

Equações de Navier-Stokes com Densidade Variável e Difusão de Massa em Domínios Finos

Marilaine de Fraga Sant'Ana

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática .

Palavras-chave

Equações Diferenciais Parciais não lineares.

Equações de Navier-Stokes.

Análise Funcional.

Abstract

In this work we analyze a simplified model for the Navier-Stokes equations governing the flow of an incompressible viscous fluid with variable density and mass diffusion. These equations are studied in thin three-dimensional domains under periodic boundary conditions. The behavior of the solutions of such equations is analyzed when the thickness of the domains tend to zero. It is shown that these solutions converge to corresponding solutions of a specific limit bidimensional problem whose associate equations we call reduced system. We also analyze the attractors of the system corresponding to thin three-dimensional domains and their relationshi with the attractor of the reduced system, by showing that a uppersemicontinuity property holds in a bounded attraction basin.

Resumo

Problemas envolvendo domínios finos se fazem presentes em várias situações físicas, tais como no estudo da dinâmica das marés, em vários aspectos da meteorologia, em questões relativas à lubrificação e outros; e, pela sua importância, têm merecido a atenção de muitos pesquisadores.

Do ponto de vista matemático, tal domínio pode ser caracterizado como se segue: fixado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, um domínio fino correspondente a Ω_ε é um conjunto da forma:

para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ com ε_0 um número positivo e g função de classe C^3 tal que:

O caso mais simples é aquele de domínios com espessura constante, isto é, aqueles que $\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$. Por simplicidade, este é o caso considerado neste trabalho.

Como foi dito acima, a importância do tema tem feito com que muitos autores o tenham estudado sob vários aspectos. Em particular, Hale e Raugel (1992) consideraram casos envolvendo domínios finos em problemas com equações de reação-difusão e equações hiperbólicas com amortecimento. Também Oliva (1995) estudou sistemas de reação-difusão em canais finos. Já Raugel e Sell (1989, 1992, 1993) estudaram as equações clássicas de Navier-Stokes em domínios finos em. Problemas relacionados também podem ser encontrados em Teman e Ziane (1996, 1997), Moise, Teman e Ziane (1997), Avrin (1996, 1999), Zhimin (1999) e Montgomery Smith (1999).

Observamos que a grande maioria das investigações sobre comportamentos de

fluidos em domínios finos tem sido realizada supondo que o fluido envolvido é governado pelas equações clássicas de Navier-Stokes, isto é, que o fluido é viscoso e incompressível, Newtoniano e de densidade constante. Entretanto há situações em que estas suposições não são adequadas e modelos mais completos de fluidos deveriam ser utilizados.

Uma situação deste tipo é aquela em que o fluido de interesse ainda pode ser considerado viscoso, incompressível e newtoniano, mas a densidade não pode mais ser assumida constante, como acontece por exemplo em vários casos de fluidos miscíveis. Outro fenômeno que pode ocorrer é aquele em que não é desprezível a difusão de massa. Nestes casos o escoamento do fluido é governado pelas chamadas equações de Navier-Stokes com difusão de massa e densidade variável que, num caso simplificado e com o campo de forças externas dado por unidade de volume ao invés de unidade de massa, é descrito pelo sistema abaixo:

$$\zeta \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U \right] - \mu \Delta U - \frac{\partial \zeta}{\partial t} (U \cdot \nabla) \nabla \zeta = (\nabla \zeta \cdot \nabla) U = \nabla P + F$$

em um domínio aberto limitado de Ω de fronteira regular com condições de contorno de Dirichlet para U e de Neuman para ζ , $\zeta|_{t=0} = \zeta_0$. ζ, U e P denotam respectivamente a densidade, a velocidade e a pressão do fluido. F é o campo de forças externas e μ é o coeficiente de difusão de massa.

A existência de solução deste problema foi provada por Beirão da Veiga em [...] no caso de domínios em geral, sem considerar domínios finos. Neste trabalho, o objetivo é investigar o comportamento da solução quando o parâmetro ε tende a zero, isto é, quando a espessura do domínio di-

minui a ponto de considerá-lo como uma placa bidimensional. Para tal é necessária também a análise de existência, visto que, devido às fortes não linearidades presentes nas equações, necessitamos de estimativas de energia de ordens mais altas e as estimativas obtidas por Beirão da Veiga são insuficientes.

Inicialmente, é feita a preparação do problema mediante uma mudança de variáveis conveniente que tira a dependência do parâmetro ε do domínio passando-o às equações. A seguir mostra-se a existência e unicidade de solução local para o problema, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Mediante algumas hipóteses

adicionais, mostra-se a existência de solução global no tempo.

Definimos as componentes vertical e horizontal da solução e mostramos que a componente vertical desta decresce à zero na ordem de $\epsilon^{1/2}$ quando o parâmetro também tende a zero, ou seja, de fato a solução do problema tende à solução do equivalente bidimensional quando a espessura do domínio diminui.

Finalmente, adaptamos os resultados obtido à linguagem de atratores, os quais são comparados mediante a noção de semicontinuidade superior. Iniciamos com a abordagem de problemas autônomos e, depois, abordamos o caso não autônomo utilizando a noção de skew product semiflow.

Referências

- AVRIN, J. D. Large-eigenvalue global existence and regularity results for the Navier-Stokes equation. *J. of Differential Equations*, 127, (1996), pp.365-390.
- AVRIN, J. D., A one-point attractor theory for the Navier-Stokes equation on thin domains with no-slip boundary conditions, *Proc. AMS*, vol. 127 no. 3, (1999), pp.725-735.
- BIAZUTTI, A. C. e CRIPPA, H. R. Atratores globais para sistemas dinâmicos em dimensão infinita, Minicurso, *Atas do 38º Seminário Brasileiro de Análise*, 1993.
- BEIRÃO DA VEIGA, H. Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions, *Annali Scu. Norm. Sup. Pisa*, vol. X, (1983), pp.341-355.
- BEIRÃO DA VEIGA, H. Long time behavior of the solutions to the Navier-Stokes equations with diffusion. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 27 no. 11, (1996), pp.1229-1239.
- CARVALHO, A. N. and RUAS-FILHO, J. G. Global attractors for parabolic problems in fractional power space, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 26 no. 2, (1995), pp.415-427.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics* vol. 19, AMS, 1998.
- FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations*. N.Y., Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- HALE, J. K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. *Mathematical Surveys and Monographs* no. 25, AMS, Providence, Rhode Island, 1988.
- HALE, J. K. and RAUGEL, G. A damped hyperbolic equation on thin domains. *Trans. AMS*, vol. 329 no. 1, (1992), pp.185-219.
- HALE, J. K. and RAUGEL, G. Reaction-diffusion equation on thin domains. *J. Math. Pures et Appl*, 71, (1992), p.33-95.
- KAZHIKOV, A. V. and SMAGULOV, Sh. The correctness of boundary-value problems in a diffusion model of an inhomogeneous liquid. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. 22 no. 5, (1977), pp.249-250.
- LADYZENSKAYA, O. A., SOLONNIKOV, V. A., Unique solvability of an initial and boundary value problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids. *Zap. Nauch. Sem. Leningrado Otdel Math. Inst. Steklov*, 52 (1975), 52-109, English. Transl. *J. Soviet Math.*, 9 (1978), 697-749.
- LAYDI, M. R. and LENCZNER, M. Equations de Navier-Stokes dans un domaine mince avec viscosité évanescence. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série I, (1998), pp.127-130.
- MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. and RAUGEL, G. Equations d'Euler dans une coque sphérique since. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 321, Série I, (1995), pp.1201-1206.
- MAURER, J. A genuinely multi-dimensional scheme for mixed hyperbolic-parabolic systems, *Proc. 7th Int. Conf.*, Zuerich, Switzerland, 1998. Vol.II, Basel: Birkhaeuser, ISNM, Int. Ser. Numer. Math. 130, (1999), pp 713-722.
- MOISE, I., TEMAN, R. e ZIANE, M. Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations in thin domains. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, J. of the Julius Schauder Center, vol. 10, (1997), pp.249-282.
- MONTGOMERY-SMITH, S. Global regularity the Navier-Stokes equation on thin three-dimensional domains with periodic boundary

- conditions. *Electronic J. of Differential Equations*, 1999 no. 11, (1999), pp.1-19.
- OLIVA, S. M. Reaction-diffusion systems on domains with thin channels. *J. of Differential Equations*, 123, (1995), pp.437-479.
- RAUGEL *Dynamics of Partial Differential Equations on Thin Domains*, Lecture Notes in Mathematics, 1609, (1995).
- RAUGEL, G. and SELL, G. Navier-Stokes equation on thin 3D domains I: global attractors and global Regularity of solutions. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 6 no. 3, (1993), pp.503-568.
- RAUGEL, G. and SELL, G. Navier-Stokes equation on thin 3D domain II: global regularity of spatially periodic solutions, *College de France Proceedings*, Pitman Res. Notes Math. Ser., Pitman, New York and London, (1992).
- RAUGEL, G. and SELL, G. Navier-Stokes equation on thin 3D domain III: global attractors. *IMA Proceedings on Dynamical Systems Approach to Turbulence*, (1992).
- RAUGEL, G. and SELL, G. Equations de Navier-Stokes dans des domaines minces en dimension trois: régularité globale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 309, Série I, (1989), pp.299-303.
- SECCHI, P. On the motion of viscous fluids in the presence of diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 19, no. 1, (1988), pp.22-31.
- TANABE, H. *Equations of Evolution*. London: Ed. Pitman Publishing Ltd., 1979.
- TEMAN, R. *Navier-Stokes Equation, Theory and Numerical Analysis*, Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland Publishing Company, 1979.
- TEMAN, R. *Navier-Stokes Equation and Nonlinear Functional Analysis*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1983.
- TEMAN, R. e ZIANE, M. Navier-Stokes equations in three-dimensional thin Domains with various boundary conditions. *Adv. Differential Equations 1*, (1996), pp.499-546.
- TEMAN, R. e ZIANE, M. Navier-Stokes Equations in thin spherical domains. *Contemporary Math.*, AMS, vol. 209, (1997), pp.281-314.
- ZHIMIN, C. Global solutions of the Navier-Stokes equations in thin three-dimensional domains. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 233 no. 2, (1999), pp.681-697.

NORMAS PARA PUBLICAÇÃO

1. MODALIDADES DE PUBLICAÇÃO

1.1 - artigos que expressem opiniões e posicionamentos acerca de questões atuais das Ciências Naturais e Exatas, cientificamente embasados.

1.2 - resenha crítica de obras relativas a essas áreas, resumo de teses, comunicações, documentos;

1.3 - matérias de divulgação da Universidade;

1.4 - matérias informativas sobre participação em eventos científicos e tecnológicos.

2. APRESENTAÇÃO DOS ORIGINAIS

2.1 - os artigos deverão ser apresentados em disquete, de preferência em Windows Write ou Windows Word, acompanhados de uma cópia impressa;

2.2 - o texto dos artigos deverá ter de 10 a 20 laudas; o texto de resenhas ou outra modalidade de comunicação não deverá ir além de 10 laudas;

2.3 - um resumo de seis(6) a dez(10) linhas, em língua portuguesa e em língua inglesa, deverá introduzir o artigo, juntamente com palavras-chave;

2.4 - a apresentação deverá conter: identificação, com título, subtítulo (se houver), nome(s) do(s) autor(es), maior titulação acadêmica, cargo atual e instituição em que exerce suas funções; telefones e endereços particular e profissional;

2.5 - citações, referências bibliográficas e notas de rodapé deverão seguir as normas da ABNT, ou, excepcionalmente, em casos devidamente justificados, de outro sistema de reconhecimento de valor científico;

2.6 - a estrutura do artigo será a de um trabalho científico, contendo partes tais como: introdução, desenvolvimento, material, métodos, resultado, discussão, conclusão, segundo as características específicas de cada matéria.

3. PUBLICAÇÃO

3.1 - os trabalhos remetidos para publicação serão submetidos à apreciação do Conselho Editorial ou de outros consultores por este designados, de acordo com as especificidades do tema. Em se tratando de material elaborado por aluno(s), o mesmo deverá estar visado por um professor da área;

3.2 - os autores serão comunicados, através de correspondência, da aceitação ou recusa de seus artigos. A Comissão Editorial não se responsabiliza pela devolução dos originais remetidos;

3.3 - havendo necessidade de alteração quanto ao conteúdo do texto, será sugerido ao autor que as faça e devolva no prazo estabelecido; adequação lingüística e copidescagem estão a cargo da Comissão Editorial;

3.4 - os autores receberão 2(dois) exemplares da revista, e 5 (cinco) reparatas.

3.5 - os trabalhos devem ser encaminhados para:

Prof. Dr. Arno Bayer, Editor

Revista Acta Scientiae

Universidade Luterana do Brasil

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Rua Miguel Tostes, 101 - Prédio 14, sala 218

92420-280 Canoas/RS - Brasil

e-mail: bayer@ulbra.br

ppgecim@ulbra.br

tel: 51-4779278

A melhor impressão do conhecimento



Editora da ULBRA

Educação dos Sentimentos

2ª EDIÇÃO

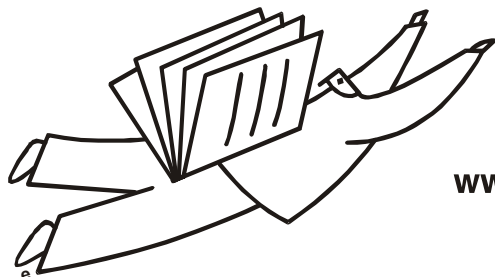
14x21cm - ISBN 85-205-0228-8 - 179 pág.

Jorge Thums



Depois de sabermos das órbitas planetárias, da lei da gravidade, depois de termos dividido o “indivisível” átomo, falta-nos agora é unir. Unir a nós mesmos através da comunhão entre a razão e o sentimento que até hoje irresponsavelmente descuidamos. E, recuperando esta força de orientação, aprendemos os nossos limites, assim como um novo sentido para a vida que se baseie em nós mesmos.

Educação dos Sentimentos chega com essa proposta. Tenta conosco buscar a saída para um mundo menos frio, menos feio, mais humano, onde o conhecimento jamais possa ser inútil e vazio, onde a maravilha da razão, só em tese, possa conceber algo como a bomba atômica.



www.editoradaulbra.com.br

Fone: (51) 477.9118 - Fax: (51) 477.9115

Rua Miguel Tostes, 101 - Prédio 29 - Sala 202 - Bairro São Luís - CEP: 92420-280 - Canoas/RS