Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática

Sueli Liberatti Javaroni
Débora da Silva Soares

RESUMO

Neste artigo apresentamos duas pesquisas, a primeira delas concluída e a segunda em fase de desenvolvimento, que têm como base abordagens pedagógicas que propõem o estudo qualitativo de modelos matemáticos como uma estratégia de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Estas propostas estão direcionadas para disciplinas do Ensino Superior, como Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real. Denominamos este aspecto em comum das abordagens pedagógicas como Análise de Modelos e procuramos relacioná-lo, ainda que em um nível preliminar, com a Modelagem Matemática. Além disso, discutimos questões acerca da escolha do tema escolhido e sobre o papel das Tecnologias Digitais quando Análise de Modelos é aplicada.

Palavras-chave: Abordagem Geométrica. Equações Diferenciais Ordinárias. Tecnologias Digitais.

Mathematical Modeling and Analysis of Mathematical Models in Mathematics Education

ABSTRACT

In this paper we present two studies, the first one completed and the second one in development, which are based in teaching approaches that propose the qualitative study of mathematical models as a strategy for the teaching and learning of mathematical concepts. These teaching approaches focus on subjects from Higher Education such as Introduction to Ordinary Differential Equations and Topics of Differential and Integral Calculus. We denominate this common aspect of the teaching approaches as Model Analysis and in a preliminary level we relate it with Mathematical Modeling. Furthermore, we discuss some questions related with the choice of the theme and the role of Digital Technologies when Model Analysis is applied.

Keywords: Geometrical Approach. Ordinary Differential Equations. Digital Technologies.

Sueli Liberatti Javaroni é docente do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru e membro do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática). Endereço para correspondência: Av. Luiz E. C. Coube, 14-01 – CEP 17033-360 – Bauru/ SP – Brasil. E-mail: suelilj@fc.unesp.br

Débora da Silva Soares é doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, *campus* Rio Claro, e membro do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática). Endereço para correspondência: Avenida 24-A nº. 1515 – CEP 13506-900 – Rio Claro/SP – Brasil. E-mail: debbie_mat@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

Muitos dos princípios ou leis que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções ou relações envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos variam. Ao modelar esses fenômenos, frequentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis) presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que regem tal fenômeno podem ser representadas por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas equações diferenciais. Além disso, quando a função incógnita da equação diferencial depender apenas de uma variável independente, tem-se uma equação diferencial ordinária (EDO) (JAVARONI, 2007).

A teoria de equações diferenciais sempre foi fortemente influenciada por sua ligação com a Ciência e a Tecnologia. Daí tem surgido contínua inspiração, transformando problemas de áreas como a Física em problemas matemáticos e, às vezes, em completas teorias matemáticas. O modelo matemático que descreve um objeto em queda livre sem a resistência do ar $m\frac{dv}{dt} = mg$ (onde m é a massa do objeto, v é a velocidade do objeto em queda, t é o tempo e g é a aceleração da gravidade) – é um exemplo desta influência. A importância desse modelo não está tanto na técnica empregada para obter a equação, mas sim na ação evidente que a equação efetivamente descreve o fenômeno.

De maneira geral, como afirma Machado (1988), as variadas equações correspondem às perguntas que surgem na formulação de problemas a serem resolvidos. Portanto, equacionar um determinado problema é traduzir as perguntas que devem ser respondidas em equações. Responder às perguntas formuladas significa resolver as equações. Mais do que isso, significa analisar o comportamento das soluções encontradas.

No caso de uma equação diferencial, ela representa uma pergunta do tipo: *qual é a função cuja derivada satisfaz determinada relação?* Portanto, resolver uma EDO, ou ainda, determinar algebricamente sua solução, significa encontrar a família de funções, definidas e deriváveis até a ordem n, em um intervalo I, que satisfaça a equação dada.

Retomando o exemplo de um objeto em queda livre, a solução geral da EDO ($m\frac{dv}{dt} = mg$) que o representa, é dada por $v(t) = gt+k$, onde k é uma constante. Se para $t =$ 0 tivermos $v(0)=v_0$, obtemos $v(t) = gt + v_0$ que é a solução para essa equação que satisfaz a condição inicial $v(0)=v_0$.

Em geral, a representatividade de um fenômeno da realidade é diretamente proporcional à complexidade matemática do modelo que o representa. Quando o modelo matemático é uma equação diferencial, nem sempre podemos obter informações ou projeções acerca do fenômeno estudado através da solução explícita desta equação, já que na maioria dos casos as equações diferenciais envolvidas não admitem soluções na forma de uma função analiticamente explícita (BASSANEZI, 2002).

No caso das equações diferenciais ordinárias, sua solução é uma família de funções de uma variável em que as operações algébricas e a operação de derivação estão envolvidas. Assim, uma solução analiticamente explícita é aquela que pode ser obtida por uma sequência finita de operações inversas a estas, neste caso, operações algébricas inversas e a operação de integração. Entretanto, o fato de conhecer as operações inversas (algébricas e a integração) não garante a possibilidade de obtenção de soluções explícitas por meio das funções elementares usuais (funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas). De fato, a maioria das EDO não possuem soluções que podem ser escritas na forma elementar (HUBBARD apud HABRE, 2000). E neste caso, para obter as soluções faz-se uso de séries infinitas, método que foi desenvolvido no século XVIII (KLINE, 1972).

Questões relacionadas com as soluções de uma EDO tais como: *Esta equação tem solução? Em caso afirmativo, quantas soluções ela tem? Que ou quais condições adicionais devemos especificar para se obter uma única solução?* são relevantes do ponto de vista das aplicações e são abordadas pela Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. O Teorema da Existência e Unicidade garante condições em que as situações acima são respondidas afirmativamente, e técnicas de análise qualitativa permitem o estudo das soluções mesmo quando não são analiticamente explícitas.

Métodos diferentes do analítico também foram desenvolvidos para o estudo de sistemas de EDO devido à dificuldade de determinar expressões analíticas para suas soluções. Os sistemas de EDO são utilizados para modelar vários fenômenos de áreas científicas e da vida em geral, que envolvem relações entre variáveis. Assim, é necessário utilizar um sistema de EDO, e não apenas uma equação, como modelo para o fenômeno em questão. Um sistema apresenta mais de uma EDO que relaciona as variáveis consideradas. Neste caso, encontrar soluções que possam ser expressas na forma elementar é ainda mais difícil.

Um exemplo de sistema de EDO que representa um fenômeno biológico é o Modelo de Ross-Macdonald, um dos primeiros modelos desenvolvidos para o estudo da evolução da malária em uma região. A ideia central deste modelo é descrever como as populações de pessoas e mosquitos infectados evoluem com o passar do tempo. Uma série de hipóteses de simplificação é utilizada como base para o modelo matemático. Vamos descrever algumas delas no decorrer do texto[1]. O modelo é dado pelas equações a seguir:

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y$$

Nas equações, *X(t)* é a quantidade de pessoas infectadas no instante *t*, *Y(t)* é a quantidade de mosquitos infectados no instante *t*, *N* é a população total de pessoas e *M*

[1] Para uma descrição mais completa do modelo, incluindo todas as hipóteses, veja o trabalho de Basañez e Rodríguez (2004).

é a população total de mosquitos, ambas consideradas constantes para simplificação. A primeira equação descreve como a população de pessoas infectadas evolui ao longo do tempo. O primeiro termo do lado direito da igualdade $\left(\frac{a}{N}\cdot p\right)\cdot Y\cdot(N-X)$ descreve como ela aumenta: conforme mosquitos infectados (*Y*) picam pessoas sadias (*N-X)*. Entretanto, nem toda a picada gera uma infecção, de modo que a chance de a transmissão do parasita realmente ocorrer está relacionada ao número de vezes que cada mosquito pica cada pessoa por dia (*a/N*) e a probabilidade de cada pessoa adquirir a doença (*p*). O segundo termo (*g .X*) descreve como a população de pessoas infectadas diminui: conforme as pessoas se recuperam da doença, segundo uma taxa de recuperação *g*. Aqui a hipótese de que as pessoas não morrem devido à malária simplifica o fenômeno mais uma vez.

A segunda equação do modelo descreve como a população de mosquitos infectados evolui ao longo do tempo. O termo $\left(\frac{a}{N}\cdot c\right)\cdot X\cdot(M-Y)$ descreve como a população aumenta: conforme mosquitos não infectados (*M-Y*) picam pessoas infectadas (*X*). Novamente, nem toda a picada gera a infecção, de modo que a chance da transmissão do parasita ocorrer depende do número de vezes com que cada mosquito pica cada pessoa por dia (*a/N*) e da probabilidade de cada mosquito ser infectado (*c*). Por outro lado, a população de mosquitos infectados diminui conforme os mosquitos morrem ($v\cdot Y$), segundo uma taxa de mortalidade *v*. Aqui, há a hipótese de que os mosquitos não se recuperam da doença.

Da mesma forma que para as EDO, as questões relacionadas com a existência e a unicidade de soluções também são fundamentais para os sistemas de EDO e para esses também o Teorema de Existência e Unicidade garante condições para a existência de soluções. No entanto, ter-se a garantia da existência não é suficiente para determiná-la e assim técnicas de análise qualitativa são fundamentais neste caso. Tanto para o estudo de uma EDO quanto para o estudo de um sistema de EDO, rotinas realizadas no computador também permitem respostas a estas perguntas a partir da simulação.

Os modelos matemáticos do objeto em queda livre e da transmissão da malária fazem parte de duas pesquisas de doutorado desenvolvidas pelas autoras deste artigo, uma já finalizada e a outra em fase final de desenvolvimento. Ambas as pesquisas estão embasadas em abordagens pedagógicas elaboradas por cada uma das pesquisadoras. Cada abordagem teve uma problemática e motivação próprias, porém ambas possuem um aspecto em comum: propõem a análise de modelos matemáticos envolvendo EDO como pano de fundo para o desenvolvimento de conceitos matemáticos previstos nas ementas das disciplinas a que se destinam.

Neste artigo, apresentamos um recorte de cada uma destas pesquisas, exemplificando como a análise dos modelos foi proposta em cada abordagem pedagógica. De modo geral, denominamos estas abordagens pedagógicas como *Análise de Modelos*, e procuramos relacionar esta noção, ainda que inicialmente, com a Modelagem Matemática na Educação

Matemática. Tendo em vista que ambas as propostas envolvem o uso de tecnologias, alguns aspectos relacionados a este tema não poderão deixar de ser mencionados.

ANALISANDO MODELOS MATEMÁTICOS PARA INTRODUZIR CONCEITOS DE EDO

A principal motivação para o desenvolvimento da pesquisa de Javaroni (2007) foi a própria condição do ensino de EDO nos cursos superiores. Como mencionamos na Introdução, ao se modelar um problema aplicado por uma equação diferencial, na maioria dos casos, suas soluções não podem ser expressas como funções elementares, isto é, não possuem soluções analíticas. Entretanto, nos cursos de graduação esse fato não impõe dificuldades maiores aos alunos já que o Teorema de Existência e Unicidade é trabalhado no início da disciplina de EDO e a partir daí uma seleção de equações diferenciais ordinárias e seus respectivos métodos analíticos de resolução são apresentados. Segundo Hubbard (apud HABRE 2000, p.455), "existe uma alarmante discrepância entre a visão de equações diferenciais como a ligação entre a matemática e a ciência e o curso padrão de equações diferenciais." Afirma ainda, "mesmo quando as soluções podem ser escritas analiticamente, a procura destas, através dos métodos de resolução, frequentemente *oculta a questão central: como as soluções se comportam?*" (ênfase nossa).

Quando o foco do ensino de EDO é a abordagem algébrica, os alunos são compelidos à memorização de fórmulas com pouco ou nenhum entendimento dos processos que são modelados e da matemática envolvida na resolução desses modelos, e, portanto, minimizando o processo de Modelagem Matemática, bem como a interpretação do comportamento da solução do modelo analisado (KALLAHER, 1999).

Kallaher (1999) acredita que alunos oriundos das disciplinas nas quais a abordagem prioriza apenas o aspecto algébrico de resolução das equações têm pouco entendimento do que representam as soluções em uma situação de aplicação. O autor, então, sugere que a abordagem qualitativa pode ser adotada para se introduzir um curso de equações diferenciais, ou seja, além das técnicas de resolução analíticas também podem ser utilizados métodos numéricos e ideias geométricas para esboçar soluções aproximadas, com as quais os alunos possam interpretar e justificar o que vêem.

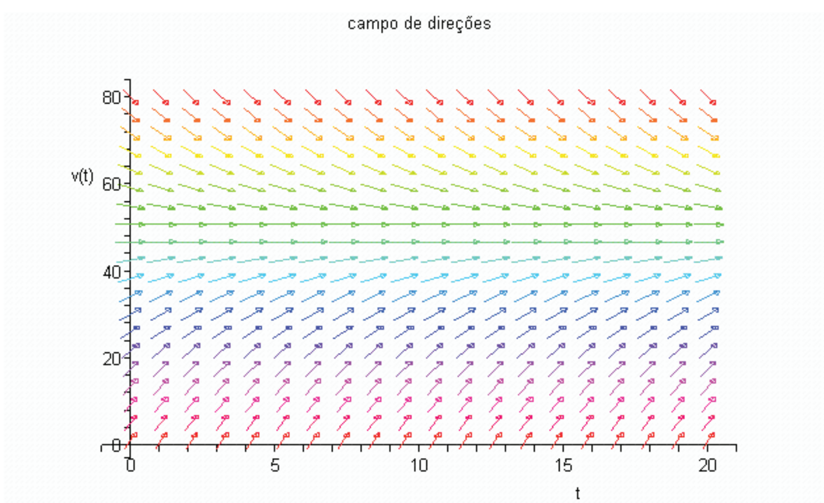
Neste sentido, Javaroni (2007) propôs uma abordagem pedagógica voltada para a disciplina de Introdução à EDO, em geral ministrada em cursos de graduação como Engenharias, Matemática e Física, cujo foco é o estudo qualitativo das EDO. O principal objetivo desta abordagem é propor o estudo de modelos matemáticos clássicos através da análise de suas equações e também de suas soluções e, a partir desta análise, discutir os conceitos matemáticos relacionados a EDO. Para isso, os alunos utilizaram os softwares Maple, Excel e Winplot, assim como lápis-e-papel, para construir os campos de direções das equações e analisá-los, buscando entender como as soluções de cada modelo se comportavam. (Muitas vezes, em uma mesma atividade, os alunos foram levados a utilizar as várias mídias, coordená-las no sentido de analisar o que encontraram em cada uma das situações e confrontá-las).

A importância dos campos de direções encontra-se, justamente, na compreensão de que cada segmento de reta representado é tangente ao gráfico de uma solução do modelo analisado. Assim, mesmo não tendo resolvido analiticamente o modelo, ou seja, mesmo não tendo determinado qualquer solução e não aparecendo o gráfico de nenhuma solução na figura do campo de direções da equação, podem-se fazer deduções qualitativas acerca do modelo estudado.

Por exemplo, o movimento de um objeto em queda, considerando a resistência do ar, pode ser representado pela equação $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$. Este modelo contém três constantes *m, g* e γ. As constantes *g* e γ dependem do objeto em particular que está caindo. É comum referir-se a essas constantes como parâmetros, já que podem tomar um conjunto de valores durante um experimento. Por outro lado o valor de *g* é o mesmo para todos os objetos.

Resolver essa equação consiste em determinar uma função $v(t)$ que a satisfaça. Sem perda de generalidade, pode-se atribuir valores numéricos para *m* e γ. Supondo que $m = 10kg$, $g = 9{,}8m/s^2$ e $\gamma = 2\ Kg/s$, tem-se, portanto, a equação $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$. A imagem abaixo (Figura 1) apresenta os campos de direções para essa EDO.

FIGURA 1 – Campo de direções elaborado no Maple.



Ao observarmos esse campo de direções podemos fazer deduções acerca do comportamento da solução, que é a função velocidade do objeto, sem necessariamente determiná-la algebricamente. Pode-se deduzir que se a velocidade inicial do objeto for de 20m/s, a velocidade aumenta com o passar do tempo; se a velocidade inicial do objeto for de 60 m/s, pode-se observar que a velocidade diminui com o passar do tempo, tendendo a uma velocidade constante, ou seja, a velocidade do objeto, com o passar do tempo, tende a uma velocidade limite.

A análise dos campos de direção com o uso dos softwares serviu de base para a discussão de conceitos matemáticos relacionados com EDO. Por exemplo, os alunos relacionaram as equações aos fenômenos; compreenderam o conceito de campos de direções e o relacionaram com o conceito de derivada; aprenderam a encontrar graficamente as soluções das equações a partir do campo de direções; interpretaram o comportamento das soluções das equações em termos do fenômeno; compararam as soluções analíticas das equações com suas representações gráficas.

O diálogo abaixo exemplifica o entendimento de uma das duplas (Marcos e Shen), participantes da pesquisa de Javaroni (2007), sobre o movimento de queda livre de um objeto com resistência do ar. A dupla já havia desenhado no papel, utilizando-se da planilha de cálculo Excel, o campo de direções para aquele modelo e comparado com o fornecido pelo software Winplot. Neste momento eles analisavam o comportamento das soluções da equação:

> Sueli: Esse comportamento está parecido com o que vocês estavam fazendo aqui? Se você fosse desenhar com o mouse uma curva que sai do ponto (0,0), ou seja, se eu soltar um objeto com velocidade inicial zero, o que acontece com a velocidade dele?
>
> Marcos: Aumenta.
>
> Sueli: Aumenta sempre? Segundo as condições (que assumimos) aí. Ela vai aumentar sempre?
>
> Shen: Não.
>
> Marcos: Até aquela força que a resistência do ar conseguir anular, não é? É aquela força que a resistência do ar conseguisse anular, né? Porque ela é em função da velocidade e a velocidade está aumentando.
>
> Sueli: E se o peso fosse igual à resistência do ar? O que aconteceria com essa velocidade então?
>
> Shen: Zero.
>
> Marcos: Ficaria constante.
>
> Sueli: Será que seria zero?
>
> Marcos: Uma constante. (JAVARONI, 2007, p.81)

Neste exemplo as soluções da equação representam a velocidade do objeto em queda, ao longo do tempo. Como vimos anteriormente, dependendo da velocidade inicial do corpo, a velocidade tende a aumentar ou a diminuir, tendendo a uma velocidade limite, em ambos os casos. O diálogo acima mostra a tentativa de compreender este comportamento em termos do fenômeno físico, exemplificando o desenvolvimento de um dos objetivos da abordagem pedagógica.

Com base na abordagem pedagógica, a pesquisa de Javaroni (2007) teve como objetivo analisar "quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de EDO com ênfase na abordagem geométrica das soluções com o auxílio das TIC[2]" (JAVARONI, 2007, p.21-22). A pesquisa é de cunho qualitativo e para buscar indícios que auxiliassem na compreensão do problema proposto, a pesquisadora coletou dados a partir da aplicação da abordagem pedagógica. Esta aplicação ocorreu em um curso de extensão universitária que teve a duração de 36 horas, cujo objetivo foi analisar os modelos de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst, e da lei aquecimento/resfriamento, através da abordagem qualitativa das equações diferenciais ordinárias.

O curso contou com a participação de 9 alunos, que já haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real (CDI I). Os alunos trabalharam em duplas e as fontes de dados consistiram em: caderno de campo; registro da tela do computador e do diálogo dos alunos com o software Camtasia Studio; e registro em vídeo das atividades desenvolvidas em sala de aula com uma câmera externa.

Na pesquisa de Javaroni evidenciou-se o papel importante dos softwares durante o processo de elaboração das atividades pelos alunos. Segundo a autora, em algumas situações o computador "pode desempenhar o papel de facilitador de contas, em outras, ele surge como um ampliador de memória dos alunos e, em outras situações, ainda, ele possibilita a reorganização do pensamento dos alunos" (JAVARONI, 2007, p.164).

A análise qualitativa dos modelos torna-se interessante quando auxiliada pelas mídias informáticas, visto que é possível, através de uma planilha, realizar os cálculos dos coeficientes angulares, por exemplo, para esboçar os campos de direções; ou ainda, é possível, com um *software* gráfico, esboçar esse campo de direções; ou ainda, com um *software* algébrico, além de esboçar o campo de direções, pode-se calcular a solução da EDO e compará-la com a análise elaborada por meio dos campos de direções. Estas possibilidades ilustram a presença dos softwares nos processos desenvolvidos pelos alunos que participaram como sujeitos da pesquisa realizada pela autora.

Outro aspecto relevante na pesquisa de Javaroni (2007) foi o papel da visualização no desenvolvimento das atividades. Como mencionado anteriormente, os alunos utilizaram os campos de direções das equações para analisar a evolução de suas soluções ao longo do tempo. Esta análise exigiu uma transição entre as representações visuais e analíticas de uma mesma situação. A autora aponta esta transição como um dos grandes desafios da abordagem geométrica, mas também salienta que, em sua opinião, o gráfico dos campos de direções apresenta-se como "uma possibilidade de procurar elucidar o despercebido ao estudar uma EDO" (JAVARONI, 2007, p.169).

---

[2] TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação. Neste artigo, de modo mais geral, estamos nos referindo a Tecnologias Digitais (TD).

ANALISANDO MODELOS MATEMÁTICOS PARA DISCUTIR CONCEITOS DE CÁLCULO

A principal motivação para o desenvolvimento da pesquisa de Soares foi a tentativa de promover uma oportunidade para alunos de Biologia pensarem sobre Matemática de uma forma mais relacionada com sua área de interesse. Para isso, a autora desenvolveu uma abordagem pedagógica em que os alunos foram convidados a analisar um modelo matemático para um fenômeno biológico desde o primeiro dia de aula. A abordagem foi pensada para alunos de um curso de graduação em Biologia e que cursam a disciplina *Matemática Aplicada*, cuja ementa inclui o estudo de funções, noções de limites, derivadas e integrais, e suas aplicações, ou seja, uma ementa similar à de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real (CDI I).

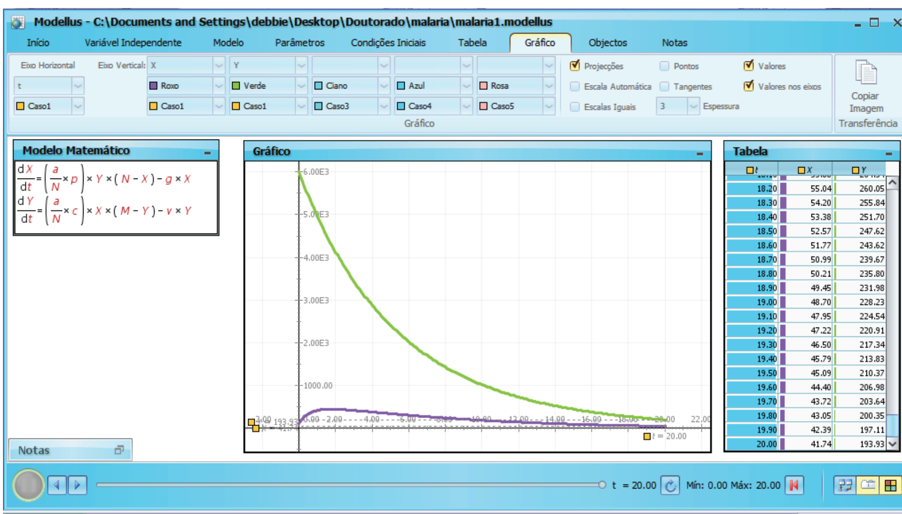
O modelo matemático proposto para análise foi o modelo de Ross-Macdonald para a transmissão da malária, apresentado na Introdução deste artigo. A escolha por um modelo envolvendo um sistema de EDO justifica-se por três aspectos. Primeiro: sistemas de EDO constituem uma “continuação natural” de um curso de Cálculo, já que explicitam as relações entre funções, derivadas e integrais. Segundo: os fenômenos biológicos, em sua maioria, apresentam relações entre várias variáveis e, portanto, seus modelos apresentam mais de uma equação diferencial. Terceiro: em um curso de graduação em Biologia, a disciplina de EDO é opcional e, portanto, não cursada pela maioria dos alunos. Sendo assim, eles não estudam este conteúdo que relaciona de forma clara a sua área de estudo com a Matemática. Além disso, a noção intuitiva de variação que caracteriza a derivada (nem sempre enfatizada nos cursos de Cálculo) continua presente em uma EDO e pode ser usada como uma “ponte” para a introdução de um modelo que usa um conteúdo ainda não estudado pelos alunos (SOARES, 2010b).

Um conjunto de atividades foi elaborado para guiar a análise do modelo pelos alunos. O foco desta análise consistiu no estudo do comportamento de suas soluções e foi desenvolvida de forma que fosse integrada com alguns dos conteúdos da disciplina. Algumas conjecturas embasaram a elaboração destas atividades, e são discutidas em Soares (2010a). Os conceitos da ementa que foram abordados nessas atividades são: funções, tendência de comportamento para valores grandes de tempo, derivada (taxa de variação instantânea e coeficiente angular da reta tangente), máximos e mínimos. Além disso, os alunos também investigaram a influência dos parâmetros do modelo no comportamento de suas soluções, analisaram um modelo matemático modificado e retratos de fase do modelo (i.e., curvas YxX).

Como o curso não prevê o conteúdo de EDO, o objetivo final do trabalho não é o desenvolvimento das técnicas de resolução nem da teoria de análise qualitativa de sistemas de EDO, mas o entendimento do sistema e sua relação com o fenômeno biológico, assim como sua relação com os conteúdos da disciplina. Para que estes objetivos fossem alcançados, a análise dos alunos foi toda feita com base em simulações criadas pelo software *Modellus*[3], que representa as soluções do modelo através de gráficos e tabelas. Assim, o uso do software foi fundamental para o desenvolvimento da abordagem pedagógica.

Na imagem a seguir (Figura 2) é possível visualizar uma tela do *Modellus* com representações gráfica e tabular para as soluções *X(t)* e *Y(t)*, simultaneamente, para um determinado conjunto de valores para os parâmetros. É interessante notar que nesta abordagem pedagógica os alunos não analisam o campo de direções do sistema, mas sim os gráficos das soluções, que são apresentadas de uma forma familiar para eles: como gráficos de funções. Este fato é relevante, uma vez que normalmente o desenvolvimento da análise qualitativa para um sistema fornece trajetórias no plano de fase. Além disso, a diferença entre as representações analisadas pelos estudantes nas abordagens pedagógicas propostas por Javaroni e Soares evidenciam as diferenças entre os seus objetivos, o público alvo e as disciplinas que receberam as abordagens pedagógicas.

FIGURA 2 – Tela do Modellus mostrando modelo de Ross-Macdonald.



A pesquisa de Soares, tendo como base a abordagem pedagógica descrita, possui como foco a seguinte pergunta diretriz: Qual o papel de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos? A pesquisa é de cunho qualitativo e a construção dos dados foi feita com base na aplicação das atividades em turmas regulares da disciplina Matemática Aplicada. Duas aplicações foram feitas: no segundo semestre de 2010 (42 alunos) e no primeiro semestre de 2011 (22 alunos), com algumas modificações de um ano para outro. As fontes de dados foram diversas,

[3] Software criado pelo professor Vitor Duarte Teodoro da Universidade Nova de Lisboa e colaboradores. Este software permite a análise de modelos envolvendo funções, equações diferenciais ordinárias e equações a diferenças finitas. Mais informações podem ser encontradas no site: http:www.modellus.fct.unl.pt

incluindo: caderno de campo, gravações em vídeos das atividades em sala de aula com uma câmera externa, gravações da tela do computador e dos diálogos dos alunos, com o software Camtasia Studio, entrevistas com os alunos e relatórios das atividades entregues pelos alunos. A pesquisa ainda encontra-se em fase final de análise e, por isso, os resultados ainda não serão apresentados. De qualquer modo, como o foco deste artigo está nas abordagens pedagógicas, este fato não trará graves consequências para a discussão que segue.

ANÁLISE DE MODELOS

Há algum tempo a Modelagem Matemática passou a ser vista como uma possibilidade de trabalho em sala de aula, como uma abordagem pedagógica que poderia auxiliar os alunos na aprendizagem da matemática. Diversas pesquisas foram feitas na área (BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1999; BARBOSA, 2001; ARAÚJO, 2002; MALHEIROS, 2004, 2008; JACOBINI, 2004; DINIZ, 2007; BARBOSA; CALDEIRA; ARAÚJO, 2007) e diferentes perspectivas sobre modelagem no âmbito da Educação Matemática foram delineadas. Variações na ênfase dada à elaboração e validação do modelo, na escolha do problema a ser estudado pelo professor ou pelo aluno, na presença da perspectiva crítica da Educação Matemática, são alguns dos fatores que as diferenciam. Mas, em geral, um aspecto em comum a várias perspectivas é o estudo de um problema vinculado a outra área científica que não a Matemática por meio da elaboração de um modelo matemático que o represente e a sua validação.

A elaboração de um modelo matemático, entretanto, não é uma tarefa simples. Deste modo, para várias das perspectivas de modelagem nos processos de ensino e de aprendizagem, a obtenção de um modelo apropriado não é o mais importante, e sim um "caminho" percorrido pelo aluno para compreender o fenômeno estudado e tentar representá-lo matematicamente. Esta dificuldade de elaboração de um modelo está vinculada, em parte, à exigência de um conhecimento amplo sobre o fenômeno e também sobre a Matemática. Além disso, escrever em linguagem matemática as relações existentes em um fenômeno não é uma tarefa trivial.

No processo de elaborar um modelo matemático para alguma situação específica torna-se útil analisar modelos já existentes para esta situação, tendo em vista que eles podem revelar resultados simples, mas importantes sobre o fenômeno e que devem ser considerados na elaboração de um novo modelo, assim como podem revelar hipóteses que não se mostraram relevantes e que podem ser descartadas. As duas abordagens pedagógicas apresentadas neste artigo levam em consideração estas questões.

Como o ponto em comum destas abordagens é propor a análise de modelos matemáticos já existentes, denominamo-las de forma geral como abordagens baseadas na *Análise de Modelos*. Nosso intuito com esta nomenclatura não é segregar estas abordagens dos demais trabalhos em Modelagem Matemática, apenas chamar a atenção para uma diferença de ênfase e de encaminhamento no trabalho com modelos matemáticos na sala de aula. Pelo contrário, acreditamos que a Análise de Modelos possui uma intersecção com a Modelagem Matemática e que ambas as abordagens podem ser desenvolvidas de forma conjunta ou complementar.

Como Soares e Borba (2011, p.231) esclarecem,

> [...] a perspectiva de modelagem que adotamos neste capítulo considera o estudo de um ou mais modelos matemáticos já existentes de um fenômeno, com enfoque na análise do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros neste comportamento, e o entendimento dos dados fornecidos pelo modelo com relação ao fenômeno, como ações do fazer modelagem.

Neste artigo, nosso entendimento é o mesmo, porém apresentamos uma denominação geral para encaminhamentos semelhantes aos desenvolvidos nas pesquisas de doutorado aqui expostas. Entretanto, não ousamos dizer que, ao trabalhar com Análise de Modelos os alunos estão fazendo modelagem no sentido completo da palavra, uma vez que não são os alunos que desenvolvem o modelo matemático. Algumas das atividades que podem estar envolvidas na Análise de Modelos são: (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo.

Estas atividades podem ser utilizadas nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, embasando a discussão de conceitos matemáticos. A pesquisa de Javaroni (2007) ilustra esta possibilidade. Por meio da análise de modelos clássicos de fenômenos físicos, os alunos refletiram sobre conceitos relacionados ao conteúdo de EDO, como campos de direção e derivada, e de forma interligada às situações modeladas.

Além de evidenciar aspectos como a relação entre o modelo e o fenômeno, a existência de limitações nos modelos, e o entendimento da evolução do fenômeno, estas atividades permitem que modelos mais "fiéis" ao fenômeno possam ser estudados pelos alunos mais cedo na carreira escolar. Assim, situações mais próximas daquelas com as quais os estudantes podem vir a lidar enquanto profissionais podem fazer parte das discussões em sala de aula de Matemática desde o início da disciplina, proporcionando um status diferenciado para a mesma. Barreiras conceituais, como o conhecimento de derivada, por exemplo, podem ser contornados de início e introduzidos ao longo do trabalho de análise do modelo e de forma relacionada ao modelo matemático e à situação modelada. A abordagem pedagógica apresentada na pesquisa de Soares ilustra esta possibilidade.

Além disso, diferentes modelos de uma mesma situação (caso existam) podem ser propostos para análise pelos alunos, proporcionando uma oportunidade para o entendimento sobre o papel das hipóteses consideradas e sobre os aspectos diferenciados do fenômeno. Este tipo de atividade também pode proporcionar um ambiente mais propício para a avaliação crítica dos modelos matemáticos, enfatizando as potencialidades e limitações de cada um.

Assim, do nosso ponto de vista a Análise de Modelos incorpora diversas ações que fazem parte do fazer modelagem, enfocando principalmente as ações de reflexão sobre as informações fornecidas pelo modelo com relação ao fenômeno e a análise de suas limitações. Todas estas ações podem ser relacionadas com a discussão de conceitos matemáticos novos para os alunos e, assim como na Modelagem Matemática, proporcionar oportunidade para que estes conceitos sejam discutidos em conexão com alguma situação que evidencie a utilidade da Matemática para a área de interesse dos alunos, uma questão bastante importante para estudantes que não se formam como matemáticos.

DUAS QUESTÕES EMERGENTES

Nas duas pesquisas apresentadas neste artigo, a escolha dos modelos e, consequentemente dos temas a serem estudados, foi feita pelas professoras pesquisadoras. Entretanto, isso não significa que em outras situações a escolha do tema não possa ser feita pelos alunos. Como afirma Bassanezzi (2002, p.46), "é muito importante que o tema seja escolhido pelos alunos, que desta forma, se sentirão co-responsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva". Porém acreditamos, que uma maior "negociação" do tema, entre professor e alunos pode ser necessária, tendo em vista que para alguns fenômenos os modelos existentes podem ser demasiado avançados para o nível dos alunos. Como afirma Bassanezzi (2002, p.46) "… a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção dos dados, visitas, bibliografia, etc.".

Uma segunda questão diz respeito ao uso e ao papel das tecnologias digitais (TD) no processo de análise de um modelo. Dependendo do caso, as TD podem ser de grande valia nesta análise. Por exemplo, quando se trabalha com modelos cujas soluções analíticas são difíceis de encontrar, pode-se utilizar um software geométrico na elaboração do campo de direções e/ou pode-se fazer uso de um software algébrico que, além do esboço do campo de direções, pode determinar suas soluções e assim relacionar o comportamento geométrico com o algébrico, buscando a compreensão da transição entre as representações múltiplas das funções soluções.

O modo como entendemos as TD nos processos de ensino e aprendizagem é uma questão relevante. Como sugerem Borba e Penteado (2001) é importante que o uso das TD esteja em consonância com a perspectiva de aprendizagem do professor. Assim como Borba e Villarreal (2005), entendemos que a perspectiva de seres-humanos-com-mídias proposta por eles está em consonância com a Modelagem Matemática enquanto abordagem pedagógica. Mais ainda, acreditamos que esta perspectiva também está em consonância com a Análise de Modelos.

O construto teórico seres-humanos-com-mídias expressa a ideia de que a unidade produtora do conhecimento é formada por um coletivo de atores humanos e não-humanos.

Estes atores não-humanos podem ser as mídias, como lápis-e-papel eou a informática. Além disso, este construto intenta evidenciar a relação de mútua influência que existe entre o ser humano e a mídia: o ser humano molda a mídia enquanto a utiliza, e simultaneamente a mídia molda a maneira de pensar do ser humano. Neste sentido, uma vez que a unidade produtora do conhecimento é seres-humanos-com-mídias, "o conhecimento produzido sofre drásticas mudanças quando mídias qualitativamente diferentes são incorporadas aos coletivos seres humanos-mídias" (BORBA, 2002, p.151).

Como foi mostrado em pesquisas como a de Araújo (2002), Malheiros (2004, 2008), Javaroni (2007) e Diniz (2007), as TD possuem um papel central nos processos de ensino e aprendizagem vinculados ao trabalho com Modelagem Matemática em sala de aula. O uso de softwares pelos alunos para a elaboração de gráficos, o teste de conjecturas, a validação de modelos, exemplifica o papel ativo das TD. De forma semelhante, acreditamos que as TD também têm um papel ativo na Análise de Modelos. Como o objetivo aqui é analisar modelos já existentes, softwares podem ser essenciais para o estudo do comportamento das soluções, na experimentação de valores para os parâmetros e no entendimento do fenômeno. Neste processo o aluno pode utilizar o software como um ambiente que o permite experimentar e, assim, elaborar conjecturas. É neste sentido que entendemos a harmonia entre seres-humanos-com-mídias e Modelagem Matemática e entre seres-humanos-com-mídias e Análise de Modelos.

A escolha do tema, o papel das tecnologias, a estruturação de uma nova proposta curricular para os cursos de Cálculo e de EDO, um estudo sobre outros tipos de modelos matemáticos envolvendo outros conteúdos, são algumas das questões vinculadas à Análise de Modelos que ainda precisam ser investigadas mais profundamente. Este é um campo aberto para novas pesquisas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresentamos duas pesquisas que propõem o estudo qualitativo de modelos matemáticos envolvendo EDO como uma abordagem pedagógica para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos previstos nas ementas das disciplinas Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Matemática Aplicada (uma disciplina muito próxima do Cálculo Diferencial e Integral I). A estas abordagens denominamos Análise de Modelos. Com esta proposta, acreditamos que um enfoque diferenciado pode estar atrelado à Modelagem Matemática como estratégia pedagógica, no qual a análise crítica de modelos é enfatizada.

Nossa intenção com este artigo não é esgotar o assunto, uma vez que temos ciência da necessidade de mais pesquisas envolvendo a Análise de Modelos. Pelo contrário, temos o intuito de apresentar esta noção que surgiu a partir de duas abordagens pedagógicas elaboradas para disciplinas diferentes, mas que possuem algo em comum entre si. As relações que aqui apontamos entre Análise de Modelos e Modelagem Matemática ainda são bastante iniciais, porém mais contribuições teóricas para esta relação serão um dos frutos da pesquisa de Soares.

Com as discussões aqui realizadas esperamos contribuir para o entendimento do papel dos modelos matemáticos nos processos de ensino e aprendizagem, apresentando um encaminhamento diferenciado para o trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. Em particular lançamos um convite para a mudança do paradigma presente no ensino de EDO, de modo que a questão central deste estudo, o comportamento das soluções das equações e o estudo da evolução do fenômeno por elas representado, possa novamente estar em foco.

Agradecimentos

Mesmo não sendo diretamente responsáveis por este artigo, agradecemos a Ana Paula dos Santos Malheiros, Daise Lago Pereira Souto, Claudinei de Camargo Santana, Rúbia Barcellos Amaral Zulatto, Rejane Faria, Silvana Claudia dos Santos e Marcelo de Carvalho Borba por suas críticas e sugestões à qualificação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:* as discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores.* 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:* pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. (Biblioteca do Educador Matemático).

BASAÑEZ, M.-G.; RODRÍGUEZ, D. J. Dinámica de transmisión y modelos matemáticos em enfermedades transmitidas por vectores. *Entomotropica*, v.19, n.3, p.113-134, 2004.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto, 2002.

BORBA, M. C. O computador é a solução: mas qual é o problema? In: SEVERINO, A. J.; FAZENDA, I. C. (Org.). *Formação Docente: Rupturas e Possibilidades,* Campinas: Papirus Editora, p.151-162, 2002.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A., Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas. In: E. K. FAINGUELERNT, F. C. GOTTLIEB (Org.). *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*, Rio de Janeiro: Art Bureau, p.75-94, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Matemática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer. 2005.

DINIZ, L. N. *O Papel das Tecnologias de Informação e Comunicação nos Projetos de*

Modelagem Matemática. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.
HABRE, S. Exploring Student's Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reform Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, v.18, p.455-472, 2000.
JACOBINI, O. R. *A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula.* 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.
KALLAHER, M. (Ed.). *Revolutions in Differential Equations:* exploring ODEs with Modern Technology. Washington, USA: The Mathematical Association of America, 1999.
KLINE, M. *Mathematical Thought Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press, 1972.
MACHADO, N. J. *Matemática por assunto:* noções de cálculo. São Paulo: Scipione, 1988.
MALHEIROS, A. P. S. *A Produção Matemática dos Alunos em um ambiente de Modelagem.* 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
______. *Educação Matemática* online*: a elaboração de projetos de Modelagem.* 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.
SOARES, D. S. Investigando Sistemas Dinâmicos em um Curso de Biologia. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010a, Salvador. *Anais...*, Salvador, 2010, 1 CD-ROOM.
______. Investigating Dynamical Systems in a Calculus Course for Biology Majors. In: PINTO, M. F.; KAWASAKI, T. F. (Ed.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v.2, p.109, Belo Horizonte, Brazil: PME. 2010b.
SOARES, D. S.; BORBA, M. C. Fenômeno Biológico, Sistema Dinâmico e Noções de Cálculo I: uma proposta. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.* Londrina: Eduel, 2011. p.227-247.

Recebido em: maio 2012 **Aceito em**: jul. 2012