Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas

Rosana Maria Luvezute Kripka
Moacir Kripka
Paolo Cezar de Nardin Pandolfo
Luiz Henrique Ferraz Pereira
Lori Viali
Regis Alexandre Lahm

RESUMO

Neste trabalho, são apresentados os resultados de uma investigação qualitativa sobre influências do uso de tecnologias interativas em sala de aula, referente à aprendizagem significativa de conceitos de Álgebra Linear. Para alcançá-los propôs-se o desenvolvimento de uma atividade de ensino que visou à aprendizagem significativa de sistemas lineares e a análise dos dados propiciada pela resolução de um problema contextualizado. A coleta de dados ocorreu por meio de observações durante a aula e por materiais escritos produzidos pelos estudantes. A análise dos dados indica que a atividade, realizada de forma colaborativa e em grupos, possibilitou, por meio das reflexões e discussões, (re)significar conceitos sobre resolução algébrica e sistemas de equações lineares. Os estudantes, ao perceberem seus usos na resolução de um problema comum em suas áreas de atuações profissionais, conseguiram relacionar conceitos das disciplinas de Estática e de

Rosana Maria Luvezute Kripka é Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo – São Carlos. Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (EDUCEM). Professora da área de Matemática da Universidade de Passo Fundo, RS. End. para correspondência: Campus I, Bairro São José, 99001-970. Passo Fundo/RS (Brasil). E-mail: rkripka@upf.br

Moacir Kripka é Doutor em Engenharia Civil pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. Professor titular do curso de Engenharia Civil da Universidade de Passo Fundo e professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental. End. para correspondência: Campus I, Bairro São José, 99001-970. Passo Fundo/RS (Brasil). E-mail: mkripka@upf.br

Paolo Cezar de Nardin Pandolfo é graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade de Passo Fundo, RS. End. para correspondência: Campus I, Bairro São José, 99001-970. Passo Fundo/RS (Brasil). E-mail: 102024@upf.br

Luiz Henrique Ferraz Pereira é Doutor em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Professor titular da Universidade de Passo Fundo, RS. End. para correspondência: Campus I, Bairro São José, 99001-970. Passo Fundo, RS (Brasil). E-mail: lhp@upf.br

Lori Viali é Doutor em Engenharia de Produção (Inteligência Artificial) pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professor do Depto. de Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)e do Depto. de Estatística da PUCRS. Professor permanente do PPG em Educação em Ciências e Matemática da Faculdade de Física da PUCRS. End. para correspondência: Av. Ipiranga, 6681, Partenon, Porto Alegre, RS (Brasil). E-mail: viali@pucrs.br

Regis Alexandre Lahm é Doutor em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental pela UFRGS. Professor da graduação em Geografia e professor permanente do PPG em Educação em Ciências e Matemática da Faculdade de Física da PUCRS. End. para correspondência: Av. Ipiranga, 6681, Partenon, Porto Alegre/RS (Brasil). E-mail: lahm@pucrs.br

Recebido para publicação em 31 ago. 2016. Aceito, após revisão, em 23 ago. 2017.

Álgebra Linear. Além disso, ao interagirem com o ambiente do *software* GeoGebra, perceberam a utilidade da resolução algébrica realizada, pois ela possibilitou a construção de um simulador virtual de esforços que, de acordo com variações na geometria da estrutura, fornecia automaticamente os valores das forças nos seus componentes. Assim, eles compreenderam que são os processos algébricos que possibilitam sistematizar os métodos teóricos, que são executados por *softwares* e construídos com o objetivo de facilitar e agilizar os processos de cálculos estruturais. Conclui-se que a atividade propiciou evoluções cognitivas na compreensão dos conceitos envolvendo resoluções algébricas e sistemas lineares, decorrentes da necessidade de resolução algébrica e virtual de um problema proposto na área de Engenharia Civil. Também foi possível identificar que a mediação da aprendizagem por meio de recursos tecnológicos do GeoGebra contribuiu com a (re)significação e com a aprendizagem significativa dos conceitos tratados.
Palavras-chave: Aprendizagem. Álgebra Linear. Tecnologias Digitais. GeoGebra.

Linear Algebra learning: Exploring GeoGebra resources in the calculation of internal forces in structures

ABSTRACT

This paper presents results of a qualitative investigation about influences of using interactive technology in the classroom in meaningful learning concepts of linear algebra. To achieve this objective, it was proposed the development and analysis of data on an educational activity aimed at meaningful learning of linear systems by solving a contextualized problem. The data collection was carried out through observations occurred during class, as well as written materials produced by the students. Data analysis indicates that the activity carried out collaboratively in groups, made possible define concepts of algebraic and linear equations systems resolution though reflections and (re) discussions. By realizing the uses of these tools in solving a common problem in their areas of professional performances, students managed to relate concepts in the courses of Statics and Linear Algebra. Furthermore, by interacting with the software environment GeoGebra, they realized the utility of algebraic solution held, since it enabled them to build a virtual simulator of stresses, according to variations in the geometry of the structure, automatically supplying the values of the internal forces. The students understood that algebraic processes allow the systematization of theoretical methods, performed by software and built in order to facilitate and speed up the structural calculations processes. It was concluded that the activity allows cognitive developments in the understanding of concepts involving algebraic resolutions and linear systems, resulting from the need to solve algebraic and virtually a proposed problem in the area of Civil Engineering. It was also possible to identify that the mediation of learning through technological resources GeoGebra contributed to (re) signification and meaningful learning of concepts treated.
Keywords: Learning. Linear Algebra. Digital Technologies. GeoGebra.

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear em cursos da área de Ciências Exatas, especialmente em cursos das engenharias, têm sido desafiadores no Brasil e no mundo. O rigor matemático, a abstração necessária e, ainda, a compreensão dos conceitos de modo a possibilitar suas aplicações em contextos adequados são dificuldades frequentemente encontradas pelos estudantes.

Celestino (2000), ao investigar sobre as pesquisas realizadas na década de 90, já indicava a importância do desenvolvimento de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, considerando que a compreensão de seus conceitos é indispensável aos profissionais que trabalham na área das Ciências Exatas.

Um modo de facilitar esse processo, e de propor um ensino que propicie aprendizagens significativas, consiste em introduzir a resolução de problemas que estejam próximos às realidades dos estudantes, tendo em vista a significação de conceitos.

Segundo Moreira (1999, p.11): "para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação se relaciona de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do sujeito."

Além disso, na Teoria da Aprendizagem Significativa, a estrutura cognitiva é entendida como uma estrutura hierárquica de conceitos que se constitui por meio de abstrações advindas da experiência do indivíduo (MOREIRA; MASINI, 1982). Segundo essa Teoria, a aprendizagem é considerada significativa se a nova informação se ancora em conceitos relevantes, preexistentes (chamados de "subsunçores"), que interagem com o conhecimento prévio do estudante. Essa interação pode provocar a ampliação de conceitos prévios, tornando-os cada vez mais complexos ou, quando isso não é possível, são criados novos conceitos para armazenar a nova informação recebida. Desse modo, quando a aprendizagem significativa acontece, há uma reestruturação da estrutura hierárquica de conceitos, o que representa a modificação da estrutura cognitiva do indivíduo.

Ausubel (1968, p.37-41, apud MOREIRA; MASINI, 1982, p.13) afirma serem necessários três pressupostos para que a aprendizagem significativa ocorra: (i) que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo; (ii) que exista uma estrutura cognitiva preexistente, com subsunçores adequados; e, (iii) que o estudante tenha predisposição para aprender.

Ao se propor uma atividade potencialmente significativa, que envolve a resolução de um problema relacionado à área de formação dos estudantes, se objetiva despertar seus interesses pela aprendizagem, bem como propiciar um ambiente de ensino que favoreça a construção do conhecimento, estimulando a interação de novas informações com a estrutura cognitiva preexistente dos estudantes, o que propicia a aprendizagem significativa de conceitos.

Além disso, é possível perceber a necessidade de mudanças nos ambientes escolares tendo em vista que, atualmente, o estudante está sendo submetido a um número excessivo de informações e de novas tecnologias.

Perrenoud (1999) ressalta que o uso das Tecnologias de Informação e de Comunicação (TIC) na sociedade contemporânea tem causado transformações nos modos de viver, de comunicar, de trabalhar e até mesmo em formas de pensar, além de indicar que os processos de formação de professores devem propor práticas reflexivas, visando à inovação.

Nóvoa (2009) afirma que o tempo presente é de muitas perplexidades e de incertezas para a Educação e a necessidade de mudanças é perceptível, mas ainda existe muita pobreza nas práticas desenvolvidas nos ambientes escolares. O autor indica que as práticas devem estar centradas no estudante e em problemas concretos, visando a relacionar teoria estudada e prática, além da reflexão e da construção de conhecimento por meio do desenvolvimento de processos investigativos colaborativos.

Além disso, Pozo (2002) afirma que é necessário criar propostas pedagógicas que possibilitem o estímulo do raciocínio, a criatividade na resolução de problemas e a interação através de discussão de ideias e de trabalhos em grupo, de modo que a aprendizagem ocorra coletivamente, mediada pelo diálogo. Assim, torna-se necessária a proposição de práticas pedagógicas adaptadas a esta nova era do ensino, também chamada de "era do conhecimento".

Os recursos tecnológicos digitais, por facilitarem o acesso à interação e ao tratamento de informações e de dados, têm sido cada vez mais utilizados em ambientes escolares. Seus usos propiciam a aproximação da realidade dos estudantes – que usam tecnologias variadas diariamente para diversos fins – da realidade vivenciada no ambiente escolar.

No caso do ensino de matemática, o uso de tecnologias digitais com estudantes, além de motivar e despertar o interesse deles, também permite explorar diversas formas de registro de representação, possibilitando, assim, a investigação de ideias e de objetos de matemática por meio da exploração e da experimentação, atividades que favorecem a interpretação dos problemas e a compreensão dos conceitos.

Dentre os diversos recursos tecnológicos digitais utilizados nos ambientes escolares destaca-se o GeoGebra, um *software* que possibilita trabalhar, ao mesmo tempo, com geometria, álgebra e cálculo e que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg. (HOHENWARTER, 2007).

Muitas investigações em Educação Matemática têm sido desenvolvidas com uso desse aplicativo para alcançar diferentes objetivos. Algumas delas são os estudos de Gravina e Contiero (2011), que apresentam potencialidades dos recursos oferecidos pelo GeoGebra envolvendo conceitos de geometria em atividades de Modelagem desenvolvidas em curso de licenciatura. Os autores indicam que a facilidade da visualização gráfica e de percepção de diferentes registros, propiciados pelo uso do GeoGebra, permitem observar e perceber relações ou estabelecer conjecturas, bem como possibilitam desencadear projetos interdisciplinares em ambientes escolares. Outro exemplo vem de Notare e Basso (2012), que utilizaram o GeoGebra na Modelagem geométrica para a representação da trajetória de uma bola de basquete. O estudo indica que os recursos do aplicativo permitem a construção de conceitos matemáticos a partir da ação do sujeito. Já Corrêa Júnior e Raabe (2015), ao investigarem as contribuições do GeoGebra para o desenvolvimento da habilidade de percepção de padrões em trigonometria, e de realizarem suas representações simbólicas, identificaram que seu uso possibilitou uma experiência diferente na construção do conhecimento matemático, estimulando a aprendizagem matemática, enquanto Basniak (2015) discutiu a necessidade da existência de processos formativos adequados que preparem para o uso de tecnologias digitais na escola, tendo em vista sua adequada integração nos contextos de ensino. Em sua pesquisa, propôs aos estudantes de um curso de licenciatura um aprofundamento teórico sobre usos de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da Matemática, no qual os recursos do GeoGebra foram utilizados para elaborar as atividades investigativas. Elas foram aplicadas aos estudantes dos anos finais da educação básica, com o propósito de propiciar reflexões sobre a contribuição desse recurso tecnológico no contexto investigado. A autora concluiu que os graduandos sentiram mais dificuldades na elaboração de perguntas direcionadas aos participantes das atividades que na manipulação do recurso tecnológico utilizado. Também ressaltou que apenas propiciar a instrumentalização no processo de formação de professores para o uso de tecnologias é insuficiente para possibilitar que futuros professores possam usá-las como parte integrante de suas metodologias de ensino.

Na presente pesquisa, o objetivo é identificar e analisar as influências do uso de tecnologias digitais interativas em sala de aula na aprendizagem significativa de conceitos de Álgebra Linear. A seguir, apresenta-se uma atividade elaborada com objetivo de propiciar a (re)significação de conceitos de resolução de sistemas lineares, cujos participantes eram estudantes de um curso de Engenharia Civil de uma universidade da região Sul do Brasil.

Nessa atividade, potencialmente significativa, se propiciou a aplicação de resolução de sistemas de equações lineares em uma situação problema comum na área de Engenharia Civil, referente ao cálculo de esforços em estruturas.

Para tanto, os estudantes, ao serem questionados com a situação-problema inicial, foram desafiados a realizar:

i) a modelagem matemática para obtenção do sistema linear (que representa o problema abordado);

ii) a resolução algébrica geral do modelo, por meio de técnicas matemáticas apropriadas;

iii) a construção do modelo geométrico genérico com auxílio dos recursos tecnológicos do GeoGebra, que possibilita realizar simulações diversas, com resoluções automáticas dos esforços que atuam na estrutura modificada.

Apresenta-se, a seguir, uma descrição detalhada sobre a atividade aplicada aos estudantes para, posteriormente, apresentar os resultados observados e as discussões referentes a eles.

PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

A pesquisa realizada possui abordagem qualitativa, na qual, conforme Bogdan e Biklen (1994), privilegia-se a compreensão de comportamentos segundo a perspectiva dos sujeitos participantes.

A atividade foi desenvolvida no final do segundo semestre de 2015, em duas turmas regulares da disciplina de Álgebra Linear de um curso de Engenharia Civil de uma Instituição de Ensino Superior da região sul do Brasil. Setenta e um estudantes participaram da atividade. Ela teve a duração de duas horas/aula de 50 minutos e foi desenvolvida no turno da manhã.

Inicialmente se propôs aos estudantes que realizassem a resolução algébrica de um problema que simula o cálculo de esforços em elementos de uma estrutura submetida a uma força externa genérica. Posteriormente se propôs que fossem utilizadas ferramentas disponibilizadas pelo aplicativo GeoGebra de modo a se obter os esforços automaticamente, caso mudanças fossem realizadas na geometria da estrutura, as quais poderiam ser simuladas de modo dinâmico por meio das ferramentas do aplicativo.

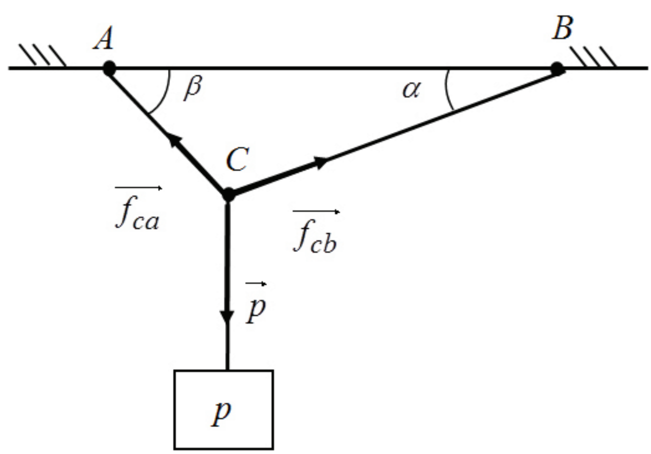
A coleta de dados se deu por meio de observações realizadas pelo professor durante a aula e por materiais escritos produzidos pelos estudantes, os quais foram solicitados conforme detalhamento da atividade apresentado a seguir.

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM

Inicialmente, foi proposto aos estudantes que resolvessem um desafio, apresentado a seguir.

Considere o esquema de forças no diagrama de corpo livre apresentado na Figura 1.

FIGURA 1 – Esquema de forças no diagrama de corpo livre.



Fonte: autores.

DESAFIO: Sendo conhecidos os ângulos α e β e o peso p do objeto suspenso pelas cordas presas nos pontos A e B, é possível escrever um sistema de equações lineares que possibilite determinar os valores das forças, $\overrightarrow{f_{ca}}$ (força na corda esquerda) e $\overrightarrow{f_{cb}}$ (força na corda direita) em função da força peso $\vec{p}$ exercida pelo objeto em suspensão e dos ângulos α e β dados? Caso seja, identifique o sistema (fornecendo sua expressão) e o resolva, fornecendo a resposta em função do peso e dos ângulos dados.

Após a resolução do problema pelo tratamento algébrico dos dados, desenvolvida em grupos, foi solicitado que os estudantes construíssem, no ambiente do GeoGebra, um esquema dinâmico para determinação dos esforços, seguindo este roteiro:

ROTEIRO PARA A CONSTRUÇÃO DO EQUILÍBRIO DE FORÇAS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

1) Crie uma reta de referência (chame-a de "teto", conforme esquema): entrada: y = 4.

2) Clique na ferramenta "novo ponto", selecione "ponto em objeto" e clique sobre a reta obtida uma vez, para criar o ponto "A" e uma segunda vez para criar o ponto "B".

3) Em seguida clique fora da reta para criar o ponto "C" (abaixo da reta).

Observação: Na "Janela de Álgebra" o ponto A e B estão em azul mais claro e o ponto C em azul mais forte, isso significa que os pontos A e B estão vinculados à reta inicial enquanto o ponto C não possui vínculos.

4) Clique na ferramenta: "Reta perpendicular" e selecione "Reta perpendicular" e clique sobre o ponto C e sobre a reta y = 4.

5) Clique na ferramenta "polígono" e selecione "polígono" e, em seguida, clique sobre os pontos A, B, C e A novamente. Clique em mover e em todos os segmentos que definem o lado do triângulo, clique com o botão da direita sobre eles e selecione "Exibir rótulo". Desse modo as letras criadas para representar os lados do polígono ficarão ocultas.

6) Para criar os vetores-força partindo do ponto C, faça:

a) Clique na ferramenta "novo ponto", selecione "ponto em objeto" e clique sobre a reta perpendicular, abaixo do ponto C, para criar o ponto "D".

b) Clique na ferramenta "Reta definida por dois pontos" e selecione a opção "Vetor Definido por Dois Pontos". Em seguida, clique no ponto C e depois no ponto D. Para destacar o vetor, clique na ferramenta "Mover" e com o botão direito sobre o vetor u criado e selecione o objeto "vetor" e, em seguida, propriedades e na aba "estilo", selecione a espessura da linha igual a 5.

Observação: Verifique se o vetor está selecionado no menu esquerdo, pois algumas vezes ao clicar com o botão direito em cima do vetor o GeoGebra acaba selecionando a reta perpendicular.

c) Para que a reta perpendicular fique oculta no desenho, clique com o botão direito do mouse sobre a reta e clique sobre "Exibir objeto" que o gráfico da reta perpendicular vai desaparecer.

d) Para ilustrar os vetores força $\overrightarrow{f_{ca}}$ e $\overrightarrow{f_{cb}}$ clique na ferramenta "Reta definida por dois pontos" e selecione a opção "Vetor Definido por Dois Pontos" e, em seguida, para criar o vetor $\overrightarrow{f_{ca}}$, clique no ponto C e depois no ponto A e repetindo o processo, para criar o vetor $\overrightarrow{f_{cb}}$, clique no ponto C e depois no ponto B.

Observação: o vetor "peso" está com o rótulo "u", e os vetores-força estão com os rótulos "v" e "w", para modificar esta nomenclatura, clique com o botão direito do mouse em cima de qualquer um desses vetores e selecione propriedades. Na aba "Básico" você poderá modificar o nome do vetor para "p" (peso), fca e fcb para os vetores-força selecionando-os no menu esquerdo dentro das propriedades, lembre de destacar estes vetores aumentando a espessura da linha na aba "Estilo".

7) Para fazer a marcação dos ângulos entre os vetores e o "teto", clique na ferramenta: "Ângulo" e em seguida na opção "ângulo", clique em qualquer lugar em cima da reta entre os pontos A e B e depois clique no vetor fcb para criar o ângulo α (ângulo entre o vetor e a reta horizontal). Em seguida, clique no vetor fca e em qualquer ponto da reta horizontal entre os pontos A e B para criar o ângulo β (ângulo entre o vetor e a reta horizontal).

Observação: para reposicionar o rótulo dos ângulos, selecione a ferramenta "mover", clique em "mover" e, em seguida, em cima de um dos ângulos e arraste para onde desejar (note que o GeoGebra não deixa o rótulo se afastar muito do ponto de origem).

8) Identificados os ângulos α e β, podemos inserir as equações referentes às forças $\overrightarrow{f_{ca}}$ e $\overrightarrow{f_{cb}}$ calculadas em função do peso e dos ângulos α e β. Definindo o peso P (em newtons). Entrada: P = 50.

9) Para definir o valor da força $\overrightarrow{f_{ca}}$ faça:

entrada: FCA = P*cos(α)/(cos(α)*sin(β) + sin(α)*cos(β)).

Observação: utilize o ícone à direita da caixa de entrada para selecionar α e β.

10) Para definir o valor da força $\overrightarrow{f_{cb}}$ faça: entrada: FCB = P/(cos(α)*tan(β) + sin(α)).

11) Para verificar que a projeção dos vetores $\overrightarrow{f_{ca}}$ ($\overrightarrow{f_{ca}}_x$, $\overrightarrow{f_{ca}}_y$) e $\overrightarrow{f_{cb}}$ ($\overrightarrow{f_{cb}}_x$ e $\overrightarrow{f_{cb}}_y$) no eixo x se anulam e que a soma da projeção dos dois vetores no eixo y se iguala ao peso p, faça: Entrada: FCAx = - FCA*cos(β) Entrada: FCAy = FCA*sen(β)

Entrada: FCBx = FCB*cos(α) Entrada: FCBy = FCB*sen(α)

12) Para visualizar esses valores na janela da geometria selecione ferramenta "Inserir texto" e selecione a opção "Inserir texto" e clique em algum ponto da tela da geometria. Selecione a caixa da "Fórmula LaTex". Na caixa "Editar" escreva o texto que vai aparecer, por exemplo: "FCA =" e em seguida, clique em objetos e vai aparecer uma lista de variáveis. Selecione o objeto "FCA" e clique em ok, que o valor da força $\overrightarrow{f_{ca}}$ vai aparecer na janela da geometria. Assim, é possível verificar se: $\overrightarrow{f_{ca}}_x - \overrightarrow{f_{cb}}_x = 0$ e que $\overrightarrow{f_{ca}}_y + \overrightarrow{f_{cb}}_y - p = 0$. Faça:

Entrada: FCAx – FCBx   Entrada: FCAy + FCBy - P".

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE E EXPECTATIVAS

No primeiro momento a proposta era desafiar os estudantes a realizar a modelagem matemática de um problema relativamente comum na área da Engenharia Civil.

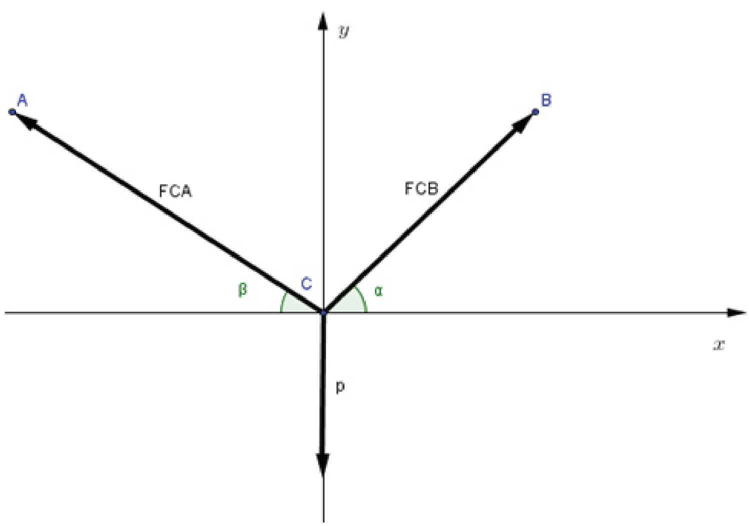
Nesse processo, era esperado que, com auxílio do professor, eles encontrassem um modelo matemático que representasse o problema, usando conhecimentos de Engenharia e de Física (equilíbrio de forças), de Geometria (decomposição vetorial) e que o resolvessem considerando conhecimentos de Álgebra Linear na resolução do modelo obtido, conforme está descrito a seguir e detalhado na Figura 2, considerando que:

FCA: força na corda esquerda ($\overrightarrow{f_{ca}}$),

FCB: força na corda direita ($\overrightarrow{f_{cb}}$) e

P: força peso ($\vec{p}$) exercida pelo objeto em suspensão.

FIGURA 2 – Detalhamento de representação de forças no esquema considerado.



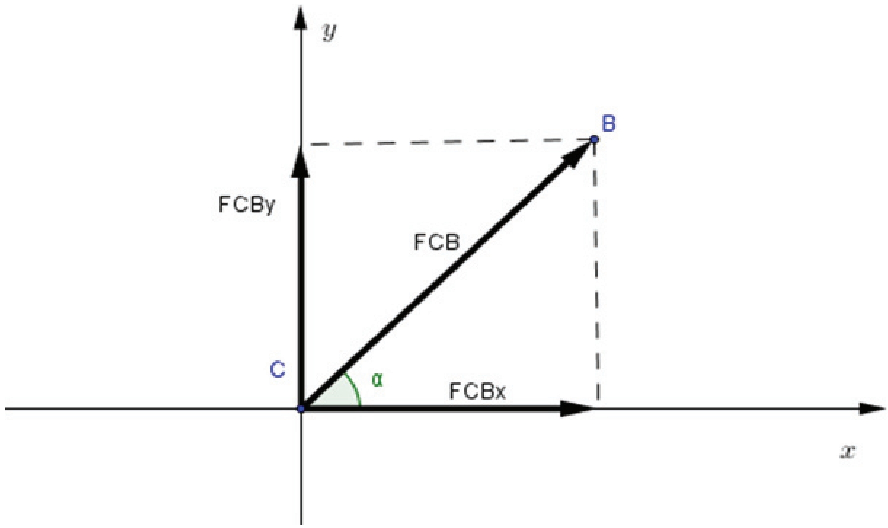
Fonte: autores.

Por meio da decomposição vetorial (ver Figura 3) relativa à força FCB, é possível obter:

FCBx: corresponde a componente de FCB no eixo x ($\overrightarrow{f_{cb\ x}}$) e

FCBy: corresponde a componente de FCB no eixo y ($\overrightarrow{f_{cb\ y}}$).

FIGURA 3 – Decomposição vetorial da força FCB.



Fonte: autores.

Da decomposição vetorial obtêm-se as equações

$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{FCBx}}{\text{FCB}}$ e $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\text{FCBy}}{\text{FCB}}$ que implicam:

$$\text{FCBx} = \text{FCB}\cos(\alpha) \tag{1}$$

$$\text{FCBy} = \text{FCB sen}(\alpha) \tag{2}$$

Realizando o mesmo procedimento em relação à força FCA e considerando

FCAx: corresponde a componente de FCA no eixo x ($\overrightarrow{f_{ca\ x}}$) e

FCAy: corresponde a componente de FCA no eixo y ($\overrightarrow{f_{ca\ y}}$) é possível obter:

$$\text{FCAx} = \text{FCA}\cos(\beta) \tag{3}$$

$$\text{FCAy} = \text{FCA sen}(\beta) \tag{4}$$

Sabe-se que o sistema estará em equilíbrio quando os somatórios de forças horizontais (eixo *x*) e verticais (eixo *y*) forem nulas:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad (5)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad (6)$$

Assim, de (5) e (6) obtém-se:

$$-\mathrm{FCAx} + \mathrm{FCBx} = 0 \quad (7)$$

$$\mathrm{FCAy} + \mathrm{FCBy} - \mathrm{P} = 0 \quad (8)$$

Ao substituir (1) e (3) em (7) e ao fazer o mesmo com (2) e (4) em (8), obtém-se o modelo matemático que representa o equilíbrio de forças. Esse modelo é um sistema de equações lineares, no qual as variáveis são as forças que se desejam determinar FCA e FCB, conforme é apresentado a seguir:

$$\begin{cases} -\mathrm{FCA}\cos(\beta) + \mathrm{FCB}\cos(\alpha) = 0 & (9) \\ \mathrm{FCA}\ \mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{FCB}\ \mathrm{sen}(\alpha) - \mathrm{P} = 0 & (10) \end{cases}$$

Após a obtenção do modelo, procede-se à resolução do sistema linear pelo método da substituição de variáveis, isolando FCA em (9), ou seja:

$$\mathrm{FCA} = \frac{\mathrm{FCB}\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}, \text{ para } \cos(\beta) \neq 0 \quad 11)$$

Substituindo a equação (11) na equação (10) obtém-se:

$$\frac{\mathrm{FCB}\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{FCBsen}(\alpha) - \mathrm{P} = 0 \Rightarrow \mathrm{FCB}\ [\cos(\alpha)\mathrm{tg}\ (\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)] - \mathrm{P} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{FCB} = \frac{\mathrm{P}}{[\cos(\alpha)\mathrm{tg}\ (\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)]}, \text{ para } [\cos(\alpha)\mathrm{tg}\ (\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)] \neq 0 \quad (12)$$

Finalmente, substituindo (12) em (11) consegue-se:

$$\mathrm{FCA} = \frac{\mathrm{P}\cos(\alpha)}{[\cos(\alpha)\mathrm{tg}\ (\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)]\cos(\beta)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{FCA} = \frac{\mathrm{P}\cos(\alpha)}{\left[\cos(\alpha)\dfrac{\mathrm{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)\right]} \Rightarrow$$

$$\mathrm{FCA} = \frac{\mathrm{P}\cos(\alpha)}{[\cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)]}, \text{ para}$$

$$[\cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)] \neq 0 \quad (13)$$

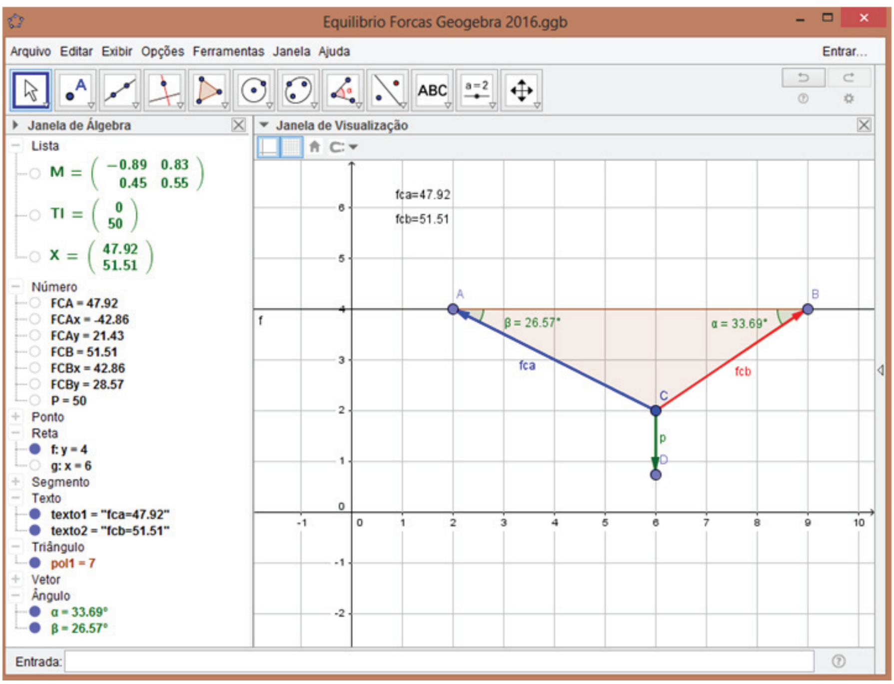
Ao término desse procedimento, esperava-se que os estudantes percebessem a possibilidade de determinar expressões genéricas para se estabelecer os valores das forças,

$\overrightarrow{f_{ca}}$ (força na corda esquerda) e $\overrightarrow{f_{cb}}$ (força na corda direita) dadas em função da força peso $\vec{p}$ exercida pelo objeto em suspensão e dos ângulos α e β dados.

Seguindo o roteiro fornecido, os estudantes passaram a construir o esquema no GeoGebra, *software* com o qual poderiam obter os valores das forças de modo dinâmico, por meio do equilíbrio de forças encontrado pela resolução do sistema, para diversos valores do peso $\vec{p}$ e de diferentes ângulos α e β simulados no ambiente do aplicativo.

Ao término da atividade os estudantes obtiveram um esquema conforme apresentado na Figura 4.

FIGURA 4 – Esquema de equilíbrio de forças construído no GeoGebra.



Fonte: autores.

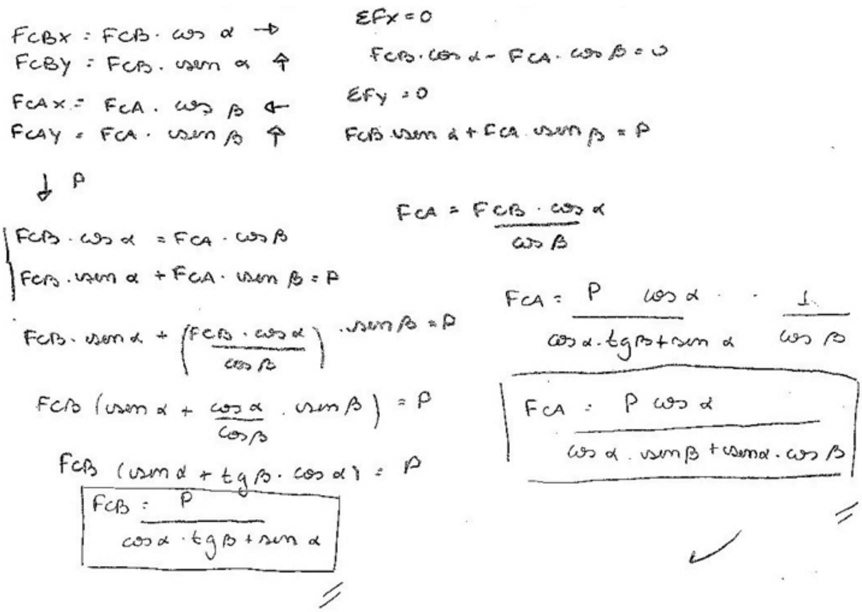
RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os estudantes, trabalhando em grupos, sentiram dificuldades para resolver o desafio proposto, pois geralmente trabalham com valores numéricos e não algébricos em resoluções de problemas semelhantes.

A maioria deles disse não saber como proceder. Então, fez-se necessária a intervenção do professor para ajudá-los a perceber que deveriam utilizar seus conhecimentos da área da Engenharia e de Física para realizar o equilíbrio de forças no esquema, além de usar conhecimentos de Geometria para realizar a decomposição vetorial, uma vez que deveriam deixar os valores desconhecidos indicados pelas letras que os representavam. Ao compreenderem tais fatos, passaram para o processo de obtenção do modelo.

Nota-se, nas resoluções, que alguns grupos explicitaram o fato de o procedimento algébrico gerar um sistema linear, no qual as variáveis eram as forças que se desejava determinar, conforme apresentado na Figura 5.

FIGURA 5 – Exemplo de obtenção de um sistema linear que representa o equilíbrio de forças realizado por um grupo participante.

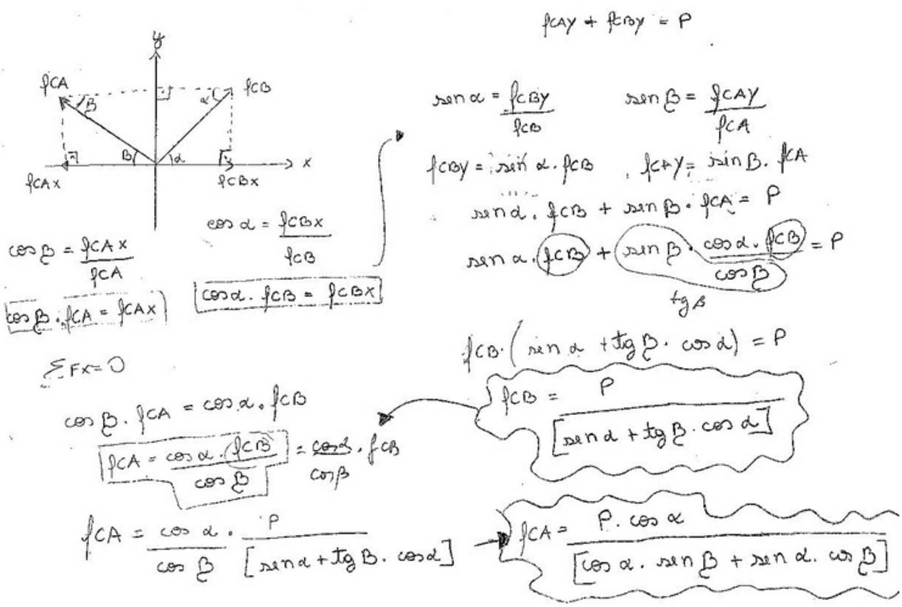


Fonte: autores.

Outros grupos, apesar de encontrarem as expressões genéricas para determinar os valores das forças, não explicitaram que esse processo gerava um sistema de equações lineares e que, ao ser resolvido, forneceria as forças que atuam nos elementos da estrutura.

Também foi possível notar que, em algumas resoluções, os estudantes explicitam o processo de decomposição vetorial (Figura 6) corretamente, mas que, em outras, apenas informam as expressões das componentes nas direções dos eixos *x* e *y*, o que indica o conhecimento prévio de conceitos sobre alguma regra já apreendida (ver Figuras 5 e 7).

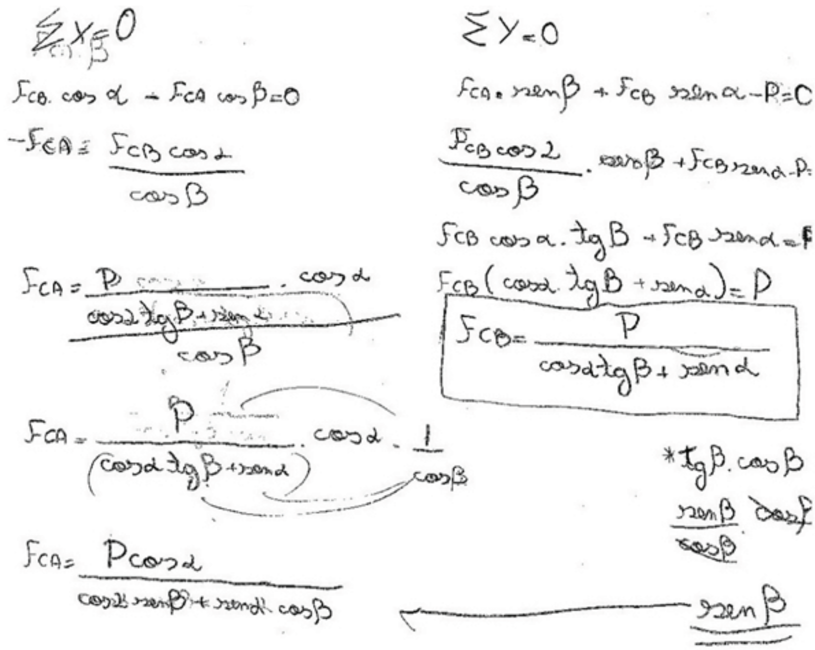
FIGURA 6 – Exemplo de uso de conhecimento de trigonometria na decomposição vetorial realizada pelos estudantes para a obtenção das expressões das forças decompostas.



Fonte: autores.

No processo de decomposição vetorial, necessário para se obter o equilíbrio das forças horizontais e verticais na estrutura, se identifica que ocorreu a aprendizagem significativa. Nesse caso, em todos os grupos, os estudantes acionaram seus conhecimentos prévios ou conceitos "subsunçores" sobre trigonometria, ou sobre regras já conhecidas para obtenção de componentes, conceitos que interagiram com as novas informações relativas ao equilíbrio de forças do problema e com dados genéricos do problema. Na teoria de Ausubel, esse processo é chamado de reconciliação integrativa, cuja interação possibilita aos estudantes explorarem relações entre conceitos já existentes com novos conhecimentos, o que acaba por modificar ou ampliar os conceitos prévios. Nesse sentido, é possível identificar que houve evolução cognitiva pois, segundo Moreira (2012, p.5), "[...] a estrutura cognitiva está constantemente se reestruturando durante a aprendizagem significativa. O processo é dinâmico; o conhecimento vai sendo construído".

FIGURA 7 – Exemplo de obtenção direta das expressões de componentes por meio de regras previamente conhecidas e do detalhamento da simplificação realizada.



Fonte: autores.

Houve outro momento de dúvida para todos os grupos após encontrarem as equações que representavam o equilíbrio. Eles não sabiam como resolver o modelo, pois não havia números nas equações, apenas letras. Nesse momento, o professor ajudou-os a identificar o que seriam variáveis e o que seriam os valores constantes nas expressões. Após o esclarecimento, alguns grupos perceberam que deveriam usar o método da substituição para resolver o sistema obtido, enquanto outros ainda solicitaram ajuda do professor para encontrarem um método de resolução. A seguir, muitos estudantes manifestaram-se relatando dificuldades de manipulação algébrica, sendo poucos aqueles que conseguiram chegar ao resultado sem a intervenção do professor.

Isso levou à conclusão de que os estudantes geralmente sentem dificuldades ao trabalharem com problemas essencialmente algébricos. Dificuldades como essa já foram identificadas em várias pesquisas envolvendo diversos níveis de ensino em relação à aprendizagem de álgebra. Gil (2008), em sua dissertação de mestrado, trabalhou com estudantes da 7ª série do ensino fundamental e concluiu que as principais dificuldades de aprendizagem estão relacionadas à passagem da linguagem usual para a simbólica, decorrentes da modelagem de problemas algébricos e à relação entre a álgebra e a aritmética, que não é facilmente compreendida pelos estudantes. Coimbra (2008), no contexto do ensino superior, propôs uma investigação sobre dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear. Destacou que as concepções matemáticas relativas aos conceitos básicos da Álgebra, construídos ao longo da educação básica, são obstáculos ontogenéticos que geram conflitos nos estudantes quando estes se deparam com novos saberes que devem ser construídos no ensino superior. Ponte (2005, p.37), salienta ainda que, pelo modo como tem sido ensinada, a Álgebra é percebida apenas como um conjunto

> [...] de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações e sistemas de equações [...] Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática.

O autor reconhece que o simbolismo algébrico é parte essencial da Matemática, mas que é necessário estimular a construção desse conhecimento sem perder de vista seus significados, para não recair apenas no formalismo sem sentido.

Os estudantes também sentiram dificuldades em simplificar a expressão final para obtenção das expressões gerais das forças. Nesse caso, a intervenção do professor foi necessária para que eles recordassem as relações trigonométricas que os auxiliariam na substituição que permitisse a simplificação (v. Figura 7, na qual aparece o detalhamento do procedimento realizado).

No entanto, foi possível perceber que o desafio ajudou-os a compreender que as expressões algébricas encontradas, que representavam a solução geral do problema, possibilitariam encontrar soluções particulares para quaisquer valores de peso $\vec{p}$ e de ângulos α e β que respeitassem as condições de existência das soluções genéricas, além do fato de que seriam essas expressões algébricas genéricas que, ao serem inseridas no GeoGebra, possibilitariam a obtenção automática dos esforços nos elementos para situações dinâmicas que seriam simuladas no ambiente do aplicativo.

Após o término da resolução algébrica, os estudantes passaram à construção do esquema no aplicativo, que foi sendo resolvida com poucas intervenções do professor. Cabe ressaltar que a maioria dos grupos participantes conseguiu concluir atividade no tempo estabelecido de aula.

Além disso, ressalta-se que todos finalizaram a parte de resolução algébrica. Entretanto, os grupos que demoraram muito nessa etapa acabaram tendo pouco tempo disponível em aula para terminar a construção do esquema. Outrossim, foi possível perceber que alguns estudantes possuem maior facilidade e habilidade em trabalhar com recursos tecnológicos que outros, o que também interferiu no tempo de resolução das atividades propostas. Cabe salientar ainda que a falta de familiaridade com os recursos do aplicativo também dificultou um pouco as construções nele. Esses fatos indicam que cada estudante tem seu tempo próprio de aprendizagem e que ele é variável. Esta é uma dificuldade que os professores geralmente possuem ao utilizarem recursos tecnológicos como mediadores no processo de construção do conhecimento. Como o tempo de sala de aula era limitado, sugeriu-se que a construção do esquema fosse realizada após a aula, pois o GeoGebra é um aplicativo gratuito que pode ser baixado em qualquer computador pessoal.

A interação com o ambiente do GeoGebra, e o trabalho colaborativo desenvolvido em sala de aula, ajudou os estudantes a perceberem a utilidade da resolução algébrica para a construção do simulador virtual de esforços. Na construção do esquema para obter o equilíbrio automático de forças nos elementos da estrutura, foi necessária a utilização das fórmulas que forneciam os valores das forças, calculadas em função dos valores do peso $\overrightarrow{p}$ e de diferentes ângulos α e β, que poderiam ser modificados, por meio de simulações geradas no ambiente do aplicativo.

Isso fez com que eles percebessem a importância das resoluções algébricas no processo de automatização das resoluções dos problemas de engenharia. As falas ao longo do desenvolvimento da atividade indicam que eles perceberam que são os processos algébricos que possibilitam a obtenção da sistematização dos métodos teóricos, geralmente executados por meio de softwares, que são construídos com o objetivo de facilitar e agilizar os processos de cálculo realizados no dimensionamento de estruturas.

Ao serem questionados se haviam gostado da atividade, os estudantes responderam positivamente, pois puderam perceber que os conhecimentos da Álgebra Linear relativos à resolução de sistemas poderiam auxiliar na resolução de problema reais, familiares a eles. Inclusive, muitos relataram que haviam estudado problemas semelhantes na disciplina de Estática, cursada naquele mesmo semestre, e que a atividade possibilitou-os esclarecer esse tipo de aplicação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verifica-se a importância dos resultados da presente pesquisa quando se considera que os constantes avanços tecnológicos indicam a necessidade de mudanças nos processos educativos, visando aproximar a realidade escolar vivenciada pelos estudantes dos problemas que serão enfrentados na vida profissional.

Além disso, as dificuldades de aprendizagem existentes no ensino de matemática, especialmente em Álgebra Linear, evidenciam a urgência da proposição e da utilização de práticas inovadoras que explorem atividades potencialmente significativas, nas quais os usos das tecnologias digitais possam ser explorados como recursos didáticos mediadores do aprendizado significativo. A utilização desses recursos acelera a incorporação de novos conhecimentos e a retomada dos pré-requisitos.

Concorda-se com Araújo (2009), que indica que, na aprendizagem dos conceitos de Álgebra, é importante que seja possibilitado o desenvolvimento da capacidade de representação de fenômenos e de situações problemas na forma algébrica, pois desse modo é possível evitar que ela seja compreendida apenas como a manipulação de símbolos.

Nesse sentido, ao término desse processo investigativo se conclui que a atividade realizada pelos estudantes possibilitou evoluções cognitivas na compreensão do conceito de resoluções algébricas e de sistemas lineares. Notou-se, também, que essas evoluções ocorreram por meio da resolução genérica e automatizada de um problema contextualizado da área de Engenharia Civil, propiciadas pela a resolução algébrica do modelo matemático obtido. Além disso, foi possível identificar que a construção do modelo dinâmico, no ambiente virtual do GeoGebra, também contribuiu com a (re)significação e com a aprendizagem significativa dos conceitos, além do fato de os recursos tecnológicos terem colaborado para a mediação da aprendizagem por meio da exploração de seus recursos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, L. F. *Rompendo o contrato didático:* a utilização de estratégias metacognitivas na resolução de problemas algébricos. Recife, PE: UFPE, 2009.

BASNIAK, M. I. A produção de tarefas com o uso do software GeoGebra: uma alternativa para discutir as tecnologias digitais no ensino da Matemática. *Revista Tecnologias na Educação* ano 7, n.12, jul. 2015. Disponível em: <http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2015/07/Art16-vol12-julho2015.pdf>. Acesso: 14 ago. 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora. 1994.

CELESTINO, M. R. *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:* as pesquisas brasileiras na década de 90. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

COIMBRA, J. L. *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear*. 2008. 77f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

CORRÊA JÚNIOR, V. J.; RAABE, A. L. A. Uma experiência de uso do GeoGebra na identificação de padrões em trigonometria. *Revista Tecnologias na Educação* ano 7, n.13, dez. 2015. Disponível em: <http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2015/12/Art24-vol13-dez2015.pdf>. Acesso: 14 ago. 2016.

GIL, K. H. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – PPGEDUCEM da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Porto Alegre, 2008.

GRAVINA, M.; CONTIERO, L. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar. *RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, v.9, n.1, jul. 2011.

HOHENWARTER, M. 2007. *GeoGebra* – Informações. Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2016.

MOREIRA, M. A. *Aprendizagem significativa*. Coleção Publicações Acadêmicas do CESPE/UNB. Brasília (DF): Editora da UNB, 1999.

______. *Mapas conceituais e aprendizagem significativa*. 2012. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/>. Acesso em: 20 set. 2014.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. *Aprendizagem significativa* – A teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.
NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. *Renote: Revista Novas Tecnologias na Educação,* Porto Alegre, v.10, n.3, dez. 2012.
NÓVOA, A. Para una formación de profesores construida dentro de la profesión. *Revista de Educación*, n, 350, p.203-218, septiembre-diciembre 2009.
PERRENOUD, P. Formar professores em contextos sociais em mudança: prática reflexiva e participação crítica. *Revista Brasileira de Educação*, n.12. 1999.
PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. *Educação em Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática*, Lisboa, n.85, nov./dez. 2005.
POZO, J. I. *Aprendizes e mestres:* a nova cultura da aprendizagem. Trad.: Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2002.