Acerca da circularidade no estudo inicial dos números irracionais: uma proposta para a Educação Básica

Marcos Antonio Mosca
Túlio Oliveira de Carvalho
Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

RESUMO

Este artigo apresenta uma abordagem para o ensino de números irracionais que pode ser utilizada nas séries finais do Ensino Fundamental, que evita a circularidade de definir o conjunto dos números reais como a união disjunta do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais, e justificá-la com a afirmação de que o conjunto dos números irracionais é o complemento, no conjunto dos números reais, do conjunto dos números racionais. Para tanto, propomos o uso de uma definição que enfatiza as quatro operações elementares. Ao par desta definição, oferecemos uma situação problema, envolvendo medidas e cálculos iterativos, que explicita a necessidade da consideração de números irracionais. Realizamos uma pesquisa de natureza mista, tanto qualitativa quanto quantitativa, na qual analisamos atividades propostas a alunos do 1º Ano do Ensino Médio, visando diagnosticar o conhecimento que apresentavam acerca do conceito de irracionalidade. Os resultados apontam que os alunos não têm familiaridade com números racionais, frações equivalentes, e sua distinção em relação aos números irracionais. Apontam também que a realização de uma demonstração por absurdo é um raciocínio abstrato, ao qual os estudantes não estão acostumados ou desconhecem completamente, sugerindo que as demonstrações matemáticas não são apresentadas, em nenhum nível de dificuldade, no Ensino Médio.

Palavras-chave: Números Irracionais. Circularidade. Educação Básica.

Concerning the Self-referring on the Initial Studies of Irrational Numbers: A proposal for Basic Education

ABSTRACT

This paper presents an approach to the teaching of irrational numbers that could be used in the final grades of Elementary School, which avoids the self-reference when defining the set of real number as the disjoint union of the sets of rational numbers and of irrational numbers, and justifying it with the statement that the set of irrational numbers is the complement, in the set of real numbers, of the set of rational numbers. To do this, we propose the use of a

Marcos Antonio Mosca é mestre em Matemática. Atualmente, é Professor do C. E. Dom Geraldo Fernandes. E-mail: mamfisica@gmail.com
Túlio Oliveira de Carvalho é Doutor em Ciências. Atualmente, é Professor do Departamento de Matemática da UEL. E-mail: tulio.decarvalho@gmail.com
Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho é Doutora em Educação Matemática. Atualmente, é Professora do Departamento de Matemática da UEL. E-mail: anatuccicarvalho@gmail.com
Recebido para publicação em 26/11/2015. Aceito, após revisão, em 24/06/2016.

definition that emphasizes the four arithmetic operations. Besides this definition, we offer a problem situation, involving measures and iterative calculations, which spells out the need for consideration of irrational numbers. We conduct a qualitative and quantitative research, in which we analyze a set of activities proposed to students at the first grade of high school, in order to diagnose the knowledge they gathered on the concept of irrationality. The results show that students are hardly familiar with rational numbers, equivalent fractions, and how irrational numbers are distinguished from them. They also point out that writing a proof by contradiction represents an abstract reasoning to which they are unaccustomed or completely unaware, suggesting that mathematical proofs are not presented, whatever its difficulty level, in high school.

Keywords: Irrational numbers. Self-reference. Basic Education.

INTRODUÇÃO

A respeito da compreensão dos estudantes acerca dos números reais, a literatura traz alguns estudos realizados partindo-se da hipótese de que as principais dificuldades de entendimento dos alunos estariam relacionadas à incomensurabilidade e não enumerabilidade (ROBINET, 1986; FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995). Estes estudos se basearam na aplicação de questionários a alunos do equivalente aos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e licenciandos em Matemática. Divergindo da hipótese, os autores constataram e relataram erros na identificação e reconhecimento de uma amostra de números reais.

Soares, Ferreira e Moreira (1999) reportam uma avaliação, também baseada em uma bateria de questões, das imagens conceituais sobre o conjunto dos números reais de alunos de licenciatura em Matemática. Constatado o grande percentual de erros conceituais, pontuam

> O contraste racionalidade versus irracionalidade parece ser percebido como pura formalidade, na medida em que a distinção é apenas na forma de representação. [...] Se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999, p.115)

Segundo os mesmos autores, "o estudo dos sistemas numéricos é de fundamental importância na formação do futuro professor" (op. cit., p.115), porém, não se pode esquecer que na conceituação de irracionalidade comparece a ideia de limite. Como a ideia de limite de uma série convergente seria "compreendida" é um exemplo discutido com profundidade em Sierpinska (1990). Cabe recortar, em particular, o ponto em que a autora relata que, ao escrever a soma de uma série geométrica 9,9 + 0,099 + 0,00099 +... como solução para a distância percorrida por Aquiles, no contexto do paradoxo de Zenão, os alunos não reconheceram o resultado como 10, mas apenas como *tendendo* a 10 (SIERPINSKA, 1990).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), estabelece-se que

> O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contraexemplos para ampliar a compreensão dos números. (BRASIL, 1998, p.83)

Estendendo-se sobre toda a construção dos conjuntos numéricos, Moreira e David (2005) apontam o distanciamento entre a Matemática Escolar e a Matemática Científica ou Acadêmica. A primeira refere-se ao conjunto de práticas, saberes e produções elaborados por aquele que será professor de matemática, incluindo suas perspectivas pedagógicas e didáticas sobre o ensinar e aprender matemática; a segunda, pensada como o corpo científico da matemática, a matemática profissional, axiomatizada, formal. Segundo estes autores, enquanto a Matemática Acadêmica está referenciada com a "produção de resultados originais, de fronteira" (MOREIRA; DAVID, 2005, p.21), a Matemática Escolar relaciona-se com prática do professor de matemática da escola básica e "desenvolve-se num contexto educativo" (2005, p.21).

Para Moreira e David, uma das principais diferenças entre estas matemáticas refere-se ao significado, extensão e o papel das definições e demonstrações matemáticas; o distanciamento exacerbado tem consequências negativas para a formação do professor com vistas a sua prática escolar. Em consonância com esta visão, no presente trabalho, salienta-se a importância de produzir definições acessíveis aos alunos, tanto na Educação Básica quanto nos cursos de formação de professores.

> A questão fundamental para a Matemática Escolar refere-se à aprendizagem, portanto ao desenvolvimento de uma prática pedagógica, visando a compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extraescolar. (MOREIRA; DAVID, 2005, p.23)

Nos cursos de Licenciatura em Matemática a exposição à estrutura dos números reais segue livros que assumem conhecido o conjunto dos números racionais, especialmente como classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros (a,b), $b \neq 0$ (FIGUEIREDO, 1975). A ampliação para o conjunto dos números reais também segue padrões formais. Moreira e David (2005) citam as definições acadêmicas do conjunto dos números reais: cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de números racionais, ou classes de equivalência de intervalos encaixantes com extremos racionais. Uma primeira hipótese do presente trabalho é que, com base nas definições formais apresentadas acima, é difícil que o licenciando reconheça qualquer número irracional como “número”.

> [...] uma vez que a noção do que seja número vem sendo ampliada desde a ideia básica de número natural, [...] “criar” os reais a partir do nada, ou seja, postular a existência de um corpo ordenado completo e identificar o conjunto dos números reais com essa estrutura configura uma inversão da rota que entra em conflito com o processo que se desenvolve na escola. Além disso, com essa abordagem elimina-se (ou encaminha-se de forma dissonante com o tratamento escolar) a discussão a respeito de questões importantes, entre as quais, o próprio **sentido** da ampliação de Q. (MOREIRA; DAVID, 2005, p.80, grifos dos autores)

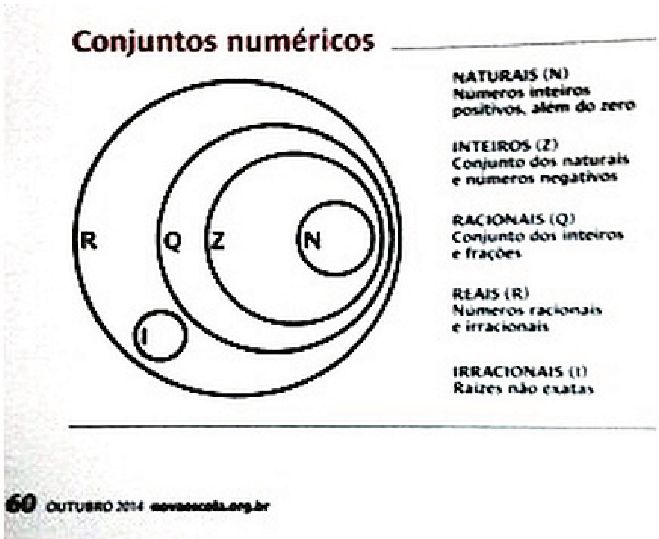
No que concerne à importância de oferecer sentido para a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais e caracterização do conjunto dos números reais, propõe-se na Seção 2 uma situação problema em que um número irracional aparece como “solução”. Acreditamos que este sentido pode ser adquirido já no Ensino Fundamental, consolidado no Ensino Médio, para deixar de ser mitificado na licenciatura.

A reflexão que o presente estudo vem trazer é de que o esquema operacional, a que os alunos da Educação Básica são expostos desde o estudo do conjunto dos números naturais, passando pelos números inteiros, até os números racionais, é esquecida na extensão para os números reais, mas sua retomada seria benéfica como recurso didático – sem esquecer, mas, ao contrário, ressaltando, a importância da consideração dos vários significados dos números racionais (KIEREN, 1976; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008).

Para além de reconhecer e avaliar as dificuldades do tópico, do ponto de vista didático e conceitual, esta contribuição vai à direção de oferecer sentido e subsídios aos professores da Educação Básica em geral e Educadores Matemáticos no que concerne à passagem do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. Nomeadamente, os subsídios consistem em uma proposta de *definição* dos números reais, e uma classe de problemas em que um número irracional pode ser abstraído a partir de uma sequência de aproximações racionais.

Avaliamos ainda que, no contexto brasileiro, o tema conjuntos numéricos padece de certas dificuldades extras, como se ilustra na Figura 1.

FIGURA 1 – Fragmento de matéria.



Fonte: Revista Nova Escola, out. 2014, p.60.

A figura contém o equívoco de representar números reais que não seriam números racionais, nem números irracionais. Todavia, conceda-se que, mesmo em contextos outros que não o brasileiro, um número como: 0,123456789101112... não é reconhecido como tal por um percentual importante dos estudantes (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995).

De fato, a representação decimal e o recurso das calculadoras podem gerar conflitos com o reconhecimento de um número racional, como reportado numa atividade com professores a quem foi pedido para estabelecer a qual conjunto numérico a fração $\frac{1}{7}$ pertence (COSTA, 2008). Diante do mostrador da calculadora, não sendo reconhecida a dízima periódica, como poderia o usuário responder a uma questão de classificação como esta? Esta é uma limitação inerente da representação decimal, porquanto – a menos que se conheça o que está subentendido nas reticências, que é um processo infinito – jamais se poderia afirmar tampouco que 1,414213562... é um número irracional.

As demonstrações, acessíveis à Educação Básica, da irracionalidade de um número real podem ser classificadas em geométricas, ou baseadas no Teorema Fundamental da Aritmética. Estas se aplicam a $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ que não seja um quadrado perfeito. Elas dependem da compreensão do raciocínio por redução ao absurdo.

A definição de número irracional padece da circularidade de já se supor conhecido o conjunto dos números reais.

Definição 1: Um *número irracional* é um número real que *não* pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

De fato, está-se dizendo que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, ou seja, o conjunto dos números irracionais é o complemento, no conjunto dos números reais, do conjunto dos números racionais. Mas quando se pergunta o que é o conjunto dos números reais, diz-se que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ Esta definição pode ainda ser encontrada em Silva (2014). Felizmente, não se encontra mais nos livros aprovados no edital do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (BRASIL, 2014), apesar de resistir na representação dos conjuntos numéricos em diagramas de Venn.

Partindo do pressuposto de que o estudante reconheça a existência de um número irracional pode-se adotar uma abordagem ao conjunto dos números irracionais que evita esta circularidade, e enfatiza o lado operacional ao qual os estudantes já estão habituados, com a seguinte definição:

Definição 0: O conjunto dos *números reais*, denotado por $\mathbb{R}$, é ordenado e contém estritamente o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Além disto, as operações aritméticas em $\mathbb{R}$ preservam as propriedades vistas em $\mathbb{Q}$, ou seja, comutatividade para soma e produto, associatividade para soma e produto, distributividade da soma em relação ao produto, existência do oposto, e existência do inverso multiplicativo.

Estamos cientes de que ambas as definições não comportam corretamente a cardinalidade do conjunto dos números reais. Trata-se de uma definição com ênfase nas operações aritméticas, para manter aquela que o percurso do ensino dos conjuntos numéricos, até o conjunto dos números racionais, possui. Em face desta proposta de definição, lembramos o que Poincaré diz: “o que é uma boa definição? Para o filósofo ou o cientista é uma que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente a eles. Mas em educação não é isso; é uma que pode ser entendida pelos alunos” (POINCARÉ, apud TALL, 1992).

Nos textos para o ensino de Matemática no Ensino Médio, aprovadas no PNLD, pode-se verificar uma aproximação à conceituação contida na definição proposta acima, em que pese o fato de não ser usada à paragrafação formal, encontrada nos textos universitários. Poder-se-ia questionar se o que subsiste para o aluno seja a mensagem contida no diagrama de Venn, quando perguntado sobre o que é um número irracional. É de se criticar a ligeireza com que os conjuntos numéricos são tratados, e as poucas operações e problemas relacionados à ordem dos números reais, nas obras recentemente aprovadas. A criação de situações problema em que se dê um contexto significativo a diferenças entre dois números irracionais próximos (como $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{10}$) ainda está fora das preocupações dos autores (ver, por exemplo, SMOLE; DINIZ, 2013; SILVA, 2011).

Na Seção 2, discutimos situações problemas que ensejam ao estudante a conceito de aproximação e de processos infinitos, envolvendo a busca de raízes de equações polinomiais por métodos numéricos. Na Seção 3, reportamos resultados preliminares avaliando o conhecimento de alunos do Ensino Médio e dos anos finais do Ensino Fundamental acerca de números irracionais. Nas considerações finais, discutimos perspectivas e uma questão sobre o conhecimento de um grupo de licenciandos sobre operações aritméticas com números irracionais.

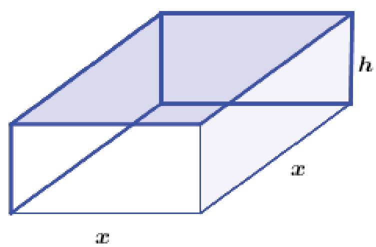
EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E O MÉTODO DO PONTO FIXO

As equações de grau superior a dois podem ocorrer em problemas de volume, como o enunciado abaixo ilustra, um problema (que consideramos) prático e interessante que, em geral, os livros didáticos do Ensino Médio não abordam, por requerer a determinação de raízes de equações polinomiais de grau três ou superior. Os livros que abordam equações polinomiais de grau maior que dois as trazem com coeficientes cuidadosamente escolhidos de modo que no máximo duas raízes sejam irracionais, no contexto da aplicação das relações de Girard.

Adaptamos uma situação problema encontrada em Carneiro (1999), que resulta na determinação da raiz positiva de uma equação de grau três como modelo matemático a ser resolvido.

Problema: "Imagine que seja necessário armazenar 3000 litros de água em um reservatório que possui a forma de um prisma regular de base quadrada (com tampa) (Figura 2). Admita que para a construção deste reservatório dispõe-se de $16m^2$ de certo material. A questão é determinar as dimensões do reservatório, dado que a aresta da base deve medir até $1m$." (CARNEIRO, 1999, p.31, adaptado).

FIGURA 2 – Reservatório do problema.



Fonte: a pesquisa.

Sejam x e h as medidas do lado da base e da altura do prisma, respectivamente, assim podemos escrever o volume como $V = x^2h$ e a área total $S = 2x^2 + 4xh$.

Substituindo os dados do problema nas fórmulas acima, e lembrando que 3000 litros equivalem a $3m^2$, tem-se: $V = x^2h \Rightarrow x^2h = 3$ e $S = 2x^2 + 4xh \Rightarrow x^2 + 2xh = 8$. Multiplicando-se a equação da área total por x e substituindo em seguida a igualdade obtida pela informação sobre o volume,

$$x^3 - 8x + 6$$

que é uma equação polinomial de grau 3. Procuramos uma solução positiva, mas menor que 1, desta equação.

Admitimos que, estritamente do ponto de vista algébrico, a existência de solução para esta equação não seria questão examinada com maior perplexidade pelos alunos do que a existência de solução para uma equação quadrática. Entretanto, como metodologia para a solução, há alguns conceitos agregados que a fórmula fechada para a solução de equações quadráticas não demonstra com clareza: a noção de aproximação, o processo iterativo (realização finita de uma recursão infinita) e até mesmo da continuidade. Ademais, o método do ponto fixo vem proporcionar o uso de recursos tecnológicos, recomendado pelos PCN, pois "[...] o que se propõe hoje é que o ensino de Matemática possa aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos" (BRASIL, 1998, p.46).

O método do ponto fixo, para funções reais, é um método numérico iterativo usado para determinar raízes de equações polinomiais ou transcendentes. Pode ser abordado no contexto do estudo de funções. Para utilizar o método, o estudante deverá fazer manipulações algébricas com equações, o que é condizente com o nível da Educação Básica.

Seja $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ uma função. Um ponto $a \in \mathbb{A}$ é chamado *ponto fixo* de φ se $\varphi(a) = a$.

O método do ponto fixo baseia-se em reescrever a equação $f(x) = 0$ fazendo uma manipulação algébrica, em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ que gera o seguinte procedimento iterativo: dada uma aproximação x_0 para a raiz, faz-se $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ para calcular uma nova aproximação, φ é chamada *função de iteração.* Os recursos tecnológicos que podem ser utilizados, como calculadora e softwares matemáticos, estão disponíveis nas escolas públicas.

Uma função de iteração, dada a equação $f = f(x) = 0$ é $\varphi(x) = \frac{6 + x^2}{8}$. A sequência gerada pelo método do ponto fixo pode ou não convergir. Diz-se que uma sequência é convergente em $\mathbb{A}$ quando existe um ponto $l \in \mathbb{A}$ tal que a distância $|x_n - l|$ se aproxima de zero tanto quanto se queira. A conclusão sobre a convergência de uma sequência deverá ser, no entanto, baseada no critério de Cauchy, visto de maneira informal. Uma sequência de Cauchy tem a propriedade de $|x_n - x_m|$ se aproximar de zero, tanto quanto se queira, para índices (no caso, iterados) suficientemente grandes.

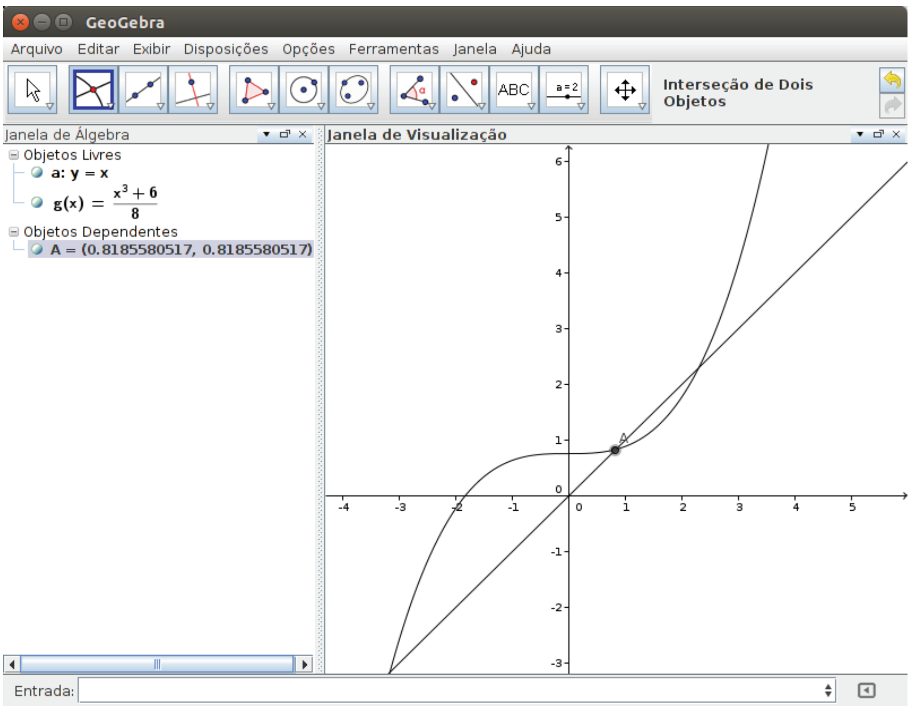
Usando a aproximação inicial $x_0 = 1$, obtém-se os primeiros 9 iterados: 0,87500; 0,83374; 0,82244; 0,81954; 0,81880; 0,81862; 0,81857; 0,81856; 0,81856. Das observações de um dos autores em disciplinas ofertadas para cursos de graduação, nunca ocorreu de um aluno duvidar de que esta sequência converge para um valor aproximadamente igual a 0,81856. Este é o uso *informal* do critério de Cauchy, que mencionamos acima. Para visualizar esta solução, pode-se ainda usar o software Geogebra, ver Figura 3.

O problema não se encerra na determinação de uma solução aproximada para o problema. No Geogebra, mostramos a solução com 10 casas decimais. Várias questões podem ser formuladas:

- A solução encontrada é exata?
- Podemos obter uma fração ordinária que represente o número 0,81856?[1]
- A solução pode ser escrita como uma razão de inteiros?

Com estas questões, pode-se conduzir ao problema de provar, também por redução ao absurdo, que a solução exata do problema original não é um número racional.

FIGURA 3 – As interseções da reta com o gráfico da função de iteração.



Fonte: a pesquisa.

Há aqui um interessante conflito de conceitos, que espelha a densidade dos racionais: apesar de a raiz da função $f = f(x)$ não ser racional, o método produz uma aproximação racional. Esta aproximação pode ser melhorada tanto quanto se queira, mas, em sendo racional, sempre será apenas uma aproximação. Por outro lado, haveria um sentido prático em se buscar a solução exata? Conclui-se, por meio desta dialética, que cada número irracional surge de uma abstração. Cumpre lembrar, no entanto, que se preserva

[1] O quociente 2258/3125 é a fração irredutível correspondente ao número cuja representação decimal é 0,81856.

a estrutura de ordem, e de corpo, mas estas propriedades vão requerer atividades de outra natureza para serem expostas.

O método do ponto fixo permite ainda uma ligação com o método dos babilônios para a determinação da raiz quadrada de um número. De fato, dado $a \in \mathbb{N}$, a função de iteração $\varphi(x) = 1/2(x + a/x)$ converge para $\sqrt{a}$.

NÚMEROS IRRACIONAIS EM SALA DE AULA

Considerando que a compreensão dos números racionais, em suas diversas facetas (KIEREN, 1976; BEHR et al., 1992; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; MOREIRA; DAVID, 2005), apresenta diversas limitações, e que nossa abordagem de números irracionais envolve uma relação destes com os números racionais, entendidos como aproximações, produzimos um conjunto de atividades para dimensionar quanto dos objetivos que as reflexões expostas até aqui poderia ser alcançado, veja também (CARVALHO; MOSCA, 2014).

Para diagnosticar o conhecimento dos nossos alunos sobre números racionais e irracionais desenvolvemos uma sequência de atividades, constituída de quatro etapas. O objetivo final é o de obter a demonstração formal da irracionalidade de um número, supondo que não seria comum uma demonstração por absurdo na Educação Básica. Acreditamos que as questões relativas à apresentação da demonstração formal de um certo resultado em matemática são importantes e devem ser introduzidas desde a Educação Básica . Acreditamos que o estudante pode perceber que a Matemática é um conjunto bem organizado de resultados, e que uma demonstração é a resposta a um 'por quê', o que também traz aproximações, no nosso ponto de vista entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, tais como referenciadas acima.

Participaram da atividade 23 alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública de Londrina, Paraná. Os alunos resolveram as atividades em grupos de 3 ou 2 estudantes. Para a elaboração das atividades, mantivemos em mente a demonstração clássica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (NIVEN, 1984, p.64), mas escolhemos outro número, a saber $\sqrt{34}$, porque os livros didáticos trazem a afirmação de que $\sqrt{2}$ é um número irracional e não gostaríamos que os alunos soubessem de antemão que o número investigado era, de fato, irracional.

As atividades foram aplicadas em nove aulas duplas, 90 minutos cada aula dupla, durante os meses de agosto e setembro de 2014. As aulas não foram sequenciais porque entre as aulas duplas havia aulas de apenas 45 minutos na grade de horários do colégio. Todas as aulas foram divididas em duas fases, durante 70 minutos iniciais os alunos resolveram sozinhos os problemas, sem interferência dos professores que aplicavam as questões. Então as folhas com as atividades eram recolhidas. Depois disto, as mesmas questões foram entregues e os exercícios resolvidos no quadro, de maneira dialogada com os alunos.

Os resultados que apresentamos a seguir são baseados nas folhas recolhidas ao final dos 70 minutos, sem considerar a intervenção dos professores. Primeiro apresentaremos as atividades e depois as considerações sobre as mesmas.

Atividade 1: Números Racionais

a) Observe os números a seguir:

$\frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{12}{24}, \frac{15}{21}, \frac{15}{21}, \frac{24}{64}, \frac{1}{5}, \frac{5}{7}, \frac{3}{6}, \frac{9}{8}, \frac{75}{105}, \frac{3}{24}, \frac{13}{26}, \frac{3}{15}$

b) Quais entre os números acima representam a quantidade $\frac{1}{2}$?

c) Quais entre os números acima representam a quantidade $\frac{3}{8}$?

d) Quais entre os números acima representam a quantidade $\frac{5}{7}$?

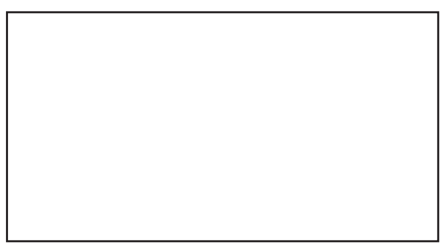
Existem quantidades diferentes representadas? Quais?

Sejam os números p e q pertencentes ao conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ A fração ordinária $\frac{p}{q}$ chama-se **irredutível** se p e q não têm fatores comuns, isto é, p e q **não são divisíveis por um mesmo número.**

Dentre os números fracionários acima, quais são irredutíveis?

Atividade 2: Diagonal de um retângulo

a) Considere o retângulo a seguir:



b) Se a altura desta figura é igual a 3cm e a largura é igual a 5cm, qual a medida da diagonal da figura?

c) Escreva uma equação matemática para obter a medida da diagonal.

d) O valor encontrado no item (b) satisfaz a equação acima? Explique sua resposta.

e) A que conjunto de números pertence a medida da diagonal do retângulo do item (a)?

Atividade 3: Decimais finitas e infinitas

a) Com o uso da calculadora, encontre o valor de $\sqrt{34}$ e anote. Em seguida, desligue a calculadora.

b) Esse número pode ser escrito na forma de uma fração ordinária. Se sim, qual?

c) Escreva o número obtido em (a) e com o uso da calculadora eleve-o ao quadrado. Compare a resposta com 34. O que aconteceu?

d) Como você faria para ter certeza matemática de que a medida da diagonal do retângulo é um número racional, ou não?

Atividade 4: Demonstração de que $\sqrt{34}$ é irracional

Suponha que $\sqrt{34} = \frac{p}{q}$, com $\frac{p}{q}$ irredutível. Então $34 = \frac{p^2}{q^2}$ e $34q^2 = p^2$. Segue que p é par, ou seja, $p = 2j$. Substituindo na equação, $34q^2 = 4j^2$. Dividindo ambos os membros por 2, concluímos que $17q^2 = 2j^2$ e isto finalmente implica que q também é par, contrariando o ponto de partida, quando assumimos $\frac{p}{q}$ irredutível.

Demonstre agora, modificando as passagens necessárias, que

a) $\sqrt{26}$ é número irracional b) $\sqrt{19}$ é número irracional

Um primeiro passo importante na demonstração da irracionalidade de um número, considerando-se a clássica demonstração por absurdo, é o conhecimento de que certas frações ordinárias são irredutíveis. Assim, o primeiro conjunto de questões, denominado 'Atividade 1**: Atividade sobre Números Racionais**' tratava de reconhecer frações equivalentes e frações irredutíveis. Acreditávamos que esta atividade seria resolvida de maneira rápida e sem maiores problemas, mas não foi o que aconteceu. Os alunos tiveram grande dificuldade para reconhecer a equivalências entre as frações, fato que nos surpreendeu, porque este tópico já é discutido desde o 7º ano e aparece corriqueiramente nos problemas elementares, por exemplo, quando simplificamos o resultado obtido num cálculo qualquer. A regra fundamental, de que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, para caracterizar frações equivalentes, não foi sequer lembrada por eles. Apenas consideravam equivalentes frações após a divisão do numerador e denominador por um mesmo número. As respostas dos alunos à atividade 1 sugere que, embora a apresentação de frações ordinárias ocorra já nos primeiros anos do Ensino Fundamental e que o estudo sobre o conjunto dos números racionais seja retomado de maneira mais sistemática durante o 7º ano, onde as questões operacionais são mais enfatizadas, houve muita dificuldade para os estudantes resolverem as questões. Desta amostra, 27% dos estudantes não responderam a nenhum item, deixando a folha de respostas em branco; 39% dos estudantes completaram satisfatoriamente a folha de respostas, relembrando o critério da "multiplicação em cruz" para determinar a equivalências entre duas frações ordinárias, sem contudo, nomear o critério que estava sendo utilizado (faziam a conta de maneira "automática"). Os demais 34% responderam parcialmente aos itens, sem muita compreensão do que faziam e de como faziam. Como os enunciados usam os números fracionários, como denominador e numerador inteiros, sem contextualização, pode ter sido um complicador referir-se a eles como *quantidades* (MOREIRA; FERREIRA, 2008).

O segundo conjunto de questões, **Atividade 2: Diagonal de um retângulo, tinha** como objetivo apresentar um número irracional, $\sqrt{34}$. Para obtermos este número, era necessário resolver a equação obtida em (c), utilizando o Teorema de Pitágoras, assunto que é abordado no 9º ano. Nesta segunda atividade, gostaríamos que os alunos chegassem a obter a medida da diagonal do retângulo, que neste caso era $\sqrt{34}$. Apenas 3 (o que representa 13%) dos alunos conseguiram se lembrar corretamente do Teorema de Pitágoras (embora o item (b) sugerisse a lembrança do mesmo, já que os alunos poderiam ter percebido que a figura chamava-se "retângulo" porque tem os quatro ângulos retos). Alguns alunos de um grupo ao lado dos que estavam utilizando o teorema ouviram o nome "teorema de Pitágoras" e tentaram utilizar o celular (o que não era permitido pelo colégio) para buscar na internet o enunciado do mesmo, para resolver o exercício. Houve uma dupla frustração: a internet não funcionava corretamente e não conseguiam ver relação entre o enunciado do teorema e o problema proposto. A última questão da atividade permite que observem que o número $\sqrt{34}$ não é racional, introduzindo, assim, o conhecimento da existência de números irracionais. Para os nossos propósitos, de introduzir o conjunto dos reais como por meio da geração de números por meio das operações elementares, é fundamental que esta existência estivesse assegurada anteriormente.

Atividade 3: Decimais finitas e infinitas, por sua vez, apresenta uma sequência de perguntas com as quais pretendíamos apontar aos alunos que a calculadora realiza sempre *aproximações*. Como a calculadora tem um conjunto finito de dígitos que podem ser mostrados, há diferença entre o quadrado do número anotado em (a) e o número 34. Além disto, a representação decimal infinita não periódica, que caracteriza os números irracionais e é apresentada em alguns livros didáticos como definição de irracionalidade, não poderia ser obtida, como discutimos anteriormente. Esta atividade foi realizada com grande número de acertos, os alunos conseguiram seguir os passos sugeridos e responder às perguntas, exceto o item (d), como esperávamos, já que a "certeza matemática" dependeria da demonstração formal (que eles desconheciam). Para além da necessidade da demonstração formal para, de fato, decidir a questão, houve a discussão do que seria esta necessidade. Lembrando a citação de Poincaré mencionada anteriormente, o sentido e a necessidade de uma demonstração formal no contexto da Educação Básica são tópicos muito pouco trabalhados nas salas de aula.

A última atividade, **Atividade 4: Demonstração de que $\sqrt{34}$ é irracional**, apresentou a demonstração da irracionalidade de um número, de maneira clássica. Mesmo avaliando que a reprodução "pura e simples" de uma demonstração não atesta que os alunos compreenderam os procedimentos utilizados, solicitamos que refizessem os argumentos, com os números $\sqrt{26}$ e $\sqrt{19}$, para analisar se haviam entendido os passos da demonstração. Apenas 3 alunos reproduziram a atividade, todos os outros deixaram a folha de respostas em branco. Entendemos que os alunos que participaram da atividade não conseguiram perceber sentido no que estávamos solicitando. Além disso, também não compreenderam o encadeamento lógico apresentado na demonstração, sendo incapazes de realizar a reprodução dos passos com as adaptações necessárias para a realização das propostas posteriores.

Em resumo, estas etapas deveriam ser rediscutidas em salas de aula do Ensino Médio ou 9º ano, para se ter uma perspectiva mais positiva.

Para balizar a compreensão do conceito de números irracionais em um grupo de potenciais futuros professores, perguntamos a um grupo de 20 licenciandos em Matemática: "Como você faria para ordenar os números "$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$" ? A questão procura ir além do reconhecimento de um número irracional igual à raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito, problema que pode ser encaminhado de forma geométrica como vimos acima, encaminhando a questão das operações aritméticas e da ordem nos números irracionais. As respostas variaram entre o uso das aproximações com uma ou mais casas decimais, o uso da álgebra (elevando-se ao quadrado os números e comparando os resultados), e finalmente uma construção geométrica – em ordem decrescente de frequência. A maioria dos estudantes se absteve de responder, o que interpretamos pela razão de esta não ser uma questão tradicional – a comparação entre números específicos – nos livros didáticos tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior.

FIGURA 4 – Exemplo de Resolução.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{6}$

Ordem crescente

$\sqrt{6}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Ordem decrescente

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{6}$

Observação

$\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$

$\sqrt{6} < 3$

$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$

Fonte: a pesquisa.

Na figura acima, mostramos um exemplo de resposta, em que se nota que nem todas as desigualdades estão justificadas. (Explicitamente: por que $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$? Teria sido usada a calculadora, ou alguma aproximação conhecida?)

Acreditamos que as propriedades de ordem e de corpo dos números reais merecem maior ênfase em situações-problemas, o que nos remete a futuras pesquisas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo discutimos um tema que consideramos importante na Matemática da Educação Básica, qual seja a problemática relacionada à definição (e conceituação) do conjunto dos números reais. Apontamos a circularidade envolvida na conceituação de número real: quando se indica que o conjunto dos números irracionais é o complemento no conjunto dos reais do conjunto dos números racionais e apresenta-se o conjunto dos reais como sendo a união dos conjuntos dos números irracionais e dos números racionais. Esta circularidade tem sido felizmente evitada nos livros didáticos mais recentemente publicados pelos editais do Programa Nacional do Livro Didático, entretanto ainda persiste em algumas referências (SILVA, 2014). Para evitar esta circularidade, apresentamos um caminho mais natural, no sentido de reforçar a extensão das operações aritméticas, como é feito ao se introduzir o conjunto dos números inteiros, e dos números racionais.

Discutimos a possibilidade de utilizar métodos numéricos para introduzir um número irracional, oriundo de um problema que avaliamos como possível de ser implementado na Educação Básica, uma vez que os conceitos necessários para a obtenção da solução são conhecidos e fazem parte da grade curricular do Ensino Médio. A ideia de aproximação tem sua importância destacada em situações como esta. Acreditamos que estes assuntos, seguindo a apresentação que fizemos, podem permitir um tratamento apropriado do tópico de números irracionais no Ensino Médio.

Um levantamento quantitativo e qualitativo sobre o conhecimento de alunos do Ensino Médio sobre a irracionalidade de $\sqrt{34}$ mostrou-nos que existem problemas também na aprendizagem dos números racionais. Houve uma percentagem baixa de acertos para questões que consideraríamos que os alunos não teriam dificuldade em resolver (estando no 1º ano do Ensino Médio) como as relacionadas à equivalência entre frações ordinárias (estudadas desde o 7º ano do Ensino Fundamental). Também esperávamos que os alunos relembrassem e aplicassem corretamente o Teorema de Pitágoras, por sua importância em tantas questões presentes na matemática cotidiana. Aparentemente, a compreensão de uma demonstração formal e seu papel no âmbito da matemática escolar também ficou aquém da expectativa.

Acreditamos que tais atividades representam uma preocupação que tem, entre seus objetivos, diminuir a distância entre as definições acadêmicas para os números reais e o trabalho escolar.

REFERÊNCIAS

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T. R.; LESH, R. Rational numbers, ratio and proportions. In: GROUWS, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* New York, Macmillan, p.296-333, 1992.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, 1998.

BRASIL. *Guia de Livros Didáticos PNLD 2015:* Matemática, Ensino Médio, MEC, Secretaria de Educação Básica, 2014.

CARNEIRO, J. P. Q. Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o Ensino Médio. *Revista do Professor de Matemática,* n.40, 2º Quadrimestre, 1999.

CARVALHO, T. O.; MOSCA, M. A. *Números Racionais*. In: CARVALHO, A. M. F. T. et al. (Orgs.). *A Educação Básica e as Oficinas de Física, Matemática e Química:* contribuições do Projeto Novos Talentos. Londrina: EDUEL, 2014. p.91-106.

COSTA, C. Considerações sobre Números Racionais na sala de aula. *Trabalho de conclusão de curso* (Licenciatura em Matemática). Não publicado. UNIOESTE, Campus de Foz do Iguaçu, 2008.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise I.* Rio de Janeiro: LTC, 1975.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, v.29, p.29-44, 1995.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). *Number and measurement:* Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p.101-144, 1976.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NIVEN, I. *Números Racionais e Irracionais.* Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades" do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Bolema,* Boletim de Educação Matemática. UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Ano 21, n.31, Rio Claro, p.79-102 , 2008.

ROBINET, J. Les Réels: quels modéles em ont les élèves? *Educational Mathematical Studies*, v.17, p.359-356, 1986.

SIERPINSKA, A. Some remarks on the understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics,* n.10, p.24-36, 1990.

SILVA, B. C. *Ensino Médio Matemática,* Livro 1. São José dos Campos: Poliedro, 2014.

SILVA, A.L.V. da. *Números Reais no Ensino Médio:* identificando e possibilitando imagens conceituais. Tese, Doutorado em Educação. PUC-Rio. 2011.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio,* vol. 1. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números Reais: concepção dos licenciandos e formação matemática na Licenciatura. *Zetetiké.* Campinas, v.7, n.12, jul./dez. 1999, p.95-117.

TALL, D. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In: GROUWS, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan, 1992. p.495-511.