente, otro conjunto de habilidades intelectuales que son indicios de Cognición Matemática, son los siguientes: capacidad para: (a) controlar variables; (b) hacer discriminaciones entre observaciones e interpretaciones; (c) reconocer falta de información en una línea de razonamiento; (d) hacer razonamientos inductivos en el desarrollo de modelos; (e) hacer razonamientos deductivos en la predicción de consecuencias; (f) desarrollar razonamientos hipotético-deductivos; (g) reallizar razonamientos que impliquen tasas de variación; (h) desarrollar cadenas de razonamiento; (i) resolver problemas; y, (j) desarrollar razonamientos de proporcionalidad.

La *perspectiva socio-cultural* se apoya en la idea según la cual la Cognición Matemática no es un asunto privado de la persona, a pesar de que se refiere a procesos interiorizados de pensamiento; al contrario su desarrollo (al menos en los ambientes escolares) se ve favorecido cuando la persona lleva a cabo procesos de inmersión en ambientes matemáticos, en donde tiene la oportunidad de actuar y de comportarse como lo hace un matemático: enfrentando realidades complejas (simbolizables, manipulables rigurosa y racionalmente y dominables mediante la relación entre razón y modelos). En este sentido, resulta pertinente asumir la perspectiva sociológica sugerida por García Suárez (1997), quien afirma que la Matemática debe ser vista como "una parte sustancial de la cultura y contribuye a la consecución de fines globales -no sólo instrumentales-, ayudando al ciudadano a tener sentido de la vida y del mundo y dotándolo de medios que le proporcionen una mejor comprensión de la experiencia humana" (p. 9).

De esta manera, es posible formarse una visión verdaderamente humana de la ciencia, en general y de la Matemática en particular y, por tanto, reconocer que la Matemática es un saber humanizado, un quehacer llevado a cabo por seres humanos; conocer la historia de la Matemática nos aproxima a sus grandezas y miserias, a darnos cuenta de su falibilidad y corregibilidad, la personalidad subyugante de muchos de quienes han ayudado a construirla; a desarrollar una visión dinámica de la evolución de la Matemática, y asumirla como una ciencia por hacer y no como una ciencia hecha; y a reconocer las interrelaciones entre los órdenes histórico, lógico y pedagógico del saber matemático. Asumir el punto de vista socio-histórico permite: (a) entender y hacer comprender una idea difícil, al considerar la génesis de la misma; (b) conocer las circunstancias sociales en las que han surgido los diversos métodos del pensamiento

matemático; (c) conocer cómo aparecen las ideas matemáticas y la ubicación temporal y espacial de los grandes problemas matemáticos: génesis, eclosión, desarrollo y solución; cuáles han sido los problemas abiertos de cada época y situación social, qué conexiones históricas ha tenido la Matemática con otras ciencias.

Además de todo lo anterior, también es necesario tomar en cuenta los aspectos afectivos; no debe olvidarse que una inadecuada introducción a la Matemática, conduce a un posicionamiento inicial afectivo destructor de potencialidades, esto genera fobia, aversión, mitos y tabúes los cuales, finalmente, conducen al fracaso. En efecto, el desempeño en Matemática involucra comportamientos y formas de actuación que tienen que ver no sólo con el uso de hechos, conceptos, principios y algoritmos en tareas matemáticas con tipos variados de exigencia, sino que, además, se vincula con aspectos actitudinales. En este sentido, resulta pertinente hacer referencia a la distinción que hacen tanto Gómez Chacón (1999) como Valdez Coiro (1998) entre "actitudes hacia la Matemática" y "Actitudes Matemáticas"; las primeras se orientan hacia la Matemática como ciencia constituida, como objeto de conocimiento; hay un estatus científico de los saberes con los que el sujeto tiene contacto, y al entrar él en posesión de una parte de ese cúmulo de conocimientos, sea de manera formal o informal, hay el reconocimiento de la existencia de un proceso de aprendizaje que media entre el sujeto y la Matemática, aún cuando tal aprendizaje no se haya producido totalmente; mientras que en las Actitudes Matemáticas, en cambio, se da una forma de contemplar, interpretar y actuar sobre el mundo que rodea al individuo; esa forma puede estar impregnada de estas actitudes aún sin tener explícitamente a la Matemática como ciencia. Las actitudes analítica y sintética ante situaciones problemáticas pueden ser

un ejemplo en este sentido. Hay buenos resolutores de problemas matemáticos que con una actitud de constante búsqueda no sólo resuelven, sino detectan y delimitan con gran facilidad las situaciones problemáticas, cosa no tan fácil de lograr para muchos buenos ejecutantes de algoritmos, por ejemplo" (Valdez Coiro, 1998: 43).

Tomando en cuenta que aun cuando es cierto que los procesos involucrados en la Cognición Matemática, son ejercitados individualmente por cada persona, no menos cierto es que "el aprendizaje es interpersonal; es un evento social dinámico que depende como mínimo de dos cabezas, una mejor informada o más adiestrada que la otra" (Belmont, 1991, p. 62); así que el desarrollo cognoscitivo, y la cognición misma, es una empresa inescapablemente social; por tal motivo, quien esto escribe asume la posición de acuerdo con la cual son posibles los encuentros complementarios entre la perspectiva Individualista y la Sociocultural en cuanto a la Cognición Matemática. Efectivamente, como dice Martin García (1999), "los individuos comparten sus procesos cognitivos con otros individuos así como hacen con sus herramientas y artefactos. Esto significa que el pensamiento está situado en un contexto particular de intenciones, compañeros y herramientas, es decir, está distribuido socialmente... más aún, en el contexto social de las nuevas tecnologías de la comunicación, las herramientas informáticas y telemáticas prolongan la inteligencia humana... permitiendo a la gente percibir y pensar de un modo que no se podría lograr sin su ayuda, y en suma, ampliando la capacidad cognitiva..." (pp. 136-137) .

Parte IV

Inteligencia y cognición matemática

Lo primero que ha de constatarse es que *existen varios tipos diferentes de Inteligencia:* "el repertorio humano de habilidades va

mucho más allá de los conocimientos escolares básicos (lectura, escritura y aritmética), la estrecha banda de destrezas vinculadas con las palabras y los números, en los que tradicionalmente se basa la educación primaria" (Goleman, 1996: 67)

En 1983, Howard Gardner publicó su ya célebre libro *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*; los planteamientos de Gardner cuestionan la visión de acuerdo con la cual por Inteligencia ha de entenderse aquello de lo que son capaces las personas según la puntuación que obtengan en los denominados Tests de Inteligencia (creados por Alfred Binet) que "miden" su "Coeficiente Intelectual, CI"; de acuerdo con Gardner, considerar como "muy inteligente" a una persona por el hecho de que obtenga una "elevada puntuación" en uno de tales test, es un indicio de que se suscribe una visión estrecha de la inteligencia, que la concibe como una habilidad general presente en diferente grado en cada una de las personas; por el contrario, de acuerdo con Gardner, la Inteligencia ha de asumirse como un amplio espectro de habilidades y, en su Teoría de las Múltiples Intelligencias, propone que existen, al menos, siete variedades diferentes de inteligencia:

La lingüística: habilidad para el buen uso de la lengua y la expresión, desarrollada especialmente por los poetas, novelistas, personas que hablan en público, abogados; **La lógico-matemática:** habilidad para calcular, cuantificar, resolver operaciones matemáticas, utilizada por científicos, logísticos, estadistas. Obviamente estas dos inteligencias son las más utilizadas en el colegio y las que se evalúan en los tests estandarizados de Coeficiente Intelectual (CI); **La musical:** habilidad para escuchar sensiblemente, reproducir una canción, discernir ritmo, timbre, tono. Utilizada por compositores, directores de orquesta, músicos; **La espacial:** habilidad para pensar en tres dimensiones, realizar imágenes

mentales. Se destacan en esta inteligencia los escultores, cirujanos, arquitectos, pilotos; **La físico-kinestética:** habilidad para manipular objetos y las que involucran al cuerpo para resolver problemas. Los atletas, bailarines, cirujanos y artesanos desarrollan estas capacidades; **La interpersonal:** habilidad de entender e interactuar efectivamente con otros: esta capacidad se da en líderes, en los profesores y maestros, en los psicólogos y en los padres; **La intrapersonal:** habilidad que desarrolla el conocimiento de uno mismo, sus emociones, sus sentimientos, la orientación de su vida.

Como puede notarse, los planteamientos de Gardner trascienden la noción de Inteligencia tradicionalmente suscrita por la Psicología; tanto la de orientación conductista que suscribía el principio de acuerdo con el cual sólo la conducta observable desde el exterior es susceptible de tratamiento científico, como la de orientación cognoscitivista que, basada en la analogía establecida entre el funcionamiento intelectual humano y el de un computador, centra su atención en los procesos que la persona activa cuando está abocada al tratamiento de la información que el medio le proporciona.

Por lo tanto, si en el asunto del estudio de la actividad matemática de los seres humanos se considera solamente a los aspectos de índole intelectual, cognitiva, entonces tal actividad (conceptualizada como Cognición Matemática) NO sería modelo de inteligencia en el sentido múltiple que le ha dado Gardner, sino que sólo aludiría a una clase de la variada gama que ha propuesto este autor. De tal manera que habrá que enriquecer la concepción que se tenga del comportamiento matemático de los seres humanos a los fines de aproximarnos al modelo de inteligencias múltiples de Gardner. En esta dirección se orientan los trabajos de Inés M^a Gómez Chacón (1999) y Keith Devlin (2002) autor del texto "The Math Gene" en el cual expli-

ca cómo nuestras habilidades innatas de construir patrones nos permiten ejecutar el razonamiento matemático, revelando por qué algunas personas disfrutaban de la Matemática mientras que otras las encuentran difíciles y apenas un selectísimo grupo es excelente en esta disciplina.

Sternberg (1997) se encuentra entre quienes han trabajado para desarrollar una visión más ampliada de la Inteligencia, tratando de "reinventarla", poniendo de manifiesto las "debilidades" de la concepción de la Inteligencia que se expresa operacionalmente mediante las puntuaciones que las personas obtienen en los tests que "midan" el Coeficiente Intelectual; Sternberg, apoyándose en los planteamientos de Gardner desarrolla la noción de *Inteligencia Exitosa*: "Tener inteligencia exitosa es pensar bien de tres maneras diferentes: analítica, creativa y prácticamente... (Estos) tres aspectos de la inteligencia exitosa están relacionados. El *pensamiento analítico* hace falta para resolver problemas y juzgar la calidad de las ideas: La *inteligencia creadora* hace falta, en primer lugar, para formular buenos problemas y buenas ideas. La *inteligencia práctica* es necesaria para usar las ideas y su análisis de una manera eficaz en la vida cotidiana... La inteligencia exitosa es más efectiva cuando se equilibran los aspectos analítico, creativo y práctico." (p. 131).

De tal manera que, si el desempeño en Matemática es reducido a su aspecto puramente cognitivo, contribuiría poco al desarrollo de la inteligencia, tal como la conciben Howard Gardner (Inteligencia Múltiple), Daniel Goleman (Inteligencia Emocional) o Robert Sternberg (Inteligencia Exitosa); por ello, resultan atractivos los planteamientos globales, como el de Alan Schoenfeld quien, en la noción de Cognición Matemática, incluye los siguientes cinco componentes: (1) Conocimientos Básicos, tanto matemáticos como generales; (2) Estrategias para la solución de problemas; (3) Monitoreo y

Control (es decir, pericia metacognitiva); (4) Creencias y Afectos; y (5) Prácticas.

Entonces, de acuerdo con Schoenfeld, la Cognición Matemática se expresaría mediante: (a) Capacidad para interpretar el gran volumen de datos cuantitativos que la persona encuentra en su cotidianidad y para actuar sobre la base de dicha interpretación; (b) Disposición para utilizar los conocimientos matemáticos en actividades prácticas, tanto sencillas como más complicadas; (c) Posesión de un amplio repertorio de técnicas y perspectivas para tratar con situaciones y problemas nuevos, lo cual les otorga una amplia flexibilidad de pensamiento; (d) Capacidad para analizar tanto el pensamiento propio como los argumentos de otros; tomando conciencia de las herramientas (mentefactos) de las que dispone para afrontar la realidad, es capaz de abstraerla; (e) Disposición para modificar su punto de vista, en virtud de su gran flexibilidad de pensamiento; y, (f) Capacidad para cuestionar tanto sus argumentos propios como los de los demás, debido a su alta capacidad de análisis.

Así que al adaptar el punto de vista de Schoenfeld, la participación en actividades matemáticamente exigentes tendría efectos sobre lo Cognitivo, lo Afectivo y lo Práctico. (a) sobre lo cognitivo porque activa la capacidad mental del alumno, ejercita su creatividad, reflexiona sobre su propio proceso de pensamiento, transfiere lo aprendido a otras áreas; (b) sobre lo afectivo porque el alumno adquiere confianza en sí mismo; reconoce el carácter lúdico de su actividad mental propia; (c) sobre lo práctico porque el alumno desarrolla destreza en las aplicaciones de la Matemática a otros campos científicos; y está en mejores condiciones para afrontar los retos tecno-científicos.

Si lo anterior se logra, entonces la actividad matemática escolar podría convertirse en un importante medio coadyuvante para que nuestros ciudadanos se realicen como personas exitosamente in-

teligentes; esto puede lograrse si las tareas matemáticas escolares se llevan a cabo de forma tal que los alumnos: (1) logren apreciar que la actividad matemática es intrínsecamente motivante ya que su realización reclama el ejercicio pleno de toda la potencialidad humana de cada individuo (motivación intrínseca, automotivación, Locus de Control Interno); (2) se den cuenta de que el éxito en la obtención de una respuesta acertada a una situación está vinculado con la capacidad para controlar las actuaciones impulsivas y sin reflexión (control de la conducta impulsiva y de las emociones); (3) reconozcan que la culminación exitosa de una tarea no es un asunto de inmediatez sino de trabajo constante, sostenido, e insistente; así que, si las cosas no salen inmediatamente como lo hemos pensado, se debe hacer la revisión correspondiente, para corregir si es necesario, y perseverar en el esfuerzo, hasta completar la tarea o tomar la decisión de abandonarla por reconocer su imposibilidad (lo cual también es sano); (4) tomen conciencia de sus debilidades y de sus virtudes de modo que puedan controlar a las primeras y potenciar a estas últimas; (5) valoren las ideas que generan y actúen conforme a ellas, diseñando cursos de actuación en función de la tarea que han de afrontar; (6) desarrollen criterios para evaluar la calidad de sus producciones en función de "estándares" que hayan previamente establecido o concebido, atendiendo no sólo al proceso sino al producto obtenido; (7) desarrollen capacidades para superar los "saboteos propios y los ajenos también", de modo que, una vez que consciente y responsablemente asumen una tarea, superen cada una de las excusas que surjan para no culminarla; (8) adopten conductas proactivas que le permitan tomar iniciativas (sugerir ideas para resolver algún problema, por ejemplo); (9) dejen de tener miedo de arriesgarse al fracaso; es decir que, en caso de situaciones problemáticas que deben ser abordadas, sean capaces de proponer ideas

para tratar de resolverlas por más descabelladas que puedan parecerle a los demás en un momento dado; (10) No dejar para más tarde las cosas que deben hacerse ahora mismo (evitar la postergación de los compromisos); (11) hacerse tolerantes a la crítica sanamente constructiva y reconocer la falibilidad del ser humano (tolerancia al error); (12) incrementen sus niveles de autocrítica sin caer en la autocompasión; (13) actúen con independencia de criterio; (14) reconozcan que en toda situación están presentes las dificultades y tengan la suficiente confianza en si mismos como para superarlas; (15) se concentren en el logro de sus objetivos y metas; (16) asuman riesgos moderados: dedicarse a la cantidad de tareas que saben manejar simultáneamente; (17) incrementar su capacidad de diferimiento de recompensas; (18) estar conscientes de lo que hacen y de si lo que hacen los conduce o no adonde quieren llegar; (19) tener un nivel razonable de autoconfianza y de creencia en sus posibilidades para alcanzar sus objetivos; (20) equilibrar el pensamiento analítico, el creativo y el práctico (Sternberg, 1997).

Referencias

- Arrieche, M. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la Formación de Maestros: Facetas y Factores Condicionantes del Estudio de una Teoría Matemática*. Tesis de Doctorado. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (España).
- Arrieche, M. (1999). *Marcos Teóricos en el Estudio Epistemológico y Didáctico de la Teoría de Conjuntos*. Trabajo presentado como requisito parcial de evaluación en la Asignatura: Teoría de la Educación Matemática; dictada por el Profesor Dr. Juan Díaz Godino, en el Programa de doctorado en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada, España), durante el Bienio 1998-2000.
- Arrieta, J.J. (1989). *La Resolución de Problemas y la Educación Matemática: Hacia una Mayor Interrelación entre Investigación y*
- Desarrollo Curricular. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS*, 7 (1) 63-71.
- Babini, J. (1968). *Historia de las Ideas Modernas en Matemática*. Washington, D.C: O.E.A., Secretaría General. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Colección de Monografías Científicas: Serie de Matemática, Monografía N° 4.
- Belmont, J. B. (1991). Estrategias Cognoscitivas y Aprendizaje Estratégico: El enfoque socio-instruccional. *Acción Pedagógica*, 2(1-2), 56-72.
- Blais, D. (1988). Constructivism: a Theoretical Revolution for algebra. *MATHEMATICS TEACHER*. Vol. 81, Num. 8, Noviembre de 1988, pp 624-631.
- Bosch, J. (1971). *¿Qué es la Matemática?*. Buenos Aires: Editorial Columba, Colección ESQUEMAS, N° 109.
- Córdova, V. (Conferencista). (1991). Conferencia pronunciada el 01-03-91, durante la Sesión de Trabajo Nro. 3, correspondiente al tema Enfoques Cualitativos de Investigación, en el marco del "Seminario de Orientación a la Tesis Doctoral II". Valencia: Universidad de Carabobo, Area de Estudios de Postgrado.
- Corral, R. (1991). La Psicología Cognitiva Contemporánea y la Educación. *Revista Cubana de Educación Superior* XI(1-2), 29-33.
- Devlin, K. (2000). *The Math Gene: How Mathematical Thinking evolve and why numbers ar like gossip*. Moraga, California (USA): Basic Books.
- Duncker, K. (1945). *On problem solving*. Psychological Monographs 58, No. 5. (Whole # 270.) Washington, DC: American Psychological Association.
- Eves, H. & Newson, C. (1965). *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Félix, Vanderlei Silva (2001). *Educação Matemática: Teoría e prática da avaliação*. Paso Fundo (RS, Br): Editora Clío Livros
- Fiorentini, D. (1994). *Rumos da pesquisa brasileira em Educação Matemática*. Campinas, São Paulo, Faculdade de Educação. Campinas (Br) Tesis

- de Doctorado (referido por Félix, 2001: 93)
- García Suárez, X. (1997). La confrontación ciencias-letras: la matemática como un saber reintegrador. *Tarbiya* 15 (enero-abril), 9-20.
- García-Mila, M. Y Martínez, M. (1991). Ciencia Cognitiva, Habilidades del Pensar y Pedagogía de la Ciencia. *Revista Española de Pedagogía*, XLIX (188), Enero-Abril, 147-162.
- Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Nueva York: Basic Books
- Goleman. D. (1995). *Emotional Intelligence*. Nueva York: Bantam. Hay versión en castellano: Goleman, D. (1996). *La Inteligencia Emocional*. Buenos Aires: Javier Vergara Editor.
- Gómez Chacón, I. M^a (1999). *Matemática Emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, s. a. de ediciones.
- Gómez Granel, C. (1991). La didáctica de las matemáticas en los 90. *Comunicación, Lenguaje y Educación (CL & E): Métodos y Técnicas para el Educador en las Áreas del Currículum*. 11-12; 7-9.
- González, F. (1990). El Papel de los Compromisos Teóricos del Tesista en el Proceso de Elaboración, Presentación y Defensa de la Tesis Doctora. *Paradigma*, XI (1 y 2)
- González, F. (1995, Octubre). Algunas Ideas en Torno a la Mediación Cognitiva. *Colecciones CIEAPRO*, 2; 39-59.
- González, F. (1995a). Competencia Matemática: un intento de validación del constructo. *La Investigación en Educación Matemática*. Serie Temas de Educación Matemática (Parte Cuatro, Capítulo 17; pp 69-114)
- González, F. (1995b). Aprender a Enseñar Matemática: Elementos para configurar una estrategia. *La Enseñanza de la Matemática: Proposiciones Didácticas*. Serie Temas de Educación Matemática (Parte Dos, Capítulo 5; pp 1-36)
- González, F. (1996). El Sistema de Mediación Tutorial. *Enfoques (Revista de Investigación del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro)*, 1 (2, Enero-Julio): 56-71.
- González, R. (1997). Los Métodos Etnográficos en la Investigación Educativa. *Paradigma*, XII (2)
- González, F. (1998a, Jan/Jun). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. *ZETETIKÉ*, 6(9), 59-88 (Revista semestral, arbitrada, del Círculo do Estudo, Memória E Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Brasil)
- González, F. (1998b). Las Ciencias Cognitivas como Contexto para Interpretar las Nuevas Concepciones Acerca del Aprendizaje. *Revista EDUCARE* (Instituto Pedagógico "Luis Beltrán Prieto Figueroa", Barquisimeto, Venezuela), 2 (ÚNICO); 5
- González, F. (2002a) *LA DINAMICA P²MA: Una opción didáctica frente a la enseñanza tradicional de la Matemática*. Entregado para su publicación en el Boletín de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM).
- González, F. (2002b). *Apuntes para una Crítica Pentadimensional de la Investigación Socioeducativa*. Material Didáctico utilizado en la Asignatura Introducción a la Investigación Cualitativa en Educación, durante el Curso Introductorio al Doctorado en Educación de la UPEL (Maracay) en el Lapso Octubre 2001 a Marzo 2002 (Disponible directamente con el autor: fgonzalez@ipmar.upel.edu.ve)
- Guzmán, M. De (1991). *Para Pensar Mejor*. Barcelona (España): Editorial Labor, S. A.
- Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press
- Jonguitud Aguilar, C. (2001). El desarrollo cognoscitivo, una ventana al desarrollo humano integral. *Revista Mexicana de Pedagogía*, XII (57): 25-27
- Labinowicz, E. (1982). *Introducción a Piaget*. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Le Lionnais, F. y Colaboradores (1976). *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires: (3a. Edición)
- Martin García, A. V. (1999). Más allá de Piaget: Cognición Adulta y Educación. *Teoría de la Educación* (Universidad de Salamanca), 11;

- Mason, J., Burton, L, y Stacey, K. (1989). *Pensar Matemáticamente*. Barcelona (España): Editorial Labor, S.A.
- Mialaret, G. (1962). *Pedagogía de la Iniciación en el Cálculo*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz
- National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academic Press.
- Ortíz, J. R. (1988). *Matemática y Ciencia*. Caracas: Universidad Nacional Abierta.
- Perelstein de Braslavsky, B. (1995). La Lengua Escrita y los Procesos de Adquisición de Conocimientos en una Concepción Sociohistórico-Cultural. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos* 76(182/183), 305-325.
- Pérez Gómez, A. (1985). Conocimiento Académico y Aprendizaje Significativo: Bases Teóricas para el Diseño de Instrucción. *Cuadernos de Educación*, 123-124. Caracas: Laboratorio Educativo, pp 84-128.
- Piaget, J. y E. W. Beth (1980). *Epistemología Matemática y Psicología (Una indagación sobre las relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real)*. Editorial Crítica, Grupo Editorial Grijalbo; Barcelona, España.
- Polya, G. (1975). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Editorial Trillas.
- Pozo, J. I. (1998). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid: Ediciones Morata. Capítulo III, pp 39-60.
- Rodríguez M. A. y Gutiérrez R., I. (1999). Una estrategia de formación del profesorado basada en la Metacognición y la Reflexión Colaborativa: El punto de vista de sus protagonistas. *Revista Española de Pedagogía* LVII., N° 212, Enero-Abril; 159—182.
- Schoenfeld, A. (1985). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 361-380.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. En D. Grows, Ed. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan; Capítulo 15, pp 334-370
- Sierra, B. y Carretero, M. (1990). Aprendizaje, Memoria y Procesamiento de la Información: la Psicología Cognitiva de la Instrucción. En C. Cool, J. Palacios y A. Marchesi (Comp). *Desarrollo Psicológico y Educación, II*, Psicología de la Educación. Madrid: Alianza Editorial, pp 141-158.
- Sternberg, R. (1997). *Inteligencia Exitosa: Cómo una inteligencia práctica y creativa determina el éxito en la vida*. Buenos Aires: Paidós.
- Stiff, L, Johnson, J. & Johnson, M. (1993). Cognitive Issues in Mathematics Education. En P. S. Wilson (Ed). *Research Ideas for the Classroom. High School Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company
- Swing, S. y Peterson, P. (1988). Elaborative and Integrative Thought Processes in Mathematics Learning. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 80. Num. 1, pp 54-66.
- Valdez Coiro, E. (1998). *Rendimiento Escolar y actitudes hacia las matemáticas: una experiencia en la escuela secundaria*. México: CINVESTAV-IPN, Departamento de Matemática Educativa, Área de Educación Superior; Programa Editorial; Serie: Investigaciones en Matemática Educativa.
- Wallas, G. (1926). *The art of thought*. Selections in P.E. Vernon (Ed., 1970), *Creativity*, Middlesex, England: Penguin, p. 91-97.
- Wertheimer, M. (1945/1959). *Productive thinking*. New York: Harper and Row.

