

Resolução de problemas: um caminho para *fazer e aprender* matemática

Célia Barros Nunes

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

RESUMO

A Resolução de problemas é um tema central quando o assunto é ensinar matemática nos diversos níveis de escolaridade. Cada vez mais, expandem-se as pesquisas nessa temática, seja no Brasil seja em outros países. Várias são as formas de abordagem dadas à resolução de problemas, desde que ela se tornou uma atividade essencial no ensino-aprendizagem da matemática: na própria matemática, no contexto da sala de aula ou fora dela, nos currículos, na formação de professores, tornando-se uma grande área de investigação no campo da Educação Matemática. Portanto, esse artigo tem como objetivo apresentar algumas reflexões dos fundamentos e das possibilidades de aplicabilidade em sala de aula de uma nova e recente abordagem dada à resolução de problemas, a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como um caminho para *fazer e aprender* matemática com compreensão, seja no âmbito da teoria, seja no âmbito da prática do professor, demonstrando, com isso, a linha de pesquisa a qual desenvolvemos. O artigo aborda, também, uma experiência de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas com professores em formação inicial e continuada. Os resultados corroboram que a aplicabilidade da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática favorece aos envolvidos a autonomia e a criatividade quando colocada no centro das atividades de sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelos professores como organizador e mediador no decurso da atividade.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem da Matemática. Resolução de Problemas. Formação de Professores. Fazer e aprender Matemática.

Problem Solving: A means to *make and learn* mathematics

ABSTRACT

Problem solving is a central theme when the subject is teaching mathematics in the diverse levels of education and, increasingly, researches in this thematic are expanding, be it in Brazil or in other countries. There are many means of approach to problem solving, since it became an essential activity on teaching-learning of mathematics: in mathematics itself, in the classroom context or

Célia Barros Nunes é Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita (UNESP) Rio Claro. Líder do grupo de Pesquisa Desenvolvimento Social. Professora Adjunta da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Departamento de Educação, Campus X, Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Carter, 190, Bairro Jardim Caraípe. CEP: 45995 000, Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil. E-mail: cnunes@uneb.br

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana é Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências (GPE-MEC). Professora Titular do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológica e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Pernambuco, 153, apto. 102, Jardim Vitória. CEP: 45605 510, Itabuna, Bahia, Brasil. E-mail: eurivalda@uesc.br

Recebido para publicação em 26/6/2016. Aceito, após revisão, em 23/2/2017.

Acta Scientiae	Canoas	v.19	n.1	p.2-19	jan./fev. 2017
----------------	--------	------	-----	--------	----------------

outside of it, in the curriculum, in teacher training, becoming a large area of investigation in the Mathematics Education field. Therefore, this article has, as goal, to present some reflections of the fundamentals and possibilities of applicability in the classroom of a new and recent approach to problem solving, the Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving, as a means to *make* and *learn* math with comprehension, be it in the theory scope or in the teacher's practical scope, demonstrating with this, the research line which we develop. The article also discusses an experience of teaching-learning of mathematics through solving problems with teachers in-service and pre-service. The results corroborate that the Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving favors those involved the autonomy and the creativity when placed in the center of classroom activities, without renouncing with the fundamental role played by teachers as organizer and mediator in the course of the activity.

Keywords: Math teaching-learning. Problem Solving. Teachers Training. Making and learning Math.

INTRODUÇÃO

Tem surgido, e é objeto de discussão, há algum tempo, a ideia de que na Educação Matemática devemos ter a preocupação que os alunos adquiram compreensão, habilidades e técnicas que os levem a fazer ou pensar matematicamente. Van de Walle (2009) aponta uma coleção de verbos de procedimentos científicos indicadores do processo de “atribuir significado” e de “compreender”. São verbos de ação que requerem estar envolvido, correr riscos, colocar as ideias onde os outros possam vê-las e percebê-las. Para o autor, os alunos *aprendem* matemática *fazendo* matemática quando, por exemplo, exploram, justificam, formulam e testam questões que os levem, de fato, a perceber o sentido da matemática.

A partir dessas ideias iniciais, a temática em questão pretende levar a uma reflexão sobre a Resolução de Problemas, segundo diversos entendimentos para essa abordagem: Fernandes et al. (1997), Vale (2011), Nunes (2010), Nunes e Onuchic (2011), Lamonato e Passos (2011), Onuchic (2013), Moura (2014), Allevato e Onuchic (2014), Nunes, Nogutti e Allevato (2014). Além disso, pretende apontar contribuições para a Matemática Escolar.

A Resolução de Problemas tem se tornado uma importante atividade matemática, mostrando-se útil no desenvolvimento de conceitos específicos e de ideias matemáticas. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Nesse sentido, o presente texto pretende dar uma atenção especial à Resolução de Problemas, especificamente à Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, como um caminho para *fazer* e *aprender* matemática com compreensão, seja no âmbito da teoria, seja no âmbito da prática do professor.

MAS, AFINAL, O QUE SIGNIFICA FAZER MATEMÁTICA?

Numa perspectiva educacional, resolver problemas é um componente essencial de fazer matemática e permite o contato com ideias matemáticas significativas. Para muitas pessoas, ainda predomina a ideia de que a matemática é uma coleção de regras a serem dominadas, de cálculos aritméticos e de equações algébricas mirabolantes. É fato que alguns estudantes são bons em aprender regras e avançam nas séries seguintes, no entanto, isso não os legitima de serem os melhores pensadores em sala de aula. “O sistema tradicional recompensa a aprendizagem de regras, mas oferece poucas oportunidades para realmente fazer matemática” (VAN de WALLE, 2009). Esta percepção está totalmente em contraste com uma visão da matemática que envolve dar significado aos objetos matemáticos tais como dados, formas, variações ou padrões. Num ensino efetivo, tarefas¹ matemáticas significativas para introduzir conceitos importantes poderão despertar a curiosidade e envolver os alunos na matemática.

Um ensino de matemática em que os estudantes possam criar ou desenvolver seus próprios conhecimentos têm consequências importantes para a sua aprendizagem. Van de Walle (2001) nos leva a imaginar uma sala de aula de matemática elementar em que os estudantes estejam fazendo matemática e, pergunta: que verbos usaríamos para descrever as atividades matemáticas nesta sala de aula? Como resposta, aponta uma coleção de verbos de procedimentos científicos indicadores do processo de atribuir significado e de compreender na perspectiva da Educação Matemática: explorar, investigar, conjecturar, resolver, justificar, representar, formular, descobrir, construir, verificar, explicar, predizer, desenvolver, descrever e usar.

Complementa Van de Walle (2009) que a sala de aula deve ser um ambiente onde fazer matemática não seja ameaçador e onde todos os estudantes sejam respeitados por suas ideias. Cabe ao professor, neste ambiente, deixar de ensinar simplesmente expondo e começar a deixar os estudantes atribuir significado à matemática que eles estão aprendendo, criando, dessa forma, o espírito de pesquisa, de confiança e de expectativa.

Os problemas são apresentados e os estudantes buscam soluções por eles mesmos. O foco está nos estudantes ativamente compreenderem as coisas, testarem ideias e fazerem conjecturas, desenvolverem raciocínios e apresentarem explicações. Os estudantes trabalham em grupos, em duplas ou individualmente, mas eles estão sempre compartilhando e discutindo suas ideias. O raciocínio é celebrado quando os estudantes defendem seus métodos e justificam suas soluções. (VAN de WALLE, 2009, p.33)

¹ Segundo Ponte (2005), existem muitos tipos de tarefas matemáticas, dentre elas: os exercícios, os problemas, as investigações, os projetos, as tarefas de modelação, a exploração e, no caso aqui, estamos considerando a tarefa matemática como um problema matemático que é o objetivo da atividade matemática.

Um ambiente de aprendizagem matemática deve ter como característica fundamental a relação dialógica que se estabelece na sala de aula entre os alunos e entre os professores (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009). “É o ambiente de dar voz e ouvido aos alunos, analisar o que eles têm a dizer e estabelecer uma comunicação pautada no respeito e no (com)partilhamento de ideias e saberes” (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p.42).

É muito mais eficaz, em termos de aprendizagem, que os alunos por si mesmos, descubram seus próprios métodos para resolver uma questão matemática do que esperar pelo método do professor. No entanto, para isso, cabe ao professor apresentar problemas nos quais os alunos são chamados a um forte envolvimento para se fazer, num segundo momento: uma discussão, uma reflexão e um balanço do que se aprendeu.

A COMPREENSÃO MATEMÁTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A ênfase dada ao desenvolvimento de competências relacionadas à resolução de problemas se adequa às determinações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de forma que a aquisição de conhecimentos específicos da área de Matemática se mistura ao desenvolvimento destas habilidades em um ambiente acadêmico que contemple a resolução de problemas.

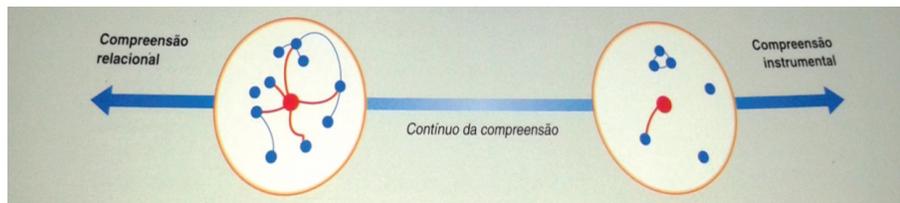
[...] a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer matemático e de um saber pensar matemático. Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1999, p.41)

Frequentemente, os alunos, diante de um problema, não compreendem o que fazem e não utilizam os conhecimentos que possuem para resolvê-lo. Analisar e compreender como pensam os alunos, gerar seu entusiasmo e curiosidade são atitudes do professor, essenciais para o sucesso na resolução de problemas.

Nesta direção, a compreensão pode ser definida como uma medida de qualidade e de quantidade de conexões que uma ideia tem com as já existentes. “A compreensão depende da existência de ideias apropriadas e da criação de novas conexões. Uma maneira de pensar sobre a compreensão de um indivíduo é que ela existe e ocorre ao longo de um contínuo” (VAN de WALLE, 2009, p.45). Quão maior o número de conexões a uma rede de ideias já desenvolvidas, melhor a compreensão matemática.

Para ilustrar a afirmação de Van de Walle, analisemos a figura abaixo:

FIGURA 1 – Compreensão de ideias matemáticas.



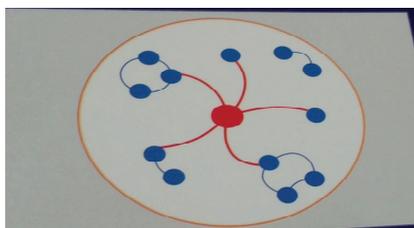
Fonte: Wan de Walle (2009, p.45).

Observemos as duas extremidades. No extremo esquerdo está um conjunto muito rico de conexões. A ideia compreendida está associada a muitas outras existentes em uma rede significativa de conceitos e procedimentos (compreensão relacional). No outro, lado direito, uma rede de ideias isoladas, sem significado, no qual poderíamos exemplificar como aquele conhecimento aprendido mecanicamente (compreensão instrumental).

Um exemplo ilustrativo da situação acima pode ser dado ao referirmos a propriedade da multiplicação de potências de mesma base. Muitos dos estudantes *sabem* a propriedade: “no produto de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes”, no entanto, não a *compreendem*, ou seja, não são capazes de explicar o significado da propriedade. A não compreensão pode estar na leitura do enunciado da propriedade, ou no significado do que seja base e expoente. Pode também acontecer de os alunos desenvolverem ideias bem distintas de um determinado conceito ou princípio matemático e, assim, ter compreensões diferentes. Na verdade, muitos estudantes aprendem as regras corretamente, mas têm uma compreensão muito limitada ou nenhuma compreensão da razão por que essas regras funcionam.

Diz Van de Walle (2009) que o desenvolvimento da compreensão em Matemática se dá quando somos capazes de produzir/contruir novas ideias e der sentido a elas a partir das já existentes. De que forma tais ideias podem ser construídas? A figura abaixo representa uma metáfora para a construção delas, conforme o autor.

FIGURA 2 – Compreensão matemática.



Fonte: Wan de Walle (2009, p.43).

Os pontos azuis representam as ideias existentes, as linhas que unem as ideias representam nossas conexões lógicas ou relações que foram desenvolvidas entre as ideias, e o ponto vermelho (central) representa uma ideia emergente, que está sendo construída. Assim, justifica Van de Walle:

Nós usamos as ideias que já temos (pontos azuis) para construir uma nova ideia (ponto vermelho), desenvolvendo neste processo uma rede de conexões entre elas. Quanto mais ideias forem usadas e mais conexões forem formadas, melhor a nossa compreensão. (VAN de WALLE, 2009, p.43)

Construir conhecimento requer pensamento reflexivo, pensar ativamente sobre ou trabalhar mentalmente em uma ideia, e os estudantes devem estar mentalmente ativos para que a aprendizagem aconteça. O pensamento reflexivo e, conseqüentemente, a aprendizagem são enriquecidos quando o estudante se envolve com os outros, explorando, todos juntos, as mesmas ideias.

As concepções desenvolvidas por Van de Walle nos fazem perceber uma atitude não mais passiva que o aluno tinha no modelo tradicional de ensino, e sim um aluno responsável pela construção do seu próprio conhecimento, mostrando que ele é ponto fundamental do processo de aprendizagem e, o professor, numa visão vygostkiana, é aquele que possibilita esse ambiente, que leva o aluno a estabelecer relações, a pensar, indo além do que vê. Assim, ele viverá e (re)descobrirá o conhecimento, construindo-o de forma ativa, posicionando-se como parte fundamental desse mundo, capaz de promover mudanças em si mesma e em seu meio.

As ideias aqui esboçadas trazem consigo uma relação intrínseca com a resolução de problemas no sentido de que ela: concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e ajuda a dar sentido às mesmas; desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática, que a matemática faz sentido e desenvolve o potencial matemático.

A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM- AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENQUANTO PESQUISA PEDAGÓGICA

A pesquisa pedagógica é uma modalidade de estudo que busca, em sua essência, melhorar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula. Ela surge da necessidade do professor, que, observando eventos do cotidiano de sua sala de aula, deseja pesquisar sobre eles. De acordo com Lankshear e Knobel (2008), o envolvimento do professor será ponto fundamental para o desenvolvimento desse tipo de pesquisa, que poderá contar com observação de sala de aula e documentação de experiências.

Entretanto, Onuchic e Noguti (2014) acreditam que a pesquisa pedagógica não restringe o professor a realizar a sua pesquisa confinado na sala de aula em que atua. Entendem que o impacto fundamental buscado por essa forma de pesquisa, seja o que acontece em sala de aula, porém não se espera que isso seja feito pelo professor somente pelo estudo empírico de sua sala de aula.

Os professores podem aprender muito, informando e orientando sua prática atual por meio de estudos de investigação histórica, antropológica, sociológica ou psicológica e por trabalhos teóricos conduzidos em outros locais e/ou em outras épocas. Esses podem ser estudos sobre política, comunidades, classe social, ambiente de trabalho, linguagens não padronizadas, etc. Os professores com interesse em relacionar ou interpretar dados documentais, visando formular hipóteses ou explicações provisórias da prática, podem obter muito em discussões puramente filosóficas e teóricas sobre questões educacionais que considerem pertinentes a seu trabalho. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.16)

Com base nesse conhecimento sobre a Pesquisa Pedagógica, acreditamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é uma modalidade desse tipo de pesquisa a ser utilizada em sala de aula, pois nesse ambiente de aprendizagem o professor tem um papel fundamental, que é criar um ambiente matemático motivador e estimulante em que o aluno é colocado no centro do processo de ensino-aprendizagem, estabelecendo assim uma relação dialética na sala de aula, entre os alunos e o professor, e que o aluno também se envolva numa atividade intelectual de produzir matemática.

A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA SE TRABALHAR EM SALA DE AULA

Antes de clarificar as ideias contidas nessa metodologia, faz-se necessária uma apresentação de sua gênese, de modo a justificar a sua consolidação não apenas como uma metodologia de ensino-aprendizagem, mas também como uma teoria, uma Filosofia da Educação que aborda uma epistemologia da constituição e/ou ressignificação em um contexto da sala de aula ao trabalhar diferentes tópicos matemáticos, criando possibilidades de um novo pensar matemático (NUNES, 2010).

Suas raízes se fixaram a partir do desenvolvimento de um projeto de formação continuada, de autoria de Lourdes de la Rosa Onuchic, em parceria da Universidade Federal de São Carlos – UFScar, e Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – UNESP de Rio Claro, São Paulo, em um Programa de Educação Continuada – PEC,

junto à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, durante os anos de 1997 e 1998, com professores de Matemática da Educação Básica.

Em um dos relatórios apresentados à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, Onuchic (1998) dizia que para desenvolver esse projeto seria preciso trabalhar sobre o conhecimento matemático dos professores e sobre as crenças que traziam da matemática e de seu ensino-aprendizagem. Além disso, ela ressaltava que não seria um trabalho fácil fazer com que os professores aceitassem mudar sua forma de trabalho e suas crenças em relação à matemática e a seu ensino em sala de aula (NUNES, 2010).

Com essa preocupação em mente, Onuchic, juntamente com os professores em formação continuada, criou uma proposta para trabalhar em sala de aula com alunos, na qual qualquer objeto matemático pudesse ser estudado através da resolução de problemas. Buscando um caminho para criar condições de trabalho em sala de aula de matemática, visando a uma melhor compreensão dos estudantes, a autora, atendendo a solicitações e com a participação dos professores envolvidos no projeto, procurou esquematizar uma aula na qual o objeto matemático fosse trabalhado com significado, através da resolução de problemas, chegando a uma proposta didática, seguida de um roteiro, podendo ser encontrado mais detalhadamente em Onuchic (1999) e Nunes (2010): formar grupos, o papel do professor, resultados na lousa, plenária, análise dos resultados, consenso e formalização.

Resumidamente, segundo Zuffi e Onuchic (2007), com essa metodologia, pedia-se aos alunos a compreensão dos dados de um problema, que soubessem tomar decisões, estabelecer relações, saber comunicar seus resultados e ser capazes de usar técnicas conhecidas. Esses aspectos deviam ser estimulados em um processo de aprendizagem desenvolvido através da resolução de problemas. Somente no final do processo, ou seja, somente depois da resolução do problema ser processado, é que a formalização acontece, onde o simbolismo, as definições e as técnicas precisas seriam introduzidos dando-se, dessa forma, liberdade aos alunos, evitando direcioná-los para o que “pensar” ou o que “fazer”, conduzindo-os em casos de maiores dificuldades (problemas secundários), ou seja, quando eles não soubessem como agir.

Com isso, a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas passa a ganhar força maior nos trabalhos realizados no Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP, coordenado pela professora Lourdes de la Rosa Onuchic, desde 1992, na UNESP – Rio Claro, São Paulo.

O grupo tem por filosofia buscar o desenvolvimento de estudos que alcancem a sala de aula, ou seja, que estejam relacionados às questões de ensino-aprendizagem-avaliação, tanto sob a perspectiva dos alunos quanto do professor, em todos os níveis de escolaridade e, “tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produções científicas na linha de resolução de problemas associada à formação de professores e/ou ao ensino e a aprendizagem” (ONUCHIC et al., 2014, p.11).

No nome dessa metodologia há de se observar que a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, segundo Onuchic (1999) foi criada para expressar a ideia de

que ensino e aprendizagem devem acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como coconstrutores desse conhecimento de modo a produzir matemática.

Além disso, ela integra uma concepção mais atual sobre avaliação. É fundamental que a avaliação seja construída durante a resolução de problemas, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Trabalhar a avaliação continuamente poderá ajudar a tornar o pensamento dos estudantes visíveis para eles mesmos, para seus colegas e para os professores.

Quando se faz uso dessa metodologia, há uma forte atividade de investigação, tanto por parte do professor, quanto por parte do aluno sobre todo o processo. Os problemas são propostos aos estudantes, antes mesmo de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor, favorecendo, dessa forma, a aprendizagem (NUNES, 2011)

Ressalta Nunes (2015) que alguns aspectos interessantes devem ser observados ao se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas: ela permite que os alunos tenham hábitos de pensar, refletir e testar suas ideias emergentes, que investigam quando buscam, usando os seus conhecimentos prévios, caminhos que devem tomar para resolver o problema, argumentam, discutem, possibilitando-lhes uma maior chance das ideias serem formadas corretamente, integradas numa rica teia de conceitos e de compreensão, sejam elas, relacionadas a outros ramos da matemática ou a outras áreas diferentemente da matemática.

É papel dos professores revisar, selecionar e desenvolver as tarefas que favoreçam o desenvolvimento do entendimento e o domínio dos procedimentos (NCTM, 1991), de maneira que também promovam o desenvolvimento de habilidades para resolver problemas e raciocinar e de se comunicar matematicamente.

Nesse sentido, ao colocar em prática essa metodologia, é importante que, diante dela, o professor, ao escolher as situações-problema para suas aulas, se questione a respeito de sua prática (NUNES, 2011). Ele precisa preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir, com vistas ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelos programas curriculares estipulados pela escola; precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade.

Allevato e Onuchic (2014) compreendem que a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas. No entanto, considerando a sua inquestionável importância na formação escolar em todos os níveis, bem como na formação de professores, percebemos que a forma de incorporá-la de modo a promover uma aprendizagem com compreensão e que tenha sentido para o aluno, ainda não está clara para os professores.

Dessa forma, ao longo dos anos de formação do GTERP, a metodologia, veio passando por algumas reformulações em suas atividades e se apresenta em uma nova abordagem, de forma bastante atual para o trabalho em sala de aula, conforme Allevato e Onuchic (2014). Elas sugerem que tais atividades sejam organizadas em dez etapas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) resolução de novos problemas e proposição de novos problemas.

De acordo com a sugestão de Allevato e Onuchic (2014), para o início do trabalho, o professor seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos, ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos.

Elucidam as autoras que o problema inicial é chamado *problema gerador*, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema que ainda não tenha sido trabalhado em sala de aula. Recebendo o problema impresso, cada aluno faz sua leitura do problema. A ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler, individualmente tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto. Então, os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários², mas ainda as ações são realizadas, essencialmente, pelos alunos. Nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender. Entrando na quarta etapa, inicia-se a resolução do problema, propriamente dita.

Os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema gerador, que os conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas. O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos. Após esse trabalho, representantes dos grupos são solicitados a fazer o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Diante desse “painel de soluções”, o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução.

² Trata-se de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos matemáticos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuidade do trabalho (NUNES, 2010).

Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

Na penúltima etapa, a da formalização, o professor registra na lousa ou por escrito uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações, se for o caso.

Objetivando realizar avaliação contínua, após a etapa de formalização, novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos. Esses possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula, e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante.

Essa etapa tem um forte viés da concepção de ensinar para resolver problemas, contudo, segundo Allevato e Onuchic (2014), isso não desconfigura a concepção de ensinar através da resolução de problemas, pois tal concepção inclui as demais (sobre e para). “Isso significa que, quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas” (ALLEVATO, 2005, p.61).

O PROBLEMA GERADOR DE UM NOVO CONCEITO MATEMÁTICO: CONTEXTUALIZAÇÃO, DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Defende-se na Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que o aluno aprende Matemática a partir de um problema, tendo como objetivo um foco particular de Matemática e, usando estratégias convenientes, busca-se a solução do problema, com a participação efetiva dos alunos, seja individual, aos pares ou em pequenos grupos, possibilitando-lhes ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e compreensão.

Nesse sentido, ao se utilizar um problema matemático, como ponto de partida para o desenvolvimento de uma teoria matemática, é possível construir ou até mesmo reconstruir determinados conceitos e conteúdos matemáticos, com compreensão e significado (NUNES; ONUCHIC, 2011). Diante dessa afirmação será apresentado a seguir um problema que foi o gerador de conceitos matemáticos vivenciados por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A experiência aqui relatada trata-se de uma pesquisa intitulada “Uma proposta de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas: perspectivas à formação docente”, numa abordagem de pesquisa qualitativa e interpretativa, ancorada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. A pesquisa tem como objetivo contribuir com a formação continuada e inicial de professores de matemática ao apresentá-lhes, e propor a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Para alcançar o objetivo proposto foram realizados oito encontros semanais de quatro horas aula cada, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática (quinze futuros professores) e professores de matemática em formação continuada.

Aqui, descrevemos e analisamos um dos encontros com os professores envolvidos, alunos do segundo e sexto período do curso de Licenciatura em Matemática (quinze futuros professores) e oito professores em formação continuada da Educação Básica.

Nesse encontro, que teve uma duração de quatro horas aulas, foi trabalhado o problema Telhas e Tijolos (Figura 3) como o problema gerador de um novo conceito ou conteúdo matemático, cuja realização se deu conforme a dinâmica sugerida por Allevaro e Onuchic (2014). Com esse problema pretendia-se mostrar aos futuros professores e aos da formação continuada que é possível desenvolver uma matemática diferente daquela na qual se ensina apenas um aglomerado de fórmulas. Implementando-se uma forma de ensinar e aprender matemática com compreensão, momento que o problema orienta a construção do conhecimento por meio de sua resolução.

Aqui será adotada a concepção de problema, de acordo com Onuchic (1999), como tudo aquilo que não sei fazer, mas estou interessado em fazê-lo. Ou melhor, a tarefa matemática será um problema quando o aluno demonstrar que tem interesse em realizá-la, mas ainda não possui conhecimentos disponíveis para tal.

FIGURA 3 – Tijolos e telhas.

Problema Proposto: Tijolos e Telhas

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
				
$2 = 1 + 1$	$7 = \dots + \dots$	$\dots = 9 + \dots$	$26 = 16 + 10$	$\dots = \dots + \dots$

Considere a sequência seguinte:

- Esboce as figuras em falta, sabendo que seguem a mesma lei de formação. Repare que:



- Seguindo os exemplos, complete a tabela com os números adequados.
- Por quantos  e  é composta a figura 77? E a figura 20? E a figura de uma ordem qualquer n ? Apresente o seu raciocínio.

Fonte: Vale e Pimentel (2009, p.42).

O problema proposto teve como objetivo investigar regularidades numéricas para obter o desenvolvimento da capacidade de generalização. Para alcançar tal objetivo, pretendia-se que os participantes (a) identificassem a combinação da estratégia numérica e a figurativa; (b) passassem da linguagem corrente e numérica para a linguagem algébrica de forma natural e (c) introduzissem, de modo intuitivo, o conceito de álgebra como aritmética generalizada. Nesse problema os tópicos matemáticos envolvidos foram: relações numéricas, números figurados – triângulos e quadrados, área, potência, expressões numéricas, variável e expressões algébricas.

Iniciou-se o trabalho buscando utilizar a dinâmica da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A questão da proposição do problema, das leituras individuais e em conjunto representa o começo dessa prática, e é nesse momento que se levanta o interesse do aluno pela resolução do problema, motivando-o a construir seu conhecimento, ou não.

Os professores participantes, já de posse do problema, individualmente, se puseram a lê-lo a fim de refletir e de se colocar em contato com a linguagem matemática de modo a desenvolver sua própria compreensão do problema. Caso isso não ocorra, a leitura em grupo poderá favorecer um trabalho de interação e trazer a elucidação de eventuais dúvidas a respeito do problema. Caso as dúvidas em relação ao problema persistirem, o professor poderá intervir para facilitar, de alguma forma, a compreensão do problema, através de indagações e questionamentos, mas nunca lhes fornecendo respostas diretas aos problemas trabalhados.

Assim, em um trabalho com pequenos grupos, após a leitura individual e coletiva, os alunos, colaborativamente, se engajavam para encontrar resposta ao problema proposto. Durante a atividade a pesquisadora, primeira autora deste artigo, e suas orientandas, circulavam entre os grupos, observando, mediando o trabalho e ajudando a resolver problemas secundários, sempre que eram solicitadas ou achavam oportuno.

O envolvimento dos alunos no problema foi satisfatório, houve uma discussão de natureza matemática, isto é, as discussões e interações se deram numa linguagem própria da matemática. Partindo da composição da figura 4, buscou-se chegar à figura 7 e à figura de ordem n , como se pode perceber nas falas abaixo.

Aluna A: *Oh, deixa eu explicar. Vemos que aqui tem um padrão: 1, 2, 3, 4 mais um, 5 triângulos; vezes 4, 20; dividido por 2, 10 triângulos. Então para a figura 5, seis vezes cinco, trinta; dividido por 2, 15 triângulos...*

Essa dedução da aluna foi feita a partir do item 1 do problema apresentado na figura 3.

Aluno B: *Então aqui são sete quadrados; a gente “bota” mais um triângulo, então vai ficar oito vezes sete ...*

Aluna A: *Acho que a fórmula vai ficar assim: n^2 mais $n-1$ vezes n dividido por dois...*

Aluno B: *Calma aí, você já pulou umas cinquenta etapas aí...*

Aluna A: *Ah não, é $(n+1)$...*

Aluno B: *Poxa, aqui tem que adicionar mais um triângulo aqui, não é? Ele quer um triângulo com sete retângulos...*

Aluna C: *Sim, tá anotado aí...*

Aluno B: *Eu sei, preste atenção aqui... Então se ele quer 7 retângulos, ele vai ter 8 triangulozinhos, não vai?*

Aluna A: *Oh colega, ele fala a composta da figura 7...*

Aluno B: *Então meu amor, aqui não é 12, 22, 32, ... 72 ? Ou você quer que eu desenhe...*

Observa-se a discussão e interação, sobretudo, entre dois alunos do grupo, na tentativa de chegar à solução da sétima figura e, posteriormente, descobrir a lei de recorrência, em que o número de triângulos é $n(n+1)/2$ e o número de quadrados é n^2 de acordo com a figura solicitada. Tal discussão em torno do problema constitui um aspecto importante da comunicação que ocorre na sala de aula de Matemática. A sua característica mais marcante é pressupor a interação de diversos intervenientes que expõem ideias e fazem perguntas uns aos outros. O registro alterna-se entre o afirmativo e o interrogativo. “Uma discussão tem sempre um objetivo, por exemplo, a estratégia a seguir para a realização de uma tarefa, a avaliação de uma dada solução, o balanço do trabalho realizado ao longo de todo um período, etc” (PONTE, 2005, p.16).

À pesquisadora, enquanto professora nesse momento, coube assumir o papel de moderadora da discussão, intervindo e orientando o conhecimento que estava sendo adquirido. Analisar e compreender como pensam os alunos, gerar seu entusiasmo e curiosidade foram atitudes essenciais da pesquisadora para o sucesso na resolução do problema.

Professora: *E aí, como estão indo?*

Aluno B: *Tá indo aqui...*

Professora: *A dificuldade está em encontrar o número de triângulos, não é?*

Aluno B: *É...*

A partir da discussão acima, esse grupo, bem como outros, depois de uma boa reflexão conseguiu chegar a um consenso sobre a resolução do problema para a figura de ordem n , apresentando-a assim:

Na figura n , haverá $n^2 + n(n+1)/2$.

Assim, pode se perceber que os momentos de discussão constituíram oportunidades fundamentais para negociação de significados e construção de novo conhecimento, que foi um dos objetivos principais do problema proposto.

Não nos estenderemos, neste trabalho, à análise de todos os passos do roteiro da Resolução de Problemas que foi adotado. Mas, enfatizamos que foi um conteúdo construído totalmente nessa prática metodológica, na qual a discussão que se manifestou, durante a plenária, foi extremamente rica em termos de esclarecimentos e compreensões, levando-nos a identificar dificuldades dos participantes com situações que envolvessem a generalização de uma determinada lei de recorrência quando, diante das discussões e reflexões que se deram no processo de resolução do problema, é que puderam perceber a importância da generalização e o pensamento algébrico foi aflorado. Canavarro descreve o pensamento algébrico da seguinte forma:

[...] no pensamento algébrico se aceita que a notação algébrica convencional (envolvendo letras, sobretudo, as últimas do alfabeto) não é o único veículo para exprimir ideias algébricas, a linguagem natural e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos, podem também ser usadas para expressar a generalização. (CANAVARRO, 2007, p.87)

Aproveitando o ambiente de aprendizagem, após a formalização de todo conteúdo que se pretendia desenvolver naquela aula, para finalizar, a pesquisadora disse-lhes que o problema possibilitou chegar a uma conjectura e que a mesma poderia ser provada e, então, perguntou aos participantes de que forma isso poderia acontecer? Um dos alunos

disse que poderia ser usado o princípio da indução finita, uma vez que o problema estava inserido no universo do conjunto dos números naturais. Como não havia mais tempo para explorar esse princípio, a prova da conjectura ficou para outro encontro.

É neste momento que, muitas vezes, os alunos tomam consciência daquilo que a aula trouxe de novo para o seu conhecimento matemático (SILVESTRE, 2012). Além disso, criar um ambiente de sala de aula que os alunos envolvem-se na apresentação, e argumentação de ideias é fundamental no processo ensino-aprendizagem. Comunicar matematicamente depende essencialmente das oportunidades, do encorajamento e do apoio que é dado aos alunos para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática (NCTM, 2008).

Ao desenvolvermos aulas de matemática com essa perspectiva metodológica, o aluno pode melhor participar, escrever, ter voz e ser ouvido, sobretudo no momento da Plenária, momento mais rico para ocorrer a aprendizagem, uma vez que nesse cenário podem-se obter relevantes construções e compreensões de conhecimento acerca do conteúdo, bem como de procedimentos matemáticos, levando, inclusive, a uma discussão e reflexão sobre a produção e confirmação de conjecturas, a sua justificativa matemática e uma eventual demonstração. Cabe a nós, professores, instigá-lo e levá-lo a pensar sobre sua fala ou sobre o que escreveu.

Conforme Allevato e Onuchic (2014), neste momento novos problemas, relacionados ao problema gerador, são propostos aos alunos, de modo a analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático, introduzido naquela aula, foram, de fato, compreendido, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante.

A proposição ou formulação de novos problemas pode ser tanto por parte do professor quanto por parte do aluno. Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas, é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

REFLEXÕES FINAIS

O texto buscou mostrar a eficácia da resolução de problemas, sobretudo a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para compreender novos conceitos, habilidades e técnicas matemáticas: um motor gerador da aprendizagem, como também um motor fundamental das práticas em sala de aula. Sua aplicabilidade no contexto escolar favorece aos alunos a autonomia e a criatividade ao colocá-la no centro das atividades de sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador no decurso da atividade proposta (problema).

Na sua essência, tal metodologia tem mostrado que a Resolução de Problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção e produção de conhecimento,

colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula de Matemática, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor, como organizador e mediador no decurso dessas atividades (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Por outro lado, não é tarefa fácil desenvolver o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Ele requer tempo, maturidade, muita reflexão e pesquisa por parte do professor. Além disso, a metodologia demanda professores bem preparados para o seu uso, pois precisam selecionar cuidadosamente os problemas; observar os alunos na busca de soluções para esses problemas, incentivá-los e ouvi-los, mantendo-os confiantes na própria capacidade para resolvê-los. Nas salas de aula onde essa metodologia é adotada, os alunos se sentem aptos a dar sentido à matemática que constroem. Professor e alunos, depois dessa experiência, não querem voltar a trabalhar com o método de ensino diretivo, ou seja, aquele em que primeiro vem a teoria, a exposição da matéria, explicações ou exemplos proporcionados pelo professor.

REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. 2005. 370f. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2005.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. *Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Revista Quadrante*, vol. XVI, n.2, 2007.
- FERNANDES, D. et al. *Resolução de problemas na formação de professores de matemática: múltiplos contextos e perspectivas*. Lisboa: Grafis, 1997.
- KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. *Problem-Driven Math: Applying the Mathematics Beyond Solutions*. Chicago, IL: Wright Group/McGrawHill, 2000.
- LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. *Pesquisa Pedagógica: do projeto a implementação*. Tradução de Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008. 328p.
- MOURA, E. A atividade de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação e Matemática*, n.128, p.33-37, 2014.
- NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica, 2009.
- NCTM. *Princípios e normas para a matemática escolar*. 2.ed. Traduzido pela Associação de Professores de Matemática APM. 2008.
- _____. *Professional Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1991.

NUNES, C. B. *O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas*: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Tese de doutoramento (não publicada), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo, Brasil, 2010.

NUNES, C. B.; NOGUTI, F. C. H.; ALLEVATO, N. G. S. Espaço e Forma. In: ONUCHIC, L. R. et al. *Resolução de problemas*: teoria e prática. Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

NUNES, C. B.; ONUCHIC, L. R. Reconstruindo conceito e conteúdos matemáticos através da Resolução de Problemas. In: III SEMANA DE MATEMÁTICA. UNEB, Campus X, 14 a 16 de setembro de 2011. *Anais...* CD ROM.

NUNES, C. B. A resolução de problemas na formação inicial e continuada de professores. In: II SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS – II SERP, Agosto, 2011. *Anais...* Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=serp2011/trabalhos>. Acesso em 23 abr. 2015.

ONUCHIC L. R. A resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*, v.20, n.1. Passo Fundo. Jan./jun. 2013, p.88-104. On line www.upf.br/seer/index.php/rep.

_____. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções & perspectivas São Paulo: Editora UNESP, 1999, pp.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*. UNESP. Rio Claro, v.25, p.73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C.H. A pesquisa científica e a pesquisa pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. et al. *Resolução de Problemas*: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.

SILVESTRE, A. I. O papel do professor na aula de Matemática. *Educação e Matemática. Revista da Associação de Professores de Matemática*, n.118, maio/jun., p.23-27, 2012.

VALE, I. Tarefas com padrões em contextos figurativos: exemplos de sala de aula. In: II SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS – II SERP, ago. 2011. *Anais...* Disponível em <<http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=serp2011/trabalhos>> Acesso em 23 abr. 2014.

VAN DE WALLE, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics*. 4.ed. New York: Logman, 2001.

_____. *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.11, p.79-97, set. 2007. Disponível em: <<http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=232>>. Acesso em 5 abr. 2014.