Retas e planos no R^3: um experimento de ensino utilizando recurso computacional

Maria de Fátima dos Santos Monteiro Lemke
Monica Karrer

RESUMO

Este artigo apresenta um estudo sobre Retas e Planos no R^3, conteúdos desenvolvidos na disciplina de Geometria Analítica de cursos superiores da área de Ciências Exatas. A pesquisa consistiu na elaboração, aplicação e análise de um experimento de ensino sobre esta temática, sendo as atividades construídas de maneira a explorar as relações entre representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural, tendo o *software Cabri* 3D como ferramenta de apoio nas conversões com gráficos. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval e utilizou a metodologia de *Design Experiment* para balizar a construção e a condução do experimento. Participaram do estudo seis sujeitos voluntários do curso de Engenharia de uma instituição privada de ensino do estado de São Paulo. Das cinco atividades que compuseram o experimento, foram selecionadas duas para apresentação neste artigo. Os resultados dessa aplicação revelaram que os estudantes conseguiram relacionar seus conhecimentos prévios sobre vetores para analisar as posições relativas entre duas retas ou entre dois planos, estabelecendo satisfatoriamente relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural, apesar de ainda apresentarem dificuldades em tratamentos no registro algébrico. O *software* selecionado permitiu a análise simultânea de representações dos registros gráfico e algébrico e representou um ambiente propício para experimentação e elaboração de conjecturas.

Palavras-chave: Retas e Planos no R^3. Registros de Representações Semióticas. *Cabri 3D*. *Design Experiment*.

Lines and Planes in R^3: A Teaching Experiment Using Computational Resource

ABSTRACT

This article presents a study of Lines and Planes in R^3, content developed in the discipline of Analytical Geometry of higher education courses in the area of exact sciences. The research consisted of the development, implementation and analysis of a teaching experiment on this subject, with activities constructed to explore the relationships among algebraic, graphical and

Maria de Fátima dos Santos Monteiro Lemke é Mestre, professora universitária. Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos (ETEP), Unidade Esplanada, Departamento de Engenharia. Endereço para correspondência: Alameda Cândido Marciano Leite, 105, apto. 43, Vila Betania, São José dos Campos, São Paulo, CEP 12246486. E-mail: maria.lemke@etep.edu.br

Monica Karrer é Doutora, professora universitária e pesquisadora. Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), Unidade Marte. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Centro Universitário da FEI. Endereço para correspondência: Avenida Imperador Pedro II, 1343, apto. 52, Bairro Nova Petrópolis, São Bernardo do Campo, São Paulo, CEP 09770420. E-mail: mkarrer@uol.com.br

Acta Scientiae	Canoas	v. 14	n.1	p.8-26	jan./abr. 2012

natural language registers, using the *software Cabri* 3D as a tool to support the conversion with graphics. The study was based on Duval's theory of semiotic representations registers and used the Design Experiment methodology to construct and to conduct the experiment. The research included six students volunteer of Engineering course at a private university in the state of São Paulo. Considering the five activities that made up the experiment, two were selected for presentation in this article. The results of this application revealed that students were able to relate their prior knowledge about vectors to analyze the relative positions between two lines or between two plans, establishing satisfactory relationships among graphic, algebraic and natural language registers, despite the persistence of difficulties in treatment between algebraic representations. The selected *software* allowed the simultaneous analysis of graphic and algebraic representations and was an enabling environment for experimentation and development of conjectures.

Keywords: Lines and Planes in R^3. Semiotic Representation Registers. *Cabri 3D*. Design Experiment.

INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta os resultados da aplicação de duas das cinco atividades que compuseram um experimento de ensino sobre Retas e Planos no R^3, desenvolvidas nos ambientes papel & lápis e *Cabri* 3D e elaboradas de forma a explorar as relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural.

A Geometria Analítica é uma disciplina que compõe o currículo de diversos cursos da área de Ciências Exatas do ensino superior e requer do estudante a habilidade de estabelecer relações principalmente entre representações dos registros algébrico e gráfico. Ela é normalmente desenvolvida no primeiro ciclo desses cursos e, de acordo com levantamento realizado por Celestino (2000), apresenta alto nível de retenção.

Dificuldades em Geometria Analítica e Álgebra Linear por parte de estudantes foram constatadas por diversos pesquisadores, tais como Pavlopoulou (1993), Castro (2001) e Karrer (2006). Dentre elas, destacam-se problemas no trabalho com o registro gráfico e diferenças de desempenho no duplo sentido de conversão. Ainda, Karrer e Barreiro (2009), por meio da análise de livros didáticos de Geometria Analítica frequentemente referenciados nos cursos de exatas do país, verificaram a reduzida exploração de representações do registro gráfico e de conversões envolvendo este tipo de registro nas obras analisadas.

Partindo dessas evidências e tendo por premissa que um trabalho enfatizando as relações entre as representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural, vinculado ao uso de um *software* de geometria dinâmica 3D, pudesse minimizar as dificuldades evidenciadas na literatura dessa área, foi elaborado e avaliado um experimento de ensino que procurou integrar esses elementos.

Sendo assim, a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2000, 2006) fundamentou esse estudo e o *software Cabri* 3D, por permitir uma visão interativa e simultânea entre representações dos registros algébrico e gráfico no conteúdo de retas e planos no R^3, foi selecionado como ferramenta de apoio, uma vez que se mostrou compatível às indicações da fundamentação teórica selecionada.

O experimento de ensino foi elaborado com base na metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003), e o estudo objetivou identificar em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre Retas e Planos no R^3 influenciaria os estudantes na construção e na compreensão destes conceitos. Partiu-se da hipótese de que o experimento favoreceria a percepção das características dos objetos matemáticos na especificidade do registro utilizado, a determinação de relações entre representações de diversos registros desse conteúdo e o estabelecimento de análises partindo do registro gráfico. Como as atividades foram concebidas de forma a integrar o *software Cabri 3D* em um trabalho de elaboração de conjecturas e validações experimentais, esperava-se que o estudante desenvolvesse compreensões distintas das comumente obtidas nas intervenções tradicionais de ensino desse conteúdo.

Na seção seguinte, apresenta-se uma breve descrição da fundamentação teórica e de literaturas científicas que embasaram a construção dessa pesquisa.

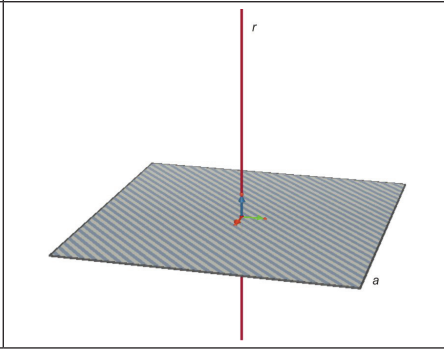
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Dado que o presente estudo procurou desenvolver um trabalho integrado entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural, os pressupostos teóricos referentes aos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2000, 2006) o fundamentaram.

Este pesquisador afirma que a Matemática tem uma especificidade em relação às outras ciências, uma vez que, enquanto na Física e na Biologia, por exemplo, é possível acessar um objeto por meio de instrumentos, na Matemática este acesso só é admissível utilizando um sistema de representação semiótica, dada a natureza não real dos objetos matemáticos.

Diante disso, Duval defende um modelo diferenciado para o estudo do processo de ensino e aprendizagem matemática, denominado modelo cognitivo. Nele, o autor define registro de representação semiótica como um sistema que permite três atividades cognitivas, denominadas formação, tratamento e conversão. Como exemplos de registros de representações semióticas tem-se os registros algébrico, gráfico, da língua natural e figural. Na atividade de formação de representações em determinado registro semiótico, objetiva-se exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real. Já as atividades cognitivas de tratamento e conversão estão relacionadas às transformações entre representações. Enquanto no tratamento essas transformações ocorrem no interior de um mesmo registro, na conversão elas envolvem mudanças de registros. Por exemplo, no conteúdo de retas e planos no R^3, apresenta-se, na Figura 1, situações de conversões do registro algébrico para o gráfico.

FIGURA 1 – Exemplo da atividade de conversão.

Representação no registro algébrico	Representação no registro gráfico
Equação da reta r: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ Equação do plano α: $z=0$	

Fonte: Dados dos autores.

Com relação à atividade cognitiva de conversão, o autor alerta para a existência de dois fenômenos relativos à análise da não congruência e da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão. Segundo Duval (2006), a existência de congruência entre duas representações de registros distintos implica no cumprimento de três condições: a correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Caso uma dessas condições não seja verificada, a conversão é classificada como não congruente. No Quadro 1, apresenta-se um exemplo do próprio autor que ilustra a análise de congruência entre duas representações de diferentes registros.

QUADRO 1 – Exemplo de análise da congruência da atividade de conversão.

Tipo de conversão	Sistema ou registro da escrita natural	Sistema simbólico-algébrico
Conversão congruente	Conjunto de pontos com ordenada maior que abscissa	y>x
Conversão não congruente	Conjunto de pontos cujas ordenadas e abscissas têm o mesmo sinal	x.y>0

Fonte: Duval, 2000, p.63.[1]

Já a questão da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão refere-se ao fato de que é possível existir uma conversão que seja congruente em um sentido e não congruente em outro e, consequentemente, o grau de dificuldade e o desempenho dos estudantes nem sempre são equivalentes nos dois sentidos de conversão.

Tanto esse pesquisador como outros autores que fundamentaram seus estudos na teoria dos registros de representações semióticas, tais como Pavlopoulou (1993) e Sierpinska, Dreyfus e Hillel (1999), apresentaram resultados que comprovaram

[1] Traduzido do original em inglês.

a dificuldade dos estudantes em conversões não congruentes e suas diferentes performances nos dois sentidos de conversão. Desta forma, Duval (1995) enfatiza que o ensino de Matemática não considera estes dois fenômenos, principalmente o da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão, normalmente concebendo que, se um estudante é capaz de resolver uma tarefa em um sentido de conversão, isso é suficiente para capacitá-lo a resolver o mesmo problema no sentido contrário.

Quanto à funcionalidade e discursividade dos registros, Duval (2006) os classificou em monofuncional discursivo, monofuncional não discursivo, multifuncional discursivo e multifuncional não discursivo. Em oposição aos multifuncionais, os registros monofuncionais são aqueles cujas representações admitem um tratamento algoritmizável. Já os discursivos são aqueles que permitem o discurso. Nestas condições, pode-se classificar o registro algébrico em monofuncional discursivo, o gráfico em monofuncional não discursivo, a língua natural em multifuncional discursivo e o figural em multifuncional não discursivo.

Segundo Duval (2006), principalmente nos níveis superiores de ensino, os registros monofuncionais discursivos são os privilegiados, fato constatado no estudo de Karrer e Barreiro (2009) com relação à análise de livros de Geometria Analítica, o qual apontou um predomínio do registro algébrico em detrimento dos demais, sendo o gráfico o de menor exploração.

Levando em consideração que o estudo vetorial de retas e planos foi realizado no R^3 e que a codificação de um objeto 3D em um desenho plano acarreta inevitavelmente em perda de informações, ressalta-se o estudo de Parzizs (1988) na questão relativa ao conflito entre o polo do visto e o polo do sabido. Esse autor relata que, no polo do visto, o sujeito representa um objeto somente com base no que vê e, no polo do sabido, ele tem condições de identificar as propriedades relativas ao objeto matemático em questão.

No contexto de aplicação da tecnologia no ensino de Matemática, são destacados diversos autores, dentre eles Noss e Hoyles (1996), Borba e Penteado (2010) e Ramal (2002), que defendem o uso de recursos computacionais como um direito do estudante, de maneira a permitir ganhos pedagógicos e explorações que não seriam possíveis em outros ambientes. Neste contexto, o *software Cabri* 3D permite explorações diferenciadas do objeto matemático, tanto pelo seu dinamismo quanto pelo fato de permitir uma visão simultânea das relações entre representações de diferentes registros.

Considerando que a disciplina de Geometria Analítica requer o estabelecimento de relações entre os registros algébrico e gráfico, que estudos relacionados a esta disciplina apontaram as dificuldades dos estudantes principalmente nas conversões com gráficos, que livros didáticos dessa disciplina normalmente privilegiam os registros monofuncionais discursivos e que um trabalho envolvendo um *software* de geometria dinâmica poderia trazer ganhos pedagógicos, justifica-se a importância desse estudo, o qual representa uma alternativa às práticas já existentes neste domínio, visando minimizar as dificuldades dos estudantes detectadas na revisão de literatura.

A metodologia adotada, bem como a descrição dos sujeitos, do material e do ambiente no qual o experimento foi desenvolvido são apresentados na próxima seção.

METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO

A metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) está relacionada com a elaboração de experimentos de domínios específicos, visando fornecer inovações no ensino de Matemática. O sujeito de pesquisa é considerado como um elemento fundamental do processo, uma vez que, neste tipo de metodologia, investiga-se sua trajetória na construção do conhecimento. Uma conjectura inicial é realizada com base nas evidências detectadas nas pesquisas científicas da área, porém, o experimento é adaptável às produções dos indivíduos, o que pode gerar a elaboração de novas conjecturas que são posteriormente testadas. Desta forma, o processo é iterativo, cíclico e deve ter como característica a flexibilidade para mudanças durante o processo.

Dentre os diferentes tipos de manifestações existentes neste tipo de metodologia, o presente estudo selecionou o modelo de aplicação em pequena escala, ou seja, o que envolve um grupo reduzido de estudantes, visando a uma análise mais minuciosa dos dados. Além disso, o pesquisador assumiu o duplo papel de pesquisador e professor, modalidade também presente neste tipo de metodologia. Neste contexto, o professor-pesquisador atuou como orientador do processo, estabelecendo intervenções apenas nos momentos de bloqueio. Ainda, ele foi responsável por identificar as alterações necessárias que deveriam ser realizadas durante o processo.

Participaram do estudo seis voluntários com faixa etária entre dezoito e vinte e um anos, que no momento da aplicação do experimento cursavam o primeiro ano de Engenharia de uma Instituição Particular de Ensino Superior do Estado de São Paulo. Na ocasião, eles já haviam tido contato com o conteúdo de vetores na disciplina de Geometria Analítica, mas não com o de retas e planos. Desta forma, antes de iniciar o experimento, o professor-pesquisador apresentou uma breve introdução ao estudo de retas e planos no R^3 e, neste contexto, foram evidenciados apenas os tipos de equações de uma reta (dados um ponto conhecido e um vetor diretor dessa reta) e a equação geral de um plano (sendo conhecidos um ponto desse plano e um vetor normal a ele). As posições relativas entre duas retas, entre reta e plano e entre dois planos não foram detalhadas neste momento, uma vez que se pretendia que estas questões fossem construídas pelos estudantes durante o experimento, com o auxílio do ambiente *Cabri* 3D.

As atividades foram realizadas em duplas, visando à interação entre os estudantes na construção do conhecimento e, neste texto, estas duplas serão identificadas por D1, D2 e D3. A pesquisa ocorreu em uma sala de aula, sendo que cada dupla contou com um *laptop* com o *software Cabri* 3D instalado. Como elementos de análise, foram coletados, avaliados e comparados os registros escritos presentes nas fichas das atividades distribuídas a cada dupla, a audiogravação das falas dos estudantes e a captura das telas dos computadores. Na próxima seção, são apresentadas a descrição e a análise das atividades selecionadas para este artigo.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

São apresentadas, a seguir, duas atividades que compuseram o experimento de ensino. A cada atividade do experimento, eram realizadas experimentações no ambiente computacional, visando a uma exploração gráfica aliada ao trabalho algébrico. Pretendia-se que os estudantes utilizassem seus conhecimentos prévios sobre vetores para, neste ambiente, identificar as condições necessárias para analisar as posições relativas entre duas retas ou entre dois planos. Em seguida, os estudantes deveriam realizar a análise dessas posições partindo do registro algébrico de retas e planos, justificando, na língua natural, suas conclusões. Com isso, houve a preocupação de explorar registros mono e multifuncionais, discursivos e não discursivos. A primeira atividade tratou da análise das posições relativas entre duas retas, explorando relações entre os registros gráfico e algébrico, conforme descrito no Quadro 2.

QUADRO 2 – Atividade relativa à análise das posições relativas entre duas retas.

Tarefa a. Considerando o sistema de coordenadas cartesianas $S = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, crie representantes de dois vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, com origem em (0,0,0), extremidade no plano de referência da tela e com direções diferentes. Em seguida, crie dois pontos distintos quaisquer P_1 e P_2 e duas retas r e s, sendo r a reta que passa por P_1 e que tem $\vec{V}_1$ comovetor diretor e s a reta que passa por P_2 e tem $\vec{V}_2$ como vetor diretor.

Tarefa b. Utilizando a teoria de vetores, como você mostraria no Cabri que as retas são coplanares concorrentes?

Tarefa c. Em relação ao sistema de coordenadas cartesianas $S = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, são dadas as retas r e s, de equações: $r: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -3 + 3t_1 \\ z = -2t_1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 3 + t_2 \\ y = 5 + 5t_2 \\ z = -2 \end{cases}$ $(\text{com } t_1 \text{ e } t_2 \in R)$. Mostre, no papel, que as retas são coplanares concorrentes. Em seguida, determine o ponto de intersecção entre elas.

Tarefa d. Que manipulação no Cabri você poderia fazer para que as retas se tornem reversas? Após esta manipulação, solicite as equações das retas.

Tarefa e. Que manipulação no Cabri você poderia fazer para que as retas se tornem paralelas? Após esta manipulação, observe as equações dessas retas.

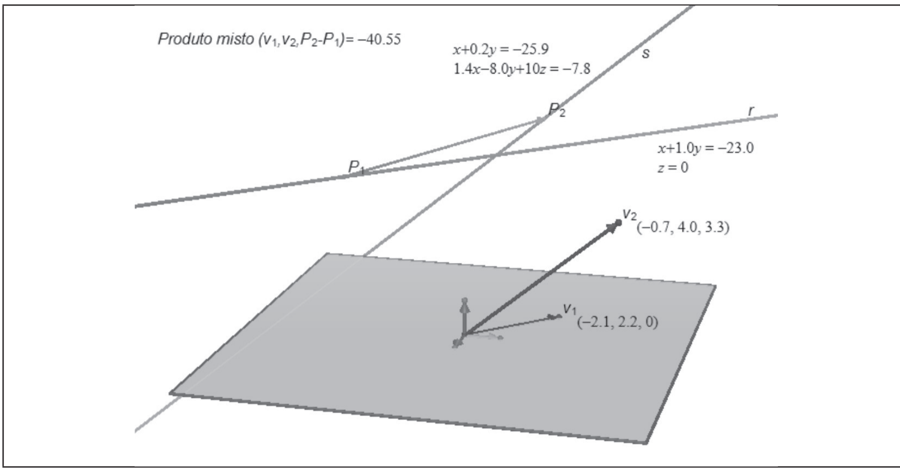
Tarefa f. Em relação ao sistema de coordenadas cartesianas $S = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, são dadas as retas r e s, de equações: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-2}$ e $s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-1}{1}$.

Analise a posição relativa entre elas.

Fonte: Lemke, 2011, p.87.

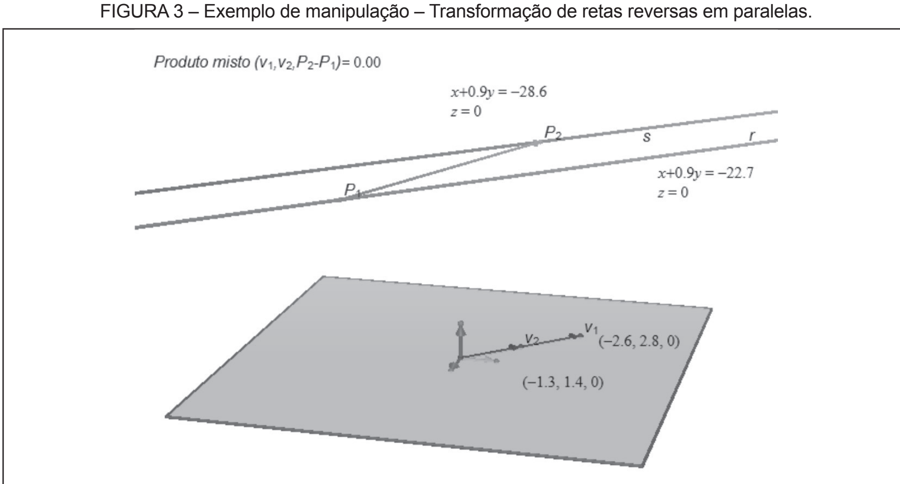
Salienta-se que no *software* é possível determinar o produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, (P_2 - P_1))$, as coordenadas dos vetores envolvidos e as equações das retas. Ainda, é possível transformar, via manipulação, retas coplanares em reversas e concorrentes em paralelas. Dado o aspecto dinâmico da ferramenta computacional adotada, ao realizar qualquer transformação deste tipo, automaticamente as coordenadas dos vetores, o resultado do produto misto e as equações das retas se adaptam à manipulação realizada, favorecendo, assim, a atividade de conversão entre representações dos registros algébrico e gráfico, conforme ilustrado nas figuras 2, 3 e 4.

FIGURA 2 – Exemplo de construção de retas reversas.



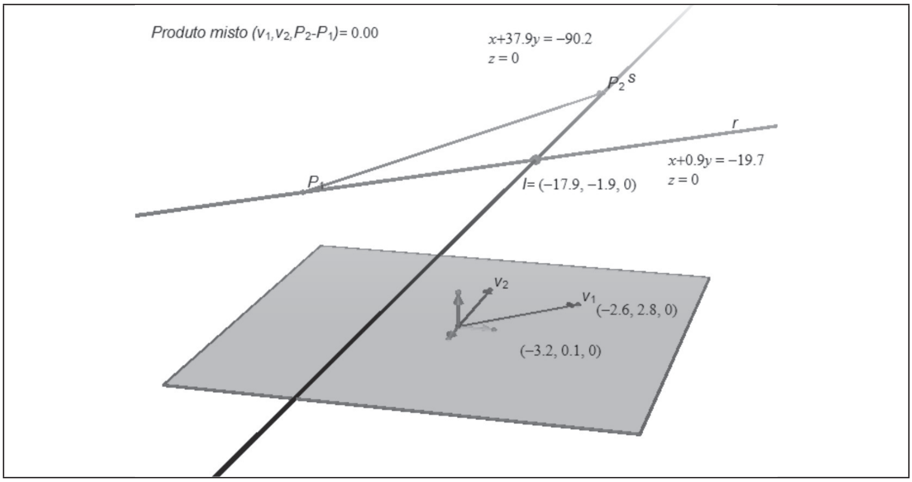
Fonte: Dados dos autores.

FIGURA 3 – Exemplo de manipulação – Transformação de retas reversas em paralelas.



Fonte: Dados dos autores.

FIGURA 4 – Exemplo de manipulação – Transformação de retas paralelas em concorrentes.



Fonte: Dados dos autores.

Pretendia-se, com essas atividades, investigar se os sujeitos conseguiriam justificar suas conjecturas experimentais no *Cabri* 3D a respeito das posições relativas entre duas retas, utilizando seus conhecimentos prévios sobre vetores. Salienta-se que, no momento de resolução desta atividade, as duplas já haviam se familiarizado com os comandos do *software* e com a análise da coplanaridade de três vetores e do paralelismo e da ortogonalidade de dois vetores nesse ambiente.

Com relação à produção dos estudantes nesta atividade, foi observado que as duplas D1 e D2 fizeram a construção proposta no item "a" sem dificuldades. A dupla D3 não apresentou dificuldades na manipulação do *software*, mas não observou a solicitação da construção de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ com extremidades no plano de referência.

A dupla D1 analisou a concorrência das retas utilizando primeiramente o comando do *software* relativo ao ponto de intersecção. Apesar de essa resolução garantir a coplanaridade das retas, como foi solicitado o uso da teoria de vetores para justificar que as retas eram coplanares concorrentes, essa dupla procurou avaliar a situação utilizando seus conhecimentos prévios de vetores. Observou-se que D1 se utilizou da análise do produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, (P_2 - P_1))$, verificando que ele era nulo. Ainda, ela foi além do solicitado, avaliando também se as retas eram perpendiculares, conforme diálogo apresentado no Quadro 3.

QUADRO 3 – Diálogo dos alunos da dupla D1.

Aluno A: "*... se existe o ponto de intersecção, então são coplanares e concorrentes*."
Aluno B: "*...podíamos ter mostrado isto através do produto misto, vamos fazer isto?*"
Aluno A: "*...produto misto igual a zero, realmente são coplanares, elas são perpendiculares?*"
Aluno B: "*Não sei, como a gente verifica isto? Pelo produto escalar?*"
Aluno A: *"...Isto, deu diferente de zero, então não são perpendiculares*."

Fonte: Dados dos autores.

Tal diálogo indica que a ferramenta adotada favoreceu o estabelecimento de relações entre representações dos registros algébrico e gráfico, culminando em uma produção satisfatória na língua natural escrita.

A dupla D2, apesar de determinar o ponto de intersecção entre as retas, apresentou dificuldades na análise da concorrência, uma vez que um dos membros da dupla compreendia que se duas retas fossem concorrentes, necessariamente o ângulo formado entre elas seria de 90°. Isso desestabilizou o outro parceiro e, diante disso, foi necessária uma intervenção do professor-pesquisador, o qual solicitou que a dupla relatasse como definiria retas concorrentes. Um dos alunos explanou que retas concorrentes eram aquelas que possuíam um ponto de intersecção e, com isso, imediatamente notou o equívoco cometido. O outro parceiro da dupla relatou ainda que "*as retas concorrentes podem ter ângulo de 90°*", apontando que o ângulo reto não é condição necessária para a existência da concorrência. Da mesma forma que D1, essa dupla também determinou o produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, (P_2 - P_1))$ e concluiu que, pelo fato de o resultado ser nulo, as retas eram coplanares.

A dupla D3 utilizou outra estratégia de resolução, ou seja, procurou analisar a coplanaridade das duas retas no próprio registro gráfico no ambiente computacional, limitado-se inicialmente a tratamentos neste registro. Para isso, tentou construir, no *Cabri 3D*, um plano contendo as duas retas, mas viu que não era possível. Como ela não observou que o enunciado solicitava que as extremidades dos representantes dos vetores construídos deveriam pertencer ao plano de referência, ela acabou por construir um representante com extremidade fora desse plano e, consequentemente, as retas estabelecidas eram reversas. Desta forma, os estudantes da dupla recorreram a outro tipo de registro, efetuando o cálculo do produto misto e observando que este era diferente de zero. A partir desta análise, sem qualquer interferência do professor-pesquisador, eles recomeçaram a construção de acordo com o solicitado no enunciado, apresentando sucesso na resolução. Foi possível constatar que nenhuma dupla se preocupou em avaliar a inexistência de proporcionalidade entre as coordenadas dos vetores diretores para garantir a concorrência. É provável que isso tenha ocorrido por influência do registro gráfico visualizado na tela ou, no caso de D1, por já ter determinado inicialmente o ponto de intersecção.

Na tarefa *c*, todas as duplas procuraram avaliar a coplanaridade entre as retas pelo cálculo de produto misto. Apesar disso, apenas D1 e D3 obtiveram sucesso nessa parte da resolução. A dupla D2 não conseguiu determinar (B-A), sendo B um ponto da reta *s* e A um ponto da reta *r*. Na análise da concorrência, a dupla D1 estabeleceu uma confusão com a análise de perpendicularidade entre retas. Nesta fase, observou-se a necessidade de um trabalho mais efetivo no registro algébrico com as duplas D1 e D2, o que foi realizado pelo professor-pesquisador. Já D3 apresentou uma produção de qualidade, evidenciando grande habilidade na coordenação dos registros.

Nas tarefas *d* e *e*, os estudantes não demonstraram dificuldades. Além das duplas apresentarem habilidade com os comandos do *software*, elas demonstraram um bom domínio na articulação das representações. Na tarefa *d* elas redefiniram a extremidade do representante de um dos vetores para fora do plano de referência do *software*, obtendo retas reversas. Neste caso, elas observaram, no próprio *software*, que o resultado do produto misto calculado nas tarefas anteriores se tornava diferente de zero. Tal fato aponta como a concepção da atividade, aliada ao uso da ferramenta computacional, favoreceu a investigação e a análise das relações entre representações de diferentes registros. Na tarefa *e*, as duplas redefiniram a extremidade do representante de um vetor sobre o outro, observando que as retas se tornavam paralelas e que o produto misto voltava a ser nulo. O diálogo estabelecido pela D3 na questão das retas paralelas é apresentado no Quadro 4.

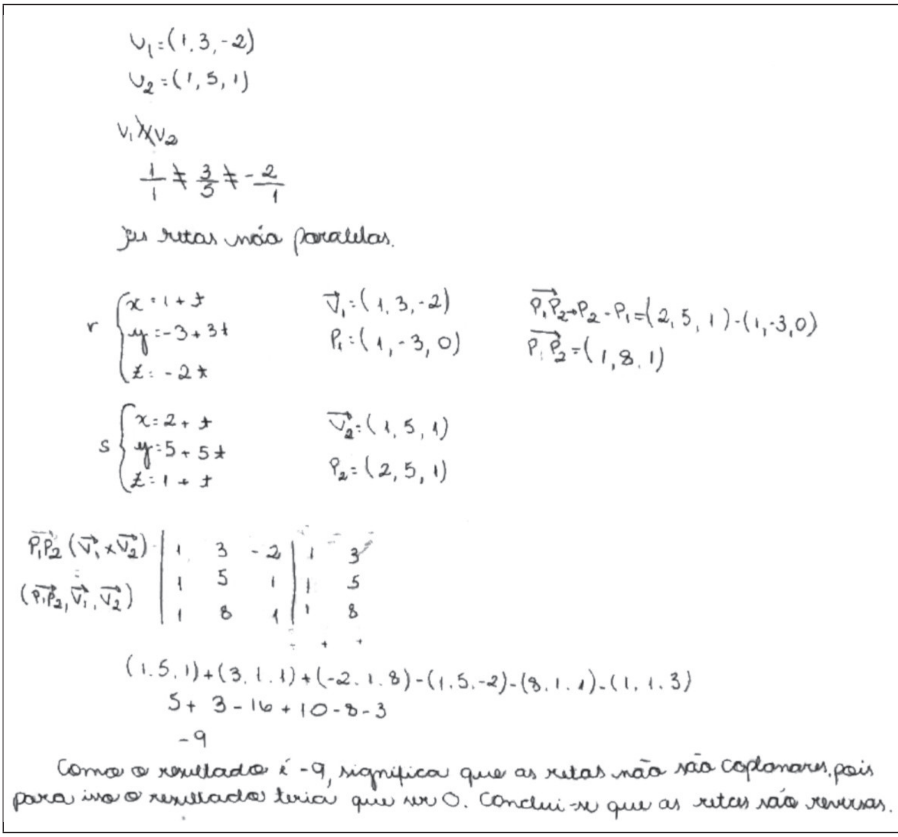
QUADRO 4 – Diálogo dos alunos E e F.

Aluno E: *"...existem duas possibilidades, as retas podem ser paralelas distintas ou paralelas concidentes"*.
Aluno F: *"para fazer com que elas se tornem paralelas, basta fazer com que os dois vetores tenham a mesma direção, é só 'clicar' na extremidade de um vetor e levá-lo até o outro, assim teremos duas retas paralelas"*.

Fonte: Dados dos autores.

Somente D1 notou que, no caso das equações das retas paralelas presentes na tela, os vetores diretores eram iguais. Dessa forma, observou-se que nem sempre as duplas relacionavam espontaneamente representações de registros distintos. Na tarefa *f*, todas as duplas utilizaram como estratégia para a análise da coplanaridade dos vetores o cálculo do produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, (P_2 - P_1))$, sendo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de *r* e *s*, respectivamente, P_1 um ponto de *r* e P_2 um ponto de *s*. Como o resultado obtido era diferente de zero, todas as duplas concluíram que as retas eram reversas. Constatou-se, então, que o trabalho no *software* permitiu a análise experimental no registro gráfico, favorecendo a posterior análise no registro algébrico. As duplas D1 e D2 cometeram pequenos equívocos de cálculo, os quais foram discutidos e sanados durante a execução do experimento. A produção de D3 é apresentada na Figura 5.

FIGURA 5 – Resolução da dupla 3 na tarefa f.



$v_1=(1,3,-2)$

$v_2=(1,5,1)$

$v_1 \nparallel v_2$

$\frac{1}{1} \neq \frac{3}{5} \neq -\frac{2}{1}$

As retas não paralelas.

$r\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+3t \\ z=-2t \end{cases}$ $\vec{v_1}=(1,3,-2)$ $P_1=(1,-3,0)$ $\overrightarrow{P_1P_2}=P_2-P_1=(2,5,1)-(1,-3,0)$ $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,8,1)$

$s\begin{cases} x=2+t \\ y=5+5t \\ z=1+t \end{cases}$ $\vec{v_2}=(1,5,1)$ $P_2=(2,5,1)$

$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v_1}\times\vec{v_2}) = (\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v_1},\vec{v_2})$ $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right|$

$(1.5.1)+(3.1.1)+(-2.1.8)-(1.5.-2)-(8.1.1)-(1.1.3)$

$5+3-16+10-8-3$

-9

Como o resultado é -9, significa que as retas não são coplanares, pois para isso o resultado teria que ser 0. Conclui-se que as retas são reversas.

Fonte: Dados dos autores.

Outra atividade também proposta nos ambientes *Cabri* 3D e papel & lápis objetivou explorar as posições relativas entre dois planos e, no caso de planos secantes, a determinação da intersecção entre eles, conforme apresentado no Quadro 5.

QUADRO 5 – Atividades sobre posições relativas entre dois planos.

Tarefa a. Construa, em relação ao sistema de coordenadas cartesianas $S = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, os representantes de dois vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\vec{n}_2$ $\overrightarrow{n_2}$não paralelos e com origem em O, sendo $\overrightarrow{n_1}$ com extremidade no plano de referência e $\overrightarrow{n_2}$ com extremidade fora desse plano. Em seguida, construa dois planos α e β, sendo α perpendicular a $\overrightarrow{n_1}$ passando por um ponto P_1 e β perpendicular a $\overrightarrow{n_2}$ passando por um ponto P_2. Utilize o comando "Esconder/Mostrar" para esconder o plano de referência e mude a cor do plano α. Na atividade com retas você pôde observar que quando duas retas são concorrentes, existe um ponto de intersecção entre elas. E com dois planos secantes? O que representa graficamente a intersecção entre eles?

Tarefa b. Utilizando o comando "Curva de intersecção" do *software*, determine graficamente a intersecção entre esses planos. Comente.

Tarefa c. Em relação ao sistema de coordenadas cartesianas $S = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, são dadas as equações dos planos secantes α e β:

α: x+2y-z=0

β: 2x+3y-z=0

Determine, no papel, a equação da reta intersecção desses dois planos.

Tarefa d. Redefinindo o representante do vetor $\overrightarrow{n_2}$, de forma que ele fique paralelo ao vetor $\overrightarrow{n_1}$, o que ocorre com os planos? O que ocorre na tela com a reta intersecção? Solicite as equações dos planos no *Cabri*. Manipule os representantes dos vetores e observe o que ocorre com as equações. Escreva suas conclusões.

Tarefa e. Partindo das tarefas anteriores, descreva a condição entre os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ para que os planos sejam:

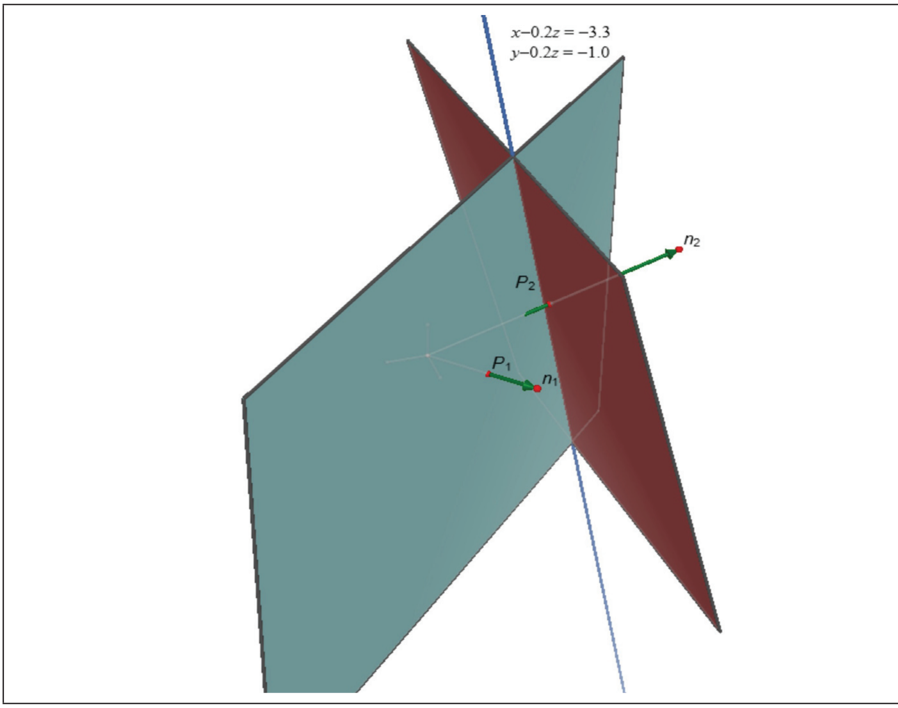
Secantes

Paralelos

Fonte: Lemke, 2011, p.161 e 162.

Seguindo as etapas solicitadas nas tarefas *a* e *b*, esperava-se do estudante uma construção semelhante à apresentada na Figura 6, sendo possível manipular as extremidades dos vetores para estudar as posições relativas entre os dois planos. Novamente as tarefas foram concebidas de forma integrar registros mono e multifuncionais, discursivos e não discursivos.

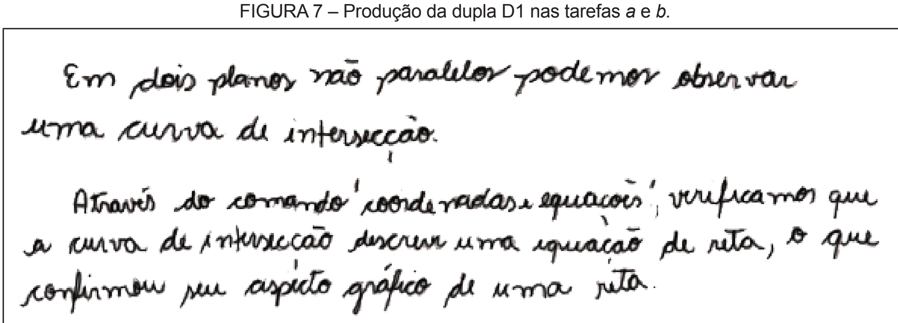
FIGURA 6 – Construção de planos secantes e determinação da reta intersecção.



Fonte: Dados dos autores.

As duplas realizaram sem dificuldades a construção solicitada na tarefa *a*. As duplas D1 e D3 conjecturaram, com base no registro gráfico, que a intersecção entre dois planos secantes era uma reta, porém, sentiram a necessidade de confirmar isso determinando, por meio do comando do *software*, a equação da curva de intersecção, conforme ilustrado na Figura 7.

FIGURA 7 – Produção da dupla D1 nas tarefas *a* e *b*.


Em dois planos não paralelos podemos observar uma curva de intersecção.

Através do comando 'coordenadas e equações', verificamos que a curva de intersecção descreve uma equação de reta, o que confirmou seu aspecto gráfico de uma reta.

Fonte: Dados dos autores.

Observa-se que as duplas não se prenderam apenas ao aspecto visual, ou seja, procuraram estabelecer uma relação entre os registros gráfico e algébrico para relatar que a intersecção era uma reta. Tal fato demonstra uma maturidade de análise, o que, segundo Parzysz (1988), reflete uma resolução no polo do sabido. Ainda, essa situação, de acordo com Duval (1995), mostra a importância do trabalho integrado entre representações de registros distintos para a compreensão de um objeto matemático.

Na tarefa *c*, D1 e D3 compreenderam que, para resolver o sistema, poderiam isolar uma das variáveis, substituindo-a na outra equação, porém, é possível observar que a produção fornecida requer mais tratamentos no registro algébrico, conforme ilustrado pela produção de D1, presente na Figura 8.

FIGURA 8 – Produção da dupla D1 na tarefa c.

$$\alpha: z = x + 2y$$

$$\beta: 2x + 3y - (x + 2y) = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

$$r: \begin{cases} z = x + 2y \\ x + y = 0 \end{cases}$$

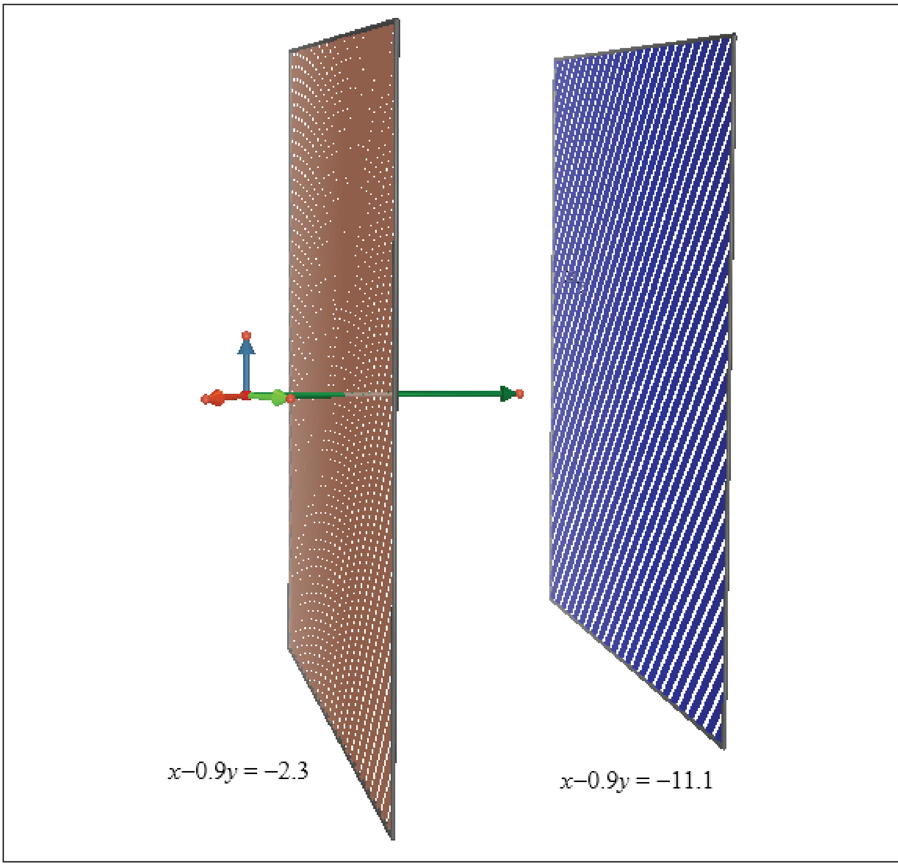
Fonte: Dados dos autores.

A dupla D2 apresentou uma produção com problemas conceituais, ou seja, efetuou $x+2y-z=2x+3y-z$, obtendo, por tratamentos neste registro, a resposta $x+y=0$. As dificuldades desses estudantes neste tipo de tarefa apontaram para a necessidade de um *redesign*, conforme previsto na metodologia de *Design Experiment*, ou seja, um trabalho mais efetivo com as equações reduzidas de retas e com as equações gerais de planos seria vital, uma vez que essas foram introduzidas brevemente antes da aplicação do experimento e não foram suficientes para sustentar este tipo de situação.

Na tarefa *d*, as duplas não apresentaram dificuldades. Todas redefiniram a extremidade do representante do vetor $\vec{n}_2$, tornando-o alinhado com o representante do vetor $\vec{n}_1$ e, consequentemente, obtiveram planos paralelos.

Os estudantes puderam observar que a equação da reta intersecção, antes presente na tela, "desaparecia" com a manipulação realizada e que as equações simplificadas dos planos paralelos diferenciavam-se apenas no valor do termo independente, conforme apresentado na Figura 9.

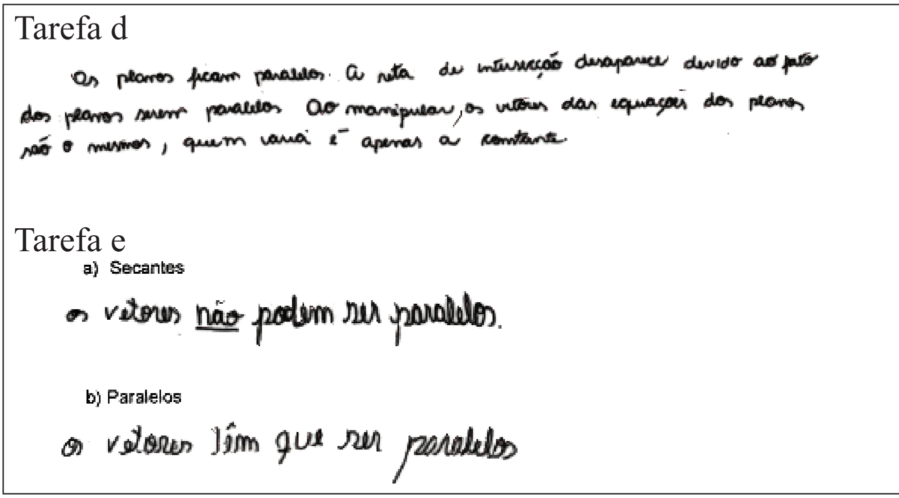
FIGURA 9 – Manipulação realizada no *Cabri* para a obtenção de planos paralelos.



Fonte: Dados dos autores.

As produções escritas das três duplas com relação às tarefas *d* e *e* foram satisfatórias e semelhantes e, desta forma, a título de ilustração, apresenta-se a produção fornecida por D2 na Figura 10.

FIGURA 10 – Produção da dupla D2 nas tarefas *d* e *e*.


Tarefa d

Os planos ficam paralelos. A reta de intersecção desaparece devido aos pontos dos planos serem paralelos. Ao manipular, os vetores das equações dos planos são os mesmos, quem varia é apenas a constante.

Tarefa e

a) Secantes

os vetores não podem ser paralelos.

b) Paralelos

os vetores têm que ser paralelos

Fonte: Dados dos autores.

Avaliando as produções escritas, constatou-se que os estudantes determinaram, de forma satisfatória, as condições vetoriais para dois planos serem secantes ou para serem paralelos. Inicialmente D2 apresentou dificuldade na resolução desta tarefa, demandando um tempo maior que as outras para sua execução, realizando uma análise exclusivamente gráfica, restrita apenas ao aspecto visual. Somente houve um avanço em suas conclusões quando os estudantes da dupla buscaram estabelecer relações com representações do registro algébrico, o que novamente denota, em consonância com Duval (1995), a importância de um trabalho de integração de representações de diferentes registros e da exploração da atividade de conversão.

Destaca-se a importância da utilização do *software*, que permitiu avaliar o objeto matemático por meio da relação entre representações dos registros algébrico e gráfico, favorecendo a atividade de conversão, levando os estudantes à elaboração e avaliação de conjecturas. A seguir, apresenta-se a conclusão desse estudo.

CONCLUSÃO

Partindo da análise da aplicação dessas duas atividades, pôde-se constatar que elas favoreceram a investigação das posições relativas entre duas retas e entre dois planos. Para isso, os estudantes partiram de seus conhecimentos prévios sobre vetores e puderam, utilizando como ferramenta o ambiente computacional *Cabri* 3D, elaborar conjecturas a partir da análise dinâmica das relações entre representações dos registros algébrico e gráfico. A abordagem adotada permitiu uma entrada gráfica como meio inicial de construção dos conceitos, trazendo explorações que não seriam possíveis no ambiente papel & lápis. Apesar disso, foram observadas dificuldades nas atividades propostas no registro algébrico no ambiente papel & lápis, o que mostrou aos pesquisadores a necessidade de um *redesign*, a fim de garantir um contato inicial mais efetivo com as equações de retas e de planos antes de se propor a análise das posições relativas entre duas retas ou entre dois planos.

A utilização da ferramenta computacional representou um diferencial para a aprendizagem desses conceitos, tendo em vista que, além da visualização, favoreceu a realização de investigações não propostas nas tarefas, permitindo a independência e a autonomia dos estudantes para a busca de soluções. Seu aspecto dinâmico favoreceu a visualização simultânea e em tempo real das relações entre representações dos registros gráfico e algébrico de reta e planos, beneficiando a atividade de conversão e proporcionando um contato diferenciado com esses objetos matemáticos. Espera-se que este tipo de abordagem possa contribuir para o ensino de Geometria Analítica, representando um material adicional para ser incorporado às práticas de ensino dessa disciplina.

REFERÊNCIAS

BORBA, M.; PENTEADO, M. *Informática e Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. 4.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

CASTRO, S. C. *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação.* 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

CELESTINO, M. R. *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:* as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

COBB, P. et al. Design experiments in education research. *Educational Researcher*, Washington, v.32, n.1, p.9-13, 2003.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lang, 1995.

______. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Hiroshima. *Proceedings...*. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 2000, p.55-69.

______. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, n.61, p.103-131, 2006.

KARRER, M. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria*: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KARRER, M.; BARREIRO, S. N. Introdução ao estudo de vetores: uma análise de dois livros didáticos sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 4., 2009, Ouro Preto. *Anais....* Ouro Preto: UFOP, 2009. p.484-507.

LEMKE, M. F. S. M. *Retas e planos na Geometria Analítica Espacial*: uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de um *software* de geometria

dinâmica. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.
NOSS, R.; HOYLES, C. *Windows on Mathematical Meanings*: learning cultures and computers. Dordrecht: Kluwer, 1996.
PARZYSZ, B. "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representantion of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, v.1, n.19, p.79-92,1988.
PAVLOPOULOU, K. Un problème décisive pour l´apprentissage de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation. *Annales...* France, n.5, p.67-93, 1993.
RAMAL, A. C. *Educação na cibercultura*: hipertextualidade, leitura, escrita e aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2002.
SIERPINSKA, A.; DREYFUS, T.; HILLEL, J. Evaluation of a design: linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, France, v.19, n.1, p.9-39, 1999.

Recebido em: dez. 2011 **Aceito em:** mar. 2012