Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning

Ceneida Fernández
Salvador Llinares
Julia Valls

RESUMEN

Esta investigación presenta un estudio cuyo objetivo es identificar aspectos que apoyan el desarrollo de la mirada profesional en estudiantes para profesores de matemáticas en un contexto b-learning. Analizamos las producciones de un grupo de estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria (documentos escritos y participaciones en un debate on-line) cuando analizaban el razonamiento proporcional de estudiantes de educación secundaria. Los resultados indican que la interacción en el debate en línea permitió a algunos estudiantes para profesor mejorar su capacidad de identificar e interpretar aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Estos resultados indican que el desarrollo de "una mirada profesional" del profesor es un proceso complicado pero que la posibilidad de construir un discurso progresivo en línea es un factor importante para su desarrollo.

Palabras clave: Observar con sentido. Razonamiento proporcional. Formación de profesores. Interacción en línea. b-learning.

Characteristics of the development of professional vision from mathematics teacher students in b-learning context

ABSTRACT

The focus of this research is to identify aspects that support pre-service mathematics teachers professional noticing in a b-learning context. We analyzed pre-service secondary school mathematics teachers' productions (written reports and participations in an on-line debate) when they analyzed the secondary students' proportional reasoning. Results show that interactions in the on-line debate improve some pre-service mathematics teachers' ability to identify and interpret important aspects of secondary school students' mathematical thinking. These results also show that the development of pre-service mathematics teachers' professional noticing is a complex process. However, the possibility to build a progressive discourse in an on-line debate is a relevant aspect to the development of the professional noticing.

Keywords: Professional noticing. Proportional reasoning. Pre-service mathematics teacher education. On-line interaction. b-learning.

Ceneida Fernández é professora Doutora do Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España. Endereço para correspondência: Carretera de San Vicente, s/n. 03080-San Vicente del Raspeig. Alicante, España. E-mail: ceneida.fernandez@ua.es
Salvador Llinares é professor Doutor do Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España. Endereço para correspondencia: Carretera de San Vicente, s/n. 03080-San Vicente del Raspeig. Alicante, España. E-mail:sllinares@ua.es
Julia Valls é professora Doutora do Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España. Endereço para correspondência: Carretera de San Vicente, s/n. 03080 – San Vicente del Raspeig. Alicante, España. E-mail: julia.valls@ua.es

"MIRAR CON SENTIDO" COMO UN ASPECTO DE LA COMPETENCIA DOCENTE DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Recientemente las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia de la competencia docente denominada "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes (JACOBS; FRANKE; CARPENTER; LEVI; BATTEY, 2007; JACOBS; LAMB; PHILLIPP, 2010; KERSTING; GIVVIN; SOTELO; STIGLER, 2010; LEVIN; HAMMER; COFFEY, 2009) y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (ALSAWAIE; ALGHAZO, 2010; LIN, 2005; LLINARES; VALLS, 2010; VAN ES; SHERIN, 2002). La competencia docente "mirar con sentido" (MASON, 2002) permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Van Es y Sherin (2002) caracterizan la competencia docente "mirar con sentido" considerando tres destrezas: *identificar* los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; *usar* el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y realizar *conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir cómo responder (decisiones de acción) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

Las investigaciones en este ámbito pretenden determinar en qué medida los profesores tienen en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes en su interpretación de las situaciones de enseñanza de las matemáticas (PRIETO; VALLS, 2010). En este contexto, un dominio particular de interés se centra en caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes en dominios específicos. Uno de estos dominios lo constituye el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la relación entre la aritmética y el algebra y la relación entre el pensamiento aditivo y multiplicativo (HAREL; CONFREY, 1994) que integran nuevos significados como la idea de covariación entre cantidades en el contexto específico del desarrollo del razonamiento proporcional (DE BOCK; VAN DOOREN; JANSSENS; VERSCHAFFEL, 2007; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2011; FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2008; MODESTOU; GAGATSIS, 2007).

“MIRANDO CON SENTIDO” EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LA RAZÓN Y PROPORCIÓN

Durante los últimos años los investigadores en Didáctica de la Matemática han aportado conocimiento relevante sobre el pensamiento matemático de los estudiantes y sobre las características del desarrollo del razonamiento proporcional. Los resultados de estas investigaciones han puesto de manifiesto diferentes características de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas de proporcionalidad (MISAILIDOU; WILLIAMS, 2003; TOURNIAIRE; PULOS, 1985). Por ejemplo, ante el problema “*En una frutería 5 kilos de patatas cuestan 2 €. Si quieres comprar 8 kilos, ¿Cuánto tendrás que pagar*?”, algunas de las estrategias que los estudiantes pueden utilizar para resolverlo son:

- Enfoque funcional. Uso de la razón externa, el uso de la relación 2€ es a 5 kg, por tanto, 8 kilos de patatas costarán 8 × 2/5.
- Enfoque escalar. Uso de la razón interna. En este caso, el uso de la relación 8 es a 5, por tanto, 8 kilos de patatas costarán 2 × 8/5.
- Reducción a la unidad (caso particular del enfoque funcional). Los estudiantes buscan la razón unitaria. En el problema anterior, un kilo de patatas cuesta 0.4 €/kg (la constante de proporcionalidad).
- Enfoque constructivo. Uso de la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$. En el problema anterior, si 5 kg. valen 2 €, 3 kg. valen 1’2 € (obteniendo el precio de 1 Kg que es 0.4€) y por tanto 5kg.+3kg. valen 2€+1’2€.

Los estudiantes también pueden emplear el algoritmo de la regla de tres, pero el uso de este algoritmo puede estar fundamentado más en lo procedimental que en lo conceptual.

Además investigaciones recientes han mostrado que algunos estudiantes utilizan la proporcionalidad en situaciones no adecuadas poniendo de manifiesto que no son capaces de discriminar las situaciones proporcionales de las no proporcionales (FERNÁNDEZ; LLINARES, 2011; MODESTOU; GAGATSIS, 2010; VAN DOOREN; DE BOCK; HESSELS; JANSSENS; VERSCHAFFEL, 2005).

En este contexto y debido a la importancia que tiene que el profesor apoye sus interpretaciones de las situaciones de enseñanza y sus decisiones de acción en su conocimiento del pensamiento matemático de los estudiantes, el desarrollo de la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes es un aspecto clave en el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas. Así, aprender a dotar de sentido la manera en la que los estudiantes de educación secundaria resuelven los problemas proporcionales y no proporcionales puede llegar a capacitar al profesor para poder tomar mejores decisiones en la enseñanza. En este contexto, un aspecto especializado de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes se pone de manifiesto cuando los profesores deben responder a los procedimientos escritos de los estudiantes. Por ejemplo, cuando interpretan las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas proporcionales y no proporcionales en relación al desarrollo del razonamiento proporcional.

EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE “MIRAR CON SENTIDO” DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La conceptualización de la competencia docente “mirar con sentido” como identificar, interpretar y tomar decisiones de acción en la enseñanza ha permitido realizar investigaciones que apoyan la hipótesis de que bajo ciertas condiciones esta competencia puede ser aprendida. La manera en la que las tres destrezas interrelacionadas que conforman esta competencia (identificar, interpretar y tomar decisiones de acción) se configura en el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor puede aportar información sobre el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas (PENALVA; REY; LLINARES, 2011; PRIETO; VALLS, 2010). Las investigaciones previas realizadas en contextos de formación de profesores (ALSAWAIE; ALGHAZO, 2010; LLINARES; VALLS, 2010; SANTAGATA; ZANNONI; STIGLER, 2007) indican que

- las características de las tareas presentadas y la naturaleza de las interacciones entre los estudiantes para profesor determinan los focos de atención sobre la enseñanza de las matemáticas,
- los diferentes tópicos sobre los que se centra la atención condicionan la manera en la que los estudiantes para profesor interpretan los hechos (es decir, la forma en que vinculan las evidencias a las ideas teóricas), y
- el desarrollo de un discurso profesional se vincula al papel de referentes desempeñado por la información teórica relativa a Didáctica de la Matemática (“scalfodding”).

Desde estos resultados, y para caracterizar el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”, una cuestión importante que se plantea es la relación entre la interacción de los estudiantes para profesor y el desarrollo de esta competencia docente. En particular, considerando la interacción mediada por la tecnología en un contexto b-learning en el que las actividades presenciales se mezclan con las actividades en línea.

Además, en un contexto b-learning otra cuestión importante hace referencia a cómo caracterizar los procesos de construcción colaborativa del conocimiento que ocurren en discusiones asincrónicas tales como los debates virtuales entre estudiantes para profesor (SCHRIRE, 2006; STRIJBOS; MARTENS; PRINS; JOCHEMS, 2006; WEINBERGER; FISHER, 2006). En este contexto, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesores se relaciona con otras dimensiones que definen la calidad del discurso generado como son la forma de participar y el contenido del discurso (ANDRIESSEN; ERKENS; VAN DE LAANK; COIRIER, 2003; SUTHERS; DWYER; MEDINA; VATRAPU, 2010). En estos momentos es un desafío para las investigaciones educativas desarrollar aproximaciones que permitan ir más allá de la descripción de estas situaciones e intentar proporcionar una explicación de los procesos de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" (o ausencia de desarrollo) generados en dichos contextos (SCHIRE, 2006).

Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) indica que es en la interacción donde se puede producir progreso en el sentido de que, compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional a esta hipótesis, esencial para que el discurso sea progresivo, es que el contenido del discurso sea considerado un "artefacto del conocimiento" sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar (SUTHERS et al., 2010). Esta hipótesis sobre el discurso y construcción del conocimiento plantea cuestiones en investigación en Educación Matemática que deben ser exploradas. En particular, qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado al desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" y qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra de esta manera.

Desde las perspectivas sociales del aprendizaje se asume que pensamiento y discurso se consideran dos aspectos inseparables de un mismo fenómeno, por lo que las aportaciones en los espacios de interacción social son consideradas indicativas de la forma de aprender (ANDRIESSEN et al., 2003; PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS; OLIVEIRA; FONSECA, 2007; PENALVA et al., 2011). Los resultados de las investigaciones previas indican que la colaboración discursiva entre los profesores en este tipo de entornos de aprendizaje parece fomentar la construcción del conocimiento de Didáctica de la Matemática que es pertinente para la resolución de las tareas de planificar la enseñanza e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes. En particular, la estructura de los entornos de aprendizaje parece influir en la manera en la que los estudiantes para profesor interaccionan entre ellos en un intento de ampliar y transformar su comprensión de la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, las interacciones parecen potenciarse cuando existe un foco de interés compartido lo que les permite llegar a compartir un cierto nivel de comprensión de la situación (LLINARES; VALLS, 2009, 2010; PRIETO; VALLS, 2010). Sin embargo estos planteamientos teóricos deben validarse empiricamente cuando consideramos tópicos específicos del conocimiento profesional de profesor como puede ser el conocimiento sobre la relación entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo que se genera en el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria.

LAS CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN

Planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿En qué medida los estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan los aspectos relevantes del pensamiento matemático de estudiantes de educación secundaria?
- ¿Cómo la interacción en línea apoya el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido"?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes del estudio han sido un grupo de 7 estudiantes para profesor de matemáticas de Educación Secundaria que participaban en un programa de post-graduación que capacita para la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria (12-18 años). Este programa ofrece una formación pedagógica, psicológica, y de didáctica de las matemáticas con un periodo de prácticas de enseñanza en los centros de educación secundaria. Este programa de formación tiene una duración de un año (60 créditos, European Credits Transfer System). La parte específica de didáctica de las matemáticas es el 50% (30 ECTS) y está organizada en tres módulos referentes a la enseñanza de las matemáticas, al aprendizaje de las matemáticas, y a la resolución de problemas. La investigación que describimos en este trabajo forma parte de una experiencia desarrollada en el módulo *Aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria*. Este módulo tiene como objetivo que los estudiantes para profesor aprendan a identificar e interpretar las características del pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Uno de los contenidos de este módulo está centrado en la relación entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo en el contexto del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria (12-16 años). Para la enseñanza de este contenido, se diseñó un entorno de aprendizaje b-learning en el que se integraban actividades presenciales y no presenciales para los estudiantes para profesor mediante el uso de una plataforma web. Esta plataforma web permitía a los estudiantes para profesor realizar las actividades propuestas, participar en debates en-línea, tener acceso a los documentos con la información teórica y entregar los informes síntesis de las actividades (Figura 1).

La actividad inicial

Para desarrollar el contenido relativo al razonamiento proporcional, la actividad inicial que debían realizar los estudiantes para profesores de matemáticas consistía en identificar características del pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria en relación a la idea de razón y proporción. Para ello se les proporcionó un documento con las respuestas de 4 estudiantes de educación secundaria a 4 problemas con estructura de valor perdido (2 proporcionales [modelizados mediante la función $f(x) = ax$, $a \neq 0$] y 2 problemas no proporcionales con estructura aditiva [modelizados mediante la función $f(x) = x+b$, $b \neq 0$]). En total los estudiantes para profesor debían analizar 16 respuestas (4 problemas x 4 estudiantes de secundaria).

FIGURA 1 – Página de una de las sesiones en-línea en la que participaban los estudiantes para profesor titulada "Sesion4. Análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes".

Las respuestas a los cuatro problemas reflejaban diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de educación secundaria cuando resuelven problemas proporcionales y no proporcionales identificados por las investigaciones sobre este tópico. (FERNÁNDEZ Y LLINARES, 2010; VAN DOOREN, DE BOCK Y VERSCHAFFEL, 2010). Las situaciones no proporcionales las denominaremos situaciones con estructura aditiva por la relación aditiva entre las cantidades que puede establecerse de manera correcta para su resolución. Los perfiles reflejados en las respuestas a los problemas eran:

- Estudiantes que resuelven los problemas proporcionales y de estructura aditiva aplicando la proporcionalidad (identificación de la relación multiplicativa entre las cantidades).
- Estudiantes que resuelven los problemas con estructura aditiva y los proporcionales aplicando una estrategia aditiva (identificación de la relación aditiva entre las cantidades).
- Estudiantes que resuelven los problemas con relaciones enteras entre los números empleando relaciones multiplicativas (estrategia proporcional) y los problemas con relaciones no enteras entre los números empleando relaciones aditivas (estrategia aditiva) independientemente del carácter del problema proporcional o de estructura aditiva.

- Estudiantes que resuelven correctamente ambos tipos de problemas identificando las relaciones aditivas en los problemas con estructura aditiva y las relaciones multiplicativas en los problemas proporcionales.

La Figura 2 muestra las respuestas de uno de los estudiantes de secundaria que fueron presentados a los estudiantes para profesor como parte de la actividad inicial. En particular, estas respuestas corresponden al perfil del estudiante de educación secundaria que resuelve todos los problemas empleando una estrategia aditiva sin tener en cuenta si el problema es proporcional o aditivo.

Los estudiantes para profesor de matemáticas debían responder las siguientes preguntas

- Describe detalladamente lo que piensas hizo cada uno de los estudiante para resolver cada uno de los problemas.
- Indica qué información puedes generar a partir de las respuestas dadas sobre la comprensión que tiene el estudiante de los conceptos matemáticos implicados en cada uno de los problemas,
- Si fueras el profesor de estos estudiantes, ante las respuestas dadas,¿qué harías?

El objetivo de la primera pregunta era determinar en qué medida los estudiantes para profesor identificaban las características de cada uno de los problemas, las características de las estrategias usadas y la relación entre el problema y la estrategia. El objetivo de la segunda pregunta de la actividad inicial era determinar en qué medida los estudiantes para profesores eran capaces de identificar los distintos perfiles de comportamiento en las respuestas de los estudiantes. La tercera pregunta intentaba determinar en qué medida tenían en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes para tomar decisiones de enseñanza. Esta actividad fue realizada individualmente durante dos horas en una de las clases presenciales.

FIGURA 2 – Parte del material de la actividad inicial entregada a los estudiantes para profesor.

Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 4 cajas, Tomás ha cargado 16 cajas. Si Pedro ha cargado 8 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás? 16 −4 12 +8 20	Susana y Margarita están remando una canoa. Empezaron al mismo tiempo pero Margarita es más rápida. Cuando Susana ha remado 4 metros, Margarita ha remado 12 metros. Si Susana ha remado 8 metros, ¿cuántos metros ha remado Margarita? 12 −4 8 +8 16
Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 8 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan? 12 −8 4 +20 24	Ana y David están fabricando muñecas. Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 18 muñecas. Si Ana ha fabricado 30 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? 18 −12 06 +30 36

El debate en-línea

Una vez que los estudiantes para profesor habían entregado su respuesta a esta actividad inicial se abrió un debate en-línea con una duración de 7 días. En este debate los estudiantes debían aportar sus respuestas a las últimas dos preguntas de la actividad inicial, justificarlas y contrastarlas con las de sus compañeros. El debate en-línea estaba diseñado para que los estudiantes para profesor pudieran compartir, cuestionar y revisar sus propuestas de manera que la interacción pudiera ayudarles a generar una nueva comprensión de la tarea realizada. Para ello, el debate se apoyaba en las respuestas que los estudiantes para profesor habían dado a la actividad inicial y se organizaba a través de las mismas preguntas. Esta forma de organizar el debate tenía como objetivo conseguir que el discurso generado por los estudiantes para profesor fuera progresivo en el sentido de que el contenido del discurso, es decir las respuestas a la actividad inicial y las nuevas participaciones generadas en el debate pudieran ser consideradas “artefacto del conocimiento” sobre el que los estudiantes para profesor trabajaran colaborativamente para mejorar su competencia en identificar e interpretar lo relevante en el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria en relación al razonamiento proporcional. Al finalizar el debate los estudiantes para profesor debían realizar un informe síntesis con las conclusiones obtenidas.

Análisis

Los datos considerados en esta investigación son las respuestas a la actividad inicial y las participaciones en el debate en-línea. Realizamos el análisis en dos fases. En la primera fase, identificamos la manera en la que los estudiantes para profesor describían e interpretaban las respuestas de los estudiantes de educación secundaria. Para ello tuvimos en cuenta si los estudiantes para profesor identificaban las situaciones **proporcionales y no proporcionales.** Es decir, si reconocían que las situaciones proporcionales se modelizan a través de una función lineal $f: R \rightarrow R : f(x) = ax$, que cumplen: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ y $f(kx) = kf(a)$; y que las situaciones **no proporcionales** usadas en esta actividad se modelizan a través de las funciones $f: R \rightarrow R : f(x) = x + b$, y que estas características podían condicionar las estrategias empleadas por los estudiantes de educación secundaria.

Así, en las respuestas de los estudiantes para profesor debían aparecer evidencias de que en sus respuestas discriminaban los elementos que caracterizan las situaciones proporcionales de las no proporcionales (Tabla 1).

TABLA 1 – Elementos que caracterizan las situaciones proporcionales de las no proporcionales que debían ser analizados en la actividad inicial.

Situación proporcional	Situación no proporcional
La función *pasa por el origen* "Empiezan al mismo tiempo" (E1)	La función no *pasa por el origen* "Empiezan antes o después" (¬E1)
El *valor de la pendientes es distinto* (cambia) "es **más rápido o más** lento" (E2)	El *valor de la pendientes es constante* "la misma velocidad" (¬E2)
Idea de *covariación* [f(x 1 + x2) = f(x1) + f(x2)] "las razones permanecen constantes" (E3)	"la diferencia entre cantidades permanece constante" (¬E3)
Identifica razones internas/externas (E4)	

Además, en nuestro análisis consideramos en qué medida los estudiantes para profesor identificaban e interpretaban diferentes aspectos del razonamiento proporcional en las estrategias utilizadas por los estudiantes de educación secundaria. La Tabla 2 recoge las estrategias de los estudiantes de educación secundaria que aparecían en los diferentes problemas planteados y que debían ser identificadas por los estudiantes para profesor.

TABLA 2 – Estrategias utilizadas por los estudiantes de educación secundaria presentadas a los estudiantes para profesor en la actividad inicial.

Situación proporcional	Situación no proporcional
Enfoque escalar (ST1)	
Enfoque funcional (ST2)	
Construcción (ST3)	Aditiva (ST6)
Reducción a la unidad (ST4)	
Regla de tres (ST5)	

Por último, analizamos si los estudiantes para profesor reconocían los diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de secundaria ejemplificados en la actividad inicial (Tabla 3). Es decir, si eran capaces de identificar las diferencias entre los perfiles de comportamiento que reflejaban las respuestas dadas por los cuatro estudiantes de educación secundaria en la actividad inicial.

TABLA 3 – Perfiles de comportamiento de los estudiantes de educación secundaria ejemplificados en la actividad inicial.

Perfiles	Característica
Identificar perfil que depende del carácter de la razón (P1)	Uso de relaciones aditivas cuando la relación entre las cantidades es no entera y uso de relaciones proporcionales cuando la relación es entera
Identifica perfil aditivo (P2)	Uso de relaciones aditivas independientemente del tipo de problema
Identifica perfil proporcional (P3)	Uso de relaciones proporcionales independientemente del tipo de problema
Identifica perfil correcto (P4)	Uso de relaciones proporcionales en los problemas proporcionales y de relaciones aditivas en los problemas aditivos

En la segunda fase analizamos las participaciones de los estudiantes para profesor en el debate en-línea que estuvo activo durante 7 días (WEINBERGER; FISHER, 2006). Este análisis tenía como objetivo identificar de qué manera la interacción permitía a algunos estudiantes para profesor refinar sus interpretaciones previas sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria en relación al razonamiento proporcional. Analizamos en qué medida en las aportaciones de los estudiantes se tenía en cuenta las características de los problemas, las características de las estrategias empleadas, y las características de los perfiles de comportamiento de los estudiantes. Consideramos como unidad de análisis las participaciones de los estudiantes para profesor en el debate en línea que ponían de manifiesto alguna idea relativa al pensamiento matemático de los estudiantes de secundaria o las características de los problemas que los estudiantes de secundaria habían resuelto (DE WEVER; SCHELLENS; VALCKE; VAN KEER, 2006; SCHRIRE, 2006). Así, cada participación en el debate en línea fue analizada considerando dos dimensiones: contenido de la participación, y la forma en la que se participaba.

En relación al contenido de la participación, usamos los mismos criterios que en el análisis de las respuestas a la actividad inicial en relación a los aspectos del razonamiento proporcional y las características de los problemas proporcionales y no proporcionales que los estudiantes para profesor consideraban. En relación a la forma de participación en el debate consideramos la manera en la que los estudiantes para profesor proporcionaban información, clarificaban aportaciones previas, coincidían o discrepaban con alguna aportación previa. Finalmente, tuvimos en cuenta en qué medida esta forma de participar en el debate determinaba el refinamiento de las interpretaciones inicialmente planteadas.

Procedimiento

Para realizar este análisis, tres investigadores analizaron las respuestas de los estudiantes para profesor para generar un conjunto de códigos en relación a los diferentes aspectos del razonamiento proporcional que los estudiantes para profesor identificaban e interpretaban. El análisis conjunto de esta muestra de datos permitió consensuar criterios en relación a los significados que podían ser asignados a las diferentes aportaciones de los estudiantes para profesor. Los resultados de este análisis es lo que se presenta en la siguiente sección.

RESULTADOS

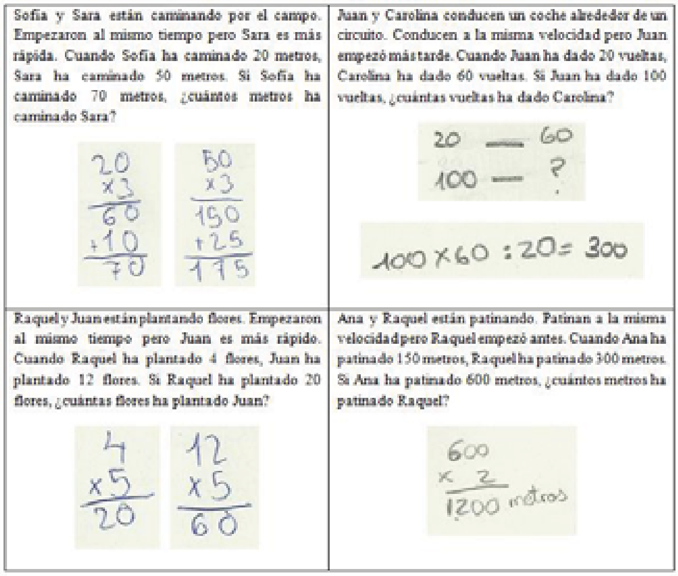
Los resultados obtenidos en esta investigación se presentan en dos secciones. En la primera hacemos referencia a la identificación e interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes por parte de los estudiantes para profesor. En la segunda sección identificamos y describimos algunas características del papel de la interacción en un debate sobre el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido".

Identificar lo que es relevante en el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria

Las características de los problemas proporcionales y aditivos fueron reconocidas de manera diferente por los estudiantes para profesor. La diferencia entre los dos tipos de problemas fue puesta de manifiesto inicialmente por 3 de 6 estudiantes (de los 7 estudiantes para profesor; uno de ellos no participó en la realización de la actividad inicial en la sesión presencial pero sí participó en el debate en línea puesto que las respuestas estaban en la plataforma web). Estos estudiantes para profesor identificaron alguno de los dos elementos relevantes en cada situación "**empiezan al mismo tiempo (E1)**" o "**empiezan antes o después (¬E1)**", como las características que permiten discriminar las situaciones aditivas y proporcionales. La identificación de estas características fue puesta de manifiesto por los estudiantes para profesor asociándolas de manera correcta a la relación aditiva o multiplicativa de las cantidades.

Una segunda característica fue asociada a la frase "**la misma velocidad (¬E2)**" que significa que la relación entre cantidades "correspondientes" es 1 (es decir, la pendiente de la gráfica de la función es 1), en contraste con la idea "**es más rápido o más lento (E2)**", que significa que la relación entre las cantidades es distinta de 1. Aunque esta segunda característica, a priori, no es suficiente para discriminar las situaciones aditivas y proporcionales, la forma en la que estaban redactados los problemas en la actividad inicial sí permitía usar esta característica para diferenciarlas. Por ejemplo, en relación a la siguiente respuesta del estudiante de educación secundaria que corresponde al perfil "resuelve todos los problemas empleando la proporcionalidad sin tener en cuenta si el problema es proporcional o de estructura aditiva" (Figura 3).

FIGURA 3 – Parte del material de la actividad inicial que muestra las respuestas de un estudiante que responde siempre de manera proporcional a las situaciones.



Juan (S3), uno de los estudiantes para profesor indicaba lo siguiente

En el problema 1 el estudiante se dio cuenta que en el primer intervalo de tiempo Sofía había recorrido 20 metros y que pasado el triple de tiempo había recorrido 60 metros. Si a esos 60 metros les sumaba la mitad de lo recorre en un intervalo (20= 10) obtendría la cantidad de metros que le decían en el enunciado que había recorrido Sofía en total. Por tanto, ya sabría que esa distancia la había recorrido en 3 intervalos y medio de tiempo y ha calculado la distancia que recorre Sara en ese mismo tiempo.

En el problema 2. El alumno piensa en este problema que la relación de vueltas que dan Juan y Carolina, uno con respecto al otro, es proporcional, y no se da cuenta que uno ha empezado más tarde que otro y que van a la misma velocidad, luego tienen que recorrer el mismo número de vueltas en un tiempo determinado, una vez que han salido ambos a la pista.

Con esta respuesta Juan identifica las relaciones diferentes entre las cantidades que hay en las dos situaciones y cómo estas no son reconocidas por el estudiante de educación secundaria. Sin embargo, otros estudiantes para profesor no fueron capaces de identificar inicialmente lo que era relevante desde el pensamiento matemático de los estudiantes, ni pudieron establecer una clara relación entre la respuesta dada al problema y su estructura. Así, por ejemplo, Andrea (S6) otra estudiante para profesor describe las operaciones que aparecen en la respuesta pero no es capaz de dotarlas de sentido en relación a la diferencia entre las dos estructuras de las situaciones.

Respuesta al problema 1. (1)El estudiante intentó resolver el problema sin usar proporciones. De 20 intenta llegar a 70 usando multiplicaciones y sumas. Sabía que tenía que llegar de 20 a 70, eso lo hizo multiplicando antes por 3 y sumando 10. Aplico las mismas operaciones a 50 y eso le hizo llegar a 175.

(2) entiendo que el estudiante no conoce las proporciones, pero de todos modos llega a la resolución del problema.

Respuesta al problema 2. (1) El estudiante aplicó el método de las proporciones, aunque no escribió 20:100=60 : x, pero sí escribió directamente la fórmula 100×60/20.

(2) El estudiante tiene muy claro el método de las proporciones.

Con la respuesta inicial de Andrea en relación al problema 1, parece reconocer que el estudiante de secundaria maneja bien las relaciones proporcionales, sin embargo Andrea no es capaz de reconocer que el problema 2, es una situación con estructura aditiva, y por tanto no es aplicable lo que ella denomina "el método de las proporciones". La respuesta de Andrea (S6) muestra la dificultad que tenían algunos estudiantes para profesor para dotar de sentido la manera en la que los estudiantes de educación secundaria resolvían los problemas al no reconocer la estructura aditiva.

Por otra parte, algunos estudiantes para profesor consideraban que las respuestas constructivas en las que los estudiantes de educación secundaria no usaban algoritmos eran menos competentes. De esta manera, estos estudiantes para profesor no valoraban aquellas estrategias que podían mostrar un proceso de identificación de las relaciones aditivas o proporcionales entre las cantidades por parte de los estudiantes de educación secundaria.

Finalmente, considerar globalmente las respuestas de un estudiante de educación secundaria a los cuatro problemas para identificar los perfiles de comportamiento que las respuestas mostraban resultó más difícil. Así, el perfil correcto (P4) en el que el estudiante de educación secundaria resolvía proporcionalmente las situaciones proporcionales y aditivamente las situaciones de estructura aditiva, y el perfil que muestra la dependencia de las respuestas dadas por el tipo de razón (P1) fueron muy difíciles de identificar (sólo uno de los estudiantes para profesor fue capaz de hacerlo). Mientras que los perfiles que mostraban que las respuestas del estudiante de secundaria eran siempre aditivas o siempre proporcionales independientemente del tipo de problema, resultaron más fáciles de identificar.

El desarrollo de la capacidad de "mirar con sentido": el papel de la interacción

Mayoritariamente los estudiantes para profesor, en la actividad inicial, fueron capaces de "ver" aspectos relevantes de las estrategias usadas por los estudiantes de educación secundaria al resolver los problemas, pero sólo en algunos casos identificaron rasgos del comportamiento global de los estudiantes de secundaria (los perfiles). Sin embargo, a través del debate virtual los estudiantes para profesor fueron capaces de centrar su atención en las características de las tareas e identificar perfiles no reconocidos con anterioridad. Es decir, en cierta medida la interacción motivada por el objetivo común de dotar de sentido al pensamiento matemático de los estudiantes propició el que los estudiantes para profesor empezaran a mirar de manera conjunta las respuestas a los cuatro problemas de un estudiante.

Un ejemplo de esta característica es la interacción entre S1 y S4 (Figura 4). El estudiante para profesor S1 había identificado inicialmente los problemas aditivos y proporcionales subrayando la importancia de *"mantener una misma velocidad habiendo empezado en distintos momentos y empezar al mismo tiempo pero llevando velocidades distintas"*, sin embargo, el estudiante para profesor S4 no había discriminado inicialmente los problemas proporcionales y aditivos, pero la interacción entre ellos le permite empezar a centrar su atención sobre este aspecto al concordar y clarificar diferenciando ambos tipos de problemas.

FIGURA 4 – Interacción entre el alumno S1 y S4 en el debate on-line.

- *COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES (Alumno S1 - 09:30:15 23/09/2010)*
  Los estudiantes tienen un buen dominio en las operaciones elementales (suma, resta, etc.) y hacen uso de éstas. Pero, por lo general, no suelen leer bien el problema e interpretan de la misma forma el hecho de empezar antes y el hecho de ser más rápido o lento.
  - *Comprensión del problema (Alumno S4- 11:23:39 23/09/2010)*
    Estoy de acuerdo en que no han visto la diferencia entre mantener una misma velocidad habiendo empezado en distintos momentos y empezar al mismo tiempo pero llevando velocidades distintas. Habría que descubrir si se produce por no haber leído bien el problema o por no tener claro el concepto de proporcionalidad, cuando se produce y cuándo no.

Centrar la atención sobre la necesidad de discriminar cuando es o no una situación de proporcionalidad resulta clave para empezar a considerar globalmente las respuestas de un estudiante a diferentes problemas. La vinculación entre el tipo de relación entre los números, lo aditivo o proporcional de la situación, y la información que se puede generar sobre el pensamiento matemático de los estudiantes a partir de las estrategias usadas por los estudiantes de educación secundaria es otra manifestación de cómo la interacción ayudó a algunos estudiantes para profesor. Por ejemplo, la siguiente interacción entre tres estudiantes para profesor (S7, S3 y S1) les permitió identificar el perfil P1, definido por el papel que desempeñan las razones enteras o no enteras en las situaciones proporcionales y aditivas para determinar la respuesta de los estudiantes de educación secundaria (Figura 5), cuando previamente ninguno de estos estudiantes para profesor había identificado este perfil en la actividad inicial.

Esta interacción se inicia cuando el estudiante para profesor S7 centra la atención sobre lo que puede caracterizar las respuestas del estudiante de educación Secundaria a los cuatro problemas propuestos. En particular, S7 identifica que el estudiante de secundaria resuelve uno de los dos problemas de proporcionalidad correctamente y el otro mal y en los problemas aditivos ocurre lo mismo. La aportación de S3 no resulta relevante en cuanto a la identificación pero permite a S1 centrar su atención sobre la relación multiplicativa entre los números. Para ello S1 indica que el estudiante de secundaria resuelve igual dos de los problemas al darse cuenta de la existencia de la relación de "triple" entre los números, y los otros dos, al no encontrar el número de la relación (ya que es una relación no entera) los resuelve aditivamente.

FIGURA 5 – Interacción entre los alumnos S7, S3 y S1 en el debate en-línea.

- *caso del 4* (Alumno S7 – 16:34:09 24/09/2010)
  Siguiendo en la misma línea a los otros casos, este también es curioso, porque hay dos problemas de proporciones, uno lo hace bien y otro mal, igualmente hay dos problemas de comenzar diferente y uno lo hace bien y otro mal. ¿Cómo se explica? O se canso de leer, o no entendió algunos términos que la confundieron o lo hizo al azar y unos le salieron bien y otros mal. De nuevo hay que decir que deben explicar los resultados o escenificar un poco lo que hacen.
  - *Estudiante EPS4* (Alumno S3 – 14:13:36 25/09/2010)
    La verdad es que es extraño que haga uno bien y otro mal de cada caso. Como tú dices si se le obligara a explicar qué representa cada uno de los resultados intermedios que va obteniendo comprendería mejor cuándo usar cada método de resolución. Por ejemplo, que en el problema 1) indicara tras la operación 100-40=60 lo que representa el 60: "las cajas llevaba Tomás cuando Pedro empezó a cargar cajas".
    - *Visualización Estudiante 4* (Alumno S1 – 17:26:20 25/09/2010)
      Respecto a este estudiante podría decir que tampoco nota la diferencia entre un problema u otro. Pero por la forma de resolverlos podemos sospechar que tanto el 2-4 y el 3-4 los resuelve de igual forma porque se da cuenta que es el triple, es decir, que aprecia que hay una relación entre los números 25 y75 y 3 y 9. Sin embargo con los otros dos problemas no los puede hacer así (por ejemplo en el 1-4 no encuentra un número que al multiplicarlo por 40 de 60) y por eso opta por resolverlos de esa forma, buscando la diferencia y luego sumándosela al dato que le dan.

Lo que muestra esta interacción es la manera en la que los estudiantes para profesor compartían una manera de mirar que les permitía revisar sus planteamientos previos lo que en este caso estaba conduciendo a una nueva comprensión de la situación.

Otro ejemplo de esta característica de la interacción se da en el reconocimiento de la estrategia aditiva por parte de los estudiantes para profesor de secundaria S7, S6 y S1 (Figura 6).

FIGURA 6 – Interacción entre los alumnos S7, S6 y S1 en el debate en-línea.

- *¿están todos bien?* (Alumno S7 – 16:12:46 24/09/2010)
  El problema 2-1 no es correcto. En este y en todos los casos no solo basta en poner operaciones sin más, hay que explicar que datos usamos y que se obtiene, aunque sea con pocas letras. Por ejemplo: Carlos empieza más tarde que Samuel, la diferencia entre uno y otro es 1.400, es decir, 1.400 letras llevara siempre Samuel más que Carlos. Por tanto si Carlos tiene 1000, Samuel llevara 1.400 mas, que serán 2.400.
  - *no te entiendo* (Alumno S6 – 12:30:32 25/09/2010)
    el estudiante dio la misma solución que tu…. 2400 letras
    - *Correcto* (Alumno S1 – 12:48:37 26/09/2010)
      Estoy de acuerdo contigo Andrea, el ejercicio está bien lo que ocurre es que no saca la ventaja que hay entre los dos (cosa que si hace en el ejercicio 1-1) sino que busca el incremento de una persona y luego se la suma a la otra. Pero como tu bien dices el resultado es el mismo.
    - *correcto* (Alumno S7 – 18:51:41 28/09/2010)
      Sí, el problemas esta correcto. Lo vi un poco rápido sin fijarme que había cambiado la forma de plantear la solución.

En la Tabla 4 se resume la influencia de la interacción en-línea en el desarrollo de la capacidad de *"mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes* de cada uno de los estudiantes para profesor.

TABLA 4 – Lo que identifican los estudiantes para profesor antes y después de la interacción.

Estudiante	**Lo que identifican antes de la interacción**			**Lo que "ven" gracias a la interacción**		
	Características de los problemas	**Estrategias**	**Perfiles**	**Características de los problemas**	**Estrategias**	**Perfiles**
S1	Diferencia problemas aditivos y proporcionales a través de ¬E1 y E2	ST2, ST3, ST5 y ST6 (esta última solo para la relación entre distintas magnitudes) considerando la más competente ST5	P2 y P3	Diferencia problemas aditivos y proporcionales a través de ¬E1 y E1; ¬E2 y E2 (acordando)		
S2	No hizo el cuestionario			No aporta nada relevante		
S3	Discrimina entre problemas proporcionales y aditivos a través de los elementos ¬E1 y E2	ST6, ST2, ST3 y ST5	P2 y P4	-Identifica (acordando) los elementos E3 y ¬E3	Identifica el uso de la relación entre cantidades de la misma magnitud en la estrategia aditiva (ST6) ST1 o ST2	P1
S4	No discrimina los problemas	ST1, ST2, ST5 y ST6 Identifica que dependiendo del carácter de la razón externa el estudiante utiliza ST2 y ST5	P2 y P3	Discrimina los problemas proporcionales y no proporcionales identificando por un lado los elementos E1 y E2 (en los proporcionales) y ¬E1 y ¬E2 (en los problemas aditivos). También incide en la diferenciación con los elementos E3 y ¬E3	Identifica que si las razones son enteras emplean las relaciones multiplicativas pero que si las razones son no enteras emplean la regla de tres	P4
S5	No discrimina los problemas	ST3, ST2, ST5 y ST6 pero no diferencia entre ST2 y ST3 Da importancia a ST2	P1	No considera importantes los elementos E2 y ¬E1 y E1		
S6	No discrimina los problemas	ST2 y ST5 Le da importancia a la ST5 desde la forma a/b = c/x		Identifica E2 y ¬E2 como elementos que diferencian las situaciones Identifica (mediante acuerdo) E3 y ¬E3		P1

Estudiante	Lo que identifican antes de la interacción			Lo que "ven" gracias a la interacción		
	Características de los problemas	Estrategias	Perfiles	Características de los problemas	Estrategias	Perfiles
S7	Identifica problemas proporcionales y aditivos pero sin identificar ningún elemento	ST5, ST2 y ST3		Identifica E1 y ¬E1 como elementos a tener en cuenta en la diferenciación.	No identifica la ST1 ni la ST6 cuando la relación es entre cantidades de la misma magnitud (después de la interacción acuerda con otro compañero e identifica)	

DISCUSIÓN

Los resultados de esta investigación indican que los estudiantes para profesor tuvieron dificultades inicialmente en interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Los estudiantes para profesor describían el proceso de resolución en los distintos problemas e identificaban algunas de las características de las situaciones aditivas y proporcionales. Sin embargo, les resultaba más difícil llegar a considerar conjuntamente las cuatro respuestas de un mismo estudiante de educación secundaria para identificar alguna característica del razonamiento proporcional. De esta manera, les resultaba difícil tener una visión articulada de lo que podía significar globalmente las respuestas de cada estudiante. Sin embargo, la participación en el debate en-línea ayudó a algunos de los estudiantes para profesor a ir más allá de lo inicialmente considerado dando muestras del desarrollo de "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes.

Una característica del discurso generado en el debate en-línea fue que los estudiantes para profesor participaron colaborativamente para refinar el contenido de las aportaciones. Esto permitió que en cierta medida el discurso fuera progresivo en la incorporación de nuevos aspectos a tener en cuenta en relación al pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. En este sentido, los resultados de nuestra investigación indican que el debate en-línea favoreció la emergencia de un discurso progresivo al facilitar la interrelación e integración de ideas sobre las situaciones proporcionales y no proporcionales y las características del razonamiento proporcional de los estudiantes de educación secundaria. Como consecuencia, podemos considerar que el debate en línea desempeñó el papel de mediador en la construcción del conocimiento. Un factor que apoyó la emergencia de este discurso progresivo fue el hecho de que el debate tenía un objetivo claramente definido "*Indicar que información era posible inferir sobre la comprensión de los estudiantes de educación secundaria sobre el razonamiento proporcional a partir de la manera en la que resolvían los problemas*", y se apoyaba en un material con una estructura clara usado en la realización de la actividad inicial. La conjunción de estas dos características, un objetivo claramente definido y un material de apoyo al debate con una estructura clara y coherente con el objetivo pretendido, parece que facilitaron la generación de este discurso progresivo al proporcionar una referencia clara sobre lo que se debía debatir. Como consecuencia podemos asumir que la estructura b-learning del entorno de aprendizaje diseñado determinó en cierta medida las características de las relaciones entre los estudiantes para profesor y el conocimiento, apoyando las posibilidades de tener en cuenta y compartir diferentes perspectivas que requerían comprender las perspectivas de otros participantes mientras se realizaba esta actividad conjunta (LLINARES; OLIVERO, 2008).

El que los profesores puedan llegar a considerar el pensamiento matemático de sus estudiantes cuando toman decisiones de enseñanza se apoya en el necesario desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. Los resultados obtenidos contribuyen a la creciente línea de investigación sobre cómo los estudiantes para profesor y los profesores puedan llegar a ver y dotar de sentido las situaciones de enseñanza y cómo determinadas experiencias pueden apoyar el desarrollo de esta competencia (KERSTING; GIVVIN; SOTELO; STIGLER, 2010; LIN, 2005; LLINARES; VALLS, 2010, PRIETO; VALLS, 2010; SANTAGATA; ZANNONI; STIGLER, 2007; VAN ES; SHERIN, 2002).

Las evidencias aportadas por la investigación descrita apuntan en la dirección de que esta competencia docente se puede aprender. En nuestro caso además, algunas características del entorno b-learning diseñado parecen apoyar el desarrollo de esta competencia. Aunque en estos momentos es necesario seguir investigando en esta línea, es posible asumir que algunas características de los entornos de aprendizaje en los programas de formación de profesores pueden apoyar el desarrollo de un discurso progresivo de los estudiantes para profesor guiado por la definición de objetivos coherentes con el material de apoyo usado.

Reconocimientos. Esta investigación se ha realizado con apoyo del proyecto de investigación I+D nº EDU2008-04583, del MICINN. España.

REFERENCIAS

ALSAWAIE, O.; ALGHAZO, I. M. The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of mathematics Teacher Education,* v.13, p.223-241, 2010.

ANDRIESSEN, L.; ERKENS, G.; VAN DE LAANK, P.N.; COIRIER, N. Argumentation as negotiation in electronic collaborative writing. En J. ANDRIESSEN, M. BAKER.; D. SUTHERS (Ed.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computers-Supportes Collaborative Learning Environment*, p.79-115. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

DE BOCK, D.; VAN DOOREN, W.; JANSSENS, D.; VERSCHAFFEL, L. *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer, 2007.

DE WEVER, B.; SCHELLENS, T.; VALCKE, M.; VAN KEER, H. Content analysis schemes to analyze transcripts of online asynchronous discussion groups: A review. *Computers & Education,* v.46, p.6-28, 2006.
FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje,* v.34, n.1, 2011.
FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Implicative analysis of strategies in solving proportional and non proportional problems. En O. FIGUERAS; J.L. CORTINA, S. ALATORRE; T. ROJANO; A. SEPULVEDA (Ed.), *Proceedings of the Joint meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (vol.3; p.1-9). México: CINVESTAV-UMSNH, 2008.
FRIEL, S. N.; CARBONI, L. W. Using video-based pedagogy in an elementary mathematics methods course. *School Science and Mathematics,* v.100, n.3, p.118-127, 2000.
HAREL, G.; CONFREY, J. (Ed.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* New York: State University of New York Press, 1994.
JACOBS, V.R. ; LAMB, L.L.; PHILIPP, R.A. Professional Noticing of Children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* v.41, n.2, p.169-202, 2010.
JACOBS, V.R.; FRANKE, M.L.; CARPENTER, T.P.; LEVI, L.; BATTEY, D. Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education,* v.38, p.258-288, 2007.
KERSTING, N.B.; GIVVIN, K.B.; SOTELO, F.L.; STIGLER, J.W. Teachers' analyses of classroom video predict student learning of mathematics: Further explorations of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education,* v.61, n.1-2, p.172-181, 2010.
LEVIN, D.; HAMMER, D.; COFFEY, J. Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education,* v.60, n.2, p.142-154, 2009.
LIN, P. Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education,* v.3, p.351-377, 2005.
LLINARES, S.; OLIVERO, F. Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. technologies, interactions and new forms of discourse. En K. KRAINER; T. WOOD (Ed.), *Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks*, p.155-180. Rotterdam /Taipei: Sense Publishers, 2008.
LLINARES, S.; VALLS, J. Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v.13, n.2, 177-196, 2010.
LLINARES, S.; VALLS, J. The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science,* v.37, n.2, p.247-271, 2009.
MASON, J. *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer, 2002.
MISAILIDOU, C.; WILLIAMS, J. Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior,* v.22, p.335-368, 2003.

MODESTOU, M.; GAGATSIS, A. Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, v.27, n.1, p.75-92, 2007.
PENALVA, M.C.; REY, C.; LLINARES, S. Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto b-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía, LXIX*, n.248, p.101-118, 2011.
PONTE, J. P.; OLIVEIRA, P.; VARANDAS, J. M.; OLIVEIRA, H.; FONSECA, H. Using ICT to support reflection in pre-service mathematics teacher education. *Interactive Educational Multimedia,* v.10, p.79-89, 2007.
PRIETO, J. L.; VALLS, J. Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática,* v.22, n.1), p.57-85, 2010.
REY, C.; PENALVA, M.C.; LLINARES, S. Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. *Quadrante* , v.XV, p.95-120, 2006.
SANTAGATA, R.; ZANNONI, C.; STIGLER, J.W. The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v.10, p.123-140, 2007.
SCHRIRE, S. Knowledge building in asynchronous discussion groups: Going beyond quantitative analysis. *Computers & Education,* v.46, p.49-70, 2006.
SHERIN, M. G. Developing a professional vision of classroom events. En T. WOOD, B. SCOTT NELSON,; J. WARFIELD (Ed.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* p.75-93. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2001.
SHERIN, M. G.; JACOBS, V. R.; PHILIPP, R. A. (Ed). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge, 2010.
START, J. R.; STRICKLAND, S. K. Learning to observe: using video to improve pre-service teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education,* v.11, p.107-125, 2007.
STRIJBOS, J.; MARTENS, R.L. ; PRINS, F.J.; JOCHEMS, W.M.G. Content analysis: What are they talking about? *Computers & Education,* v.46, p.29-48, 2006.
SUTHERS, D.D.; DWYER, N.; MEDINA, R.; VATRAPU, R. A framework for conceptualizing, representing and analyzing distributed interaction. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning,* v.5, p.5-42, 2010.
TOURNIAIRE, F.; PULOS, S. Proportional reasoning. A review of literature. *Educational Studies in Mathematics,* v.16, n.2, p.181-204, 1985.
VAN DOOREN, W.; DE BOCK, D.; HESSELS, A.; JANSSENS, D.; VERSCHAFFEL, L. Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction,* v.23, n.1, p.57-86, 2005.
VAN DOOREN, W.; DE BOCK, D.; VERSCHAFFEL, L. From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, v*.28, n.3, p.360-381, 2010.
VAN ES, E.; SHERIN, M.G. Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education,* v.10, p.571-596, 2002.

WEINBERGER, A.; FISHER, F. A framework to analyze argumentative knowledge construction in computer-supported collaborative learning. *Computers & Education,* v.46, p.71-95, 2006.
WELLS, G. *Dialogic inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Recebido em: dez. 2010 **Aceito em:** mar. 2011