Relação entre a família exponencial uniparamétrica e a desigualdade da informação

Relation between exponential family and a information inequality

Victor Coronel Aquino

RESUMO

O presente trabalho mostra que a estatística suficiente natural T da família exponencial uniparamétrica $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$, sobre determinadas condições, é um estimador não viciado de mínima variância de E(T) = $\Psi(\theta)$. Reciprocamente se T é um estimador não viciado de $\Psi(\theta)$ e atinge a cota inferior da desigualdade da informação, então T* é a estatística suficiente natural de uma família exponencial.*

Palavras-chave: estimadores e família exponencial.

ABSTRACT

This paper shows a natural sufficient statistic of the exponential uniparametric family, like a unbiesed minimu variance estimator, under conditions of regularity. Conversely if T is a unbiased estimator and it don't achieves the lower bound of the information inequality, than T* is a natural sufficient statistic of the exponential family.*

Key words: estimators and exponencial family.

1 Introdução

Estatísticas são usadas como estimadores de algum modelo paramétrico na necessidade de realizar alguma previsão de algum fenômeno em estudo, estes estimadores devem possuir algumas propriedades importantes tais como ser não tendenciosas e ser de variância mínima. O presente artigo mostra, que, quando a variância da estatística suficiente natural da família exponencial uniparamétrica atinge a cota inferior da desigualdade da informação, então T é um estimador não viciado de mínima variância para $E_\theta(T(X))$. Reciprocamente se T* é algum estimador não viciado de $\Psi(\theta)$ que atinge a cota inferior da desigualdade da informação então T* é estatisticamente suficiente natural de uma família exponencial.

Victor Coronel Aquino é Mestre em Matemática. Professor do Curso de Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA).

2 Preliminares

O resultado principal deste trabalho esta centrado no teorema (2.2) e para sua demonstração serão utilizados seguintes resultados:

I- Sejam X1 e X2 duas variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Então

$$Cov(X_1, X_2) \leq \sqrt{Var(X_1)Var(X_2)} \quad (1.1)$$

e a igualdade se verifica se e somente se X1 ou X2 é constante ou

$$X_1 - EX_1 = \frac{Cov(X_1, X_2)}{Var(X_2)}(X_2 - E(X_2)). \quad (1.2)$$

II- Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p(x, \theta)$ denota a função densidade do vetor aleatório X= (X_1, ...,X_n). Seja T* um estimador não viciado para Ψ(θ). Então verifica-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x, \theta)dx = 1$$

e

$$E(T^*(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} T^*(x)p(x, \theta)dx = \Psi(\theta).$$

Assuma-se que a família de distribuições $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$ satisfaz as hipóteses de regularidade seguintes:

1. O conjunto $A = \{x/p(x, \theta) > 0\}$ não depende de θ. Para todo x ∈A, e todo $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(x, \theta)$ existe e é finito.

2. Se T é qualquer estatística tal que $E_\theta|T| < \infty$ para todo, θ ∈ θ, então as operações de integração e diferenciação em relação a θ podem ser trocadas em $\int_{-\infty}^{\infty} T(x)p(x, \theta)dx$, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} T(x)p(x, \theta)dx\right) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x)\frac{\partial}{\partial\theta}p(x, \theta)dx \quad (1.3)$$

sempre que o lado direito de (1.3) seja finito.

III- Se a família $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$ satisfaz a primeira condição de regularidade então o número de informação de Fisher I(q) é definido por.

$$I(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(X, \theta)\right)^2 = Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(X, \theta)\right). \quad (1.4)$$

3 A desigualdade da Informação e a Família Exponencial

A seguir enuncia-se, sem prova, o teorema chamado desigualdade da informação que será utilizado na demonstração do teorema (2.2) abaixo.

Teorema 2.1 (Desigualdade da informação) Seja T(X) qualquer estatística tal que $Var_\theta(T(X)) < \infty$ para todo θ ∈ Θ. Denote E_θ(T(X)) por Ψ(θ). Suponha que a família $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$ satisfaz as condições de regularidade e que $0 < I(\theta) < \infty$. Então, para todo θ ∈ Θ, Ψ(θ) é diferenciável e

$$Var_\theta(T(X)) \geq \frac{[\Psi'(\theta)]^2}{I(\theta)}. \quad (2.1)$$

Teorema 2.2 Suponha que a família $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$ satisfaz as condições de regularidade e que existe um estimador não viciado T* de Ψ(θ) cuja variância alcança a cota inferior da desigualdade de Cramér-Rao, para todo θ ∈ Θ (ver equação2.1). Então, $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$ é uma família exponencial uniparamétrica com função de densidade ou massa de probabilidade da forma

$$p(x, \theta) = \{exp[c(\theta)T^*(x) + d(\theta) + S(x)]\}\, I_A(x). \quad (2.2)$$

Reciprocamente, se $\{P_\theta / \theta \in \Theta\}$ é uma família exponencial uniparamétrica e c(θ) possui derivada contínua diferente de zero sobre Θ, $Var_\theta(T(X))$ então atinge a cota inferior da desigualdade da informação e T(X) é um estimador não viciado uniformemente de mínima variância de Ψ(θ) = E_θ(T(X)).

Demonstração - Provar-se á primeira sentença, a condição necessária. Das hipóteses de regularidade segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} p(x,\theta)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\theta}p(x,\theta)dx \quad (2.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} T^*(x)p(x,\theta)dx = \int_{\mathbb{R}^n} T^*(x)\frac{\partial}{\partial\theta}p(x,\theta)dx = \Psi'(\theta). \quad (2.4)$$

Multiplicando e dividindo o integrando das equações (2.3) e (2.4) por p(x, θ) e usando ainda o fato que

$$\frac{1}{p(x,\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}p(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x,\theta)$$

segue-se que

$$E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right) = 0 \quad (2.5)$$

$$\Psi'(\theta) = E\left(T^*(X)\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right). \quad (2.6)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} Cov(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta), T^*(X)) &= E(T^*(X)\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)) \\ &\quad -E(T^*(X))E(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)) \\ &= E(T^*(X)\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)) \\ &= \Psi'(\theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por hipótese

$$Var(T^*(X)) = \frac{[\Psi'(\theta)]^2}{I(\theta)},$$

ou seja

$$Var(T^*(X))I(\theta) = [\Psi'(\theta)]^2. \quad (2.8)$$

Substituindo o resultado (2.8) na equação (2.7) e usando-se a definição (1.4) tem-se que

$$Cov(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta), T^*(X)) = \sqrt{Var(T^*(X))Var(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta))}.$$

Aplicando agora a equação (1.2) às variáveis aleatórias $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)$ e $T^*(X)$ segue-se que existem funções $a_1(\theta)$ e $a_2(\theta)$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\, ln\ p(X,\theta) = a_1(\theta)T^*(X) + a_2(\theta)$$

com P_θ-probabilidade 1, para cada θ ∈ Θ. Ou seja, $P_\theta\{X \in A\} = 1$ para todo θ, onde

$$A = \{x/\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x,\theta) = a_1(\theta)T^*(X) + a_2(\theta), \text{para todo } \theta \in \Theta\}.$$

Logo, integrando esta última expressão em relação a θ tem-se (2.2) com $c(\theta) = \int a_1(\theta)d\theta$ e $d(\theta) = \int a_1(\theta)d\theta$.

Reciprocamente, dado que $\{P_\theta\}$ é uma família exponencial uniparamétrica, então $p(x,\theta) = \{exp[c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)]\}I_A(x)$.

Desta expressão segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x,\theta) = c'(\theta)T(x) + d'(\theta). \quad (2.9)$$

Aplicando-se esperança á igualdade 2.9 e sabendo-se que vale a expressão (2.5) e que $c'(\theta) \neq 0$ tem-se

$$\Psi(\theta) = E(T(X)) = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}. \quad (2.10)$$

Aplicando-se variância à igualdade (2.9) e lembrando-se a definição (1.4) tem-se

$$Var(T(X)) = \frac{I(\theta)}{[c'(\theta)]^2}. \quad (2.11)$$

Como por hipótese $Var(T(X)) = \frac{[\Psi'_\theta(\theta)]^2}{I(\theta)}$, então o teorema ficará demonstrado provando-se que

$$\frac{I(\theta)}{[c'(\theta)]^2} = \frac{[\Psi'_\theta(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

ou seja,

$$I(\theta)^2 = [c'(\theta)\Psi'(\theta)]^2$$

Ora, das relações (2.6), (2.9) e (2.10) segue-se que

$$E[(T(X))^2] = \frac{c'(\theta)\Psi'(\theta)}{[c'(\theta)]^2} \quad (2.12)$$

agora, substituindo as relações (2.10), (2.11) e (2.12) na conhecida fórmula da variância

$$Var(T) = E(T^2) - [E(T)]^2$$

obtém-se $I(\theta) = c'(\theta)\Psi\text{э}(\theta)$ e isto completa a prova.

Referências

Peter J. Bickel and Kjell A. Doksum (1993), Mathematical Statistics, holden-Day, Inc. San Francisco.

V. K. Rohatgi (1975), Probability theory and mathematical Statistics, John Willey and Sons. New York.

Parzen, E. (1960), Modern Probabily Theory and Aplications, John Willey and Sons. New York.