

A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos¹

Tiago Pereira
Fábio Alexandre Borges

RESUMO

As geometrias não Euclidianas foram inseridas recentemente nas discussões acerca dos currículos da disciplina de Matemática nas escolas brasileiras. Pensando no caráter ainda de “novidade” deste tipo de exploração em sala de aula, pesquisas começaram a surgir recentemente e vêm intensificando-se cada vez mais. Nesse sentido, objetivamos, com o presente texto, apresentar uma pesquisa bibliográfica acerca da geometria dos fractais no ensino de Matemática. Foram investigados artigos científicos e relatos de experiências de periódicos científicos *online* brasileiros nos últimos dez anos. Os textos encontrados inicialmente foram sendo filtrados de acordo com nossos objetivos, resultando num *corpus* de 12 artigos, os quais foram lidos na íntegra. Realizamos um processo de categorização a partir dos objetivos gerais de cada texto, cujo resultado foram cinco categorias: o ensino de Geometrias não Euclidianas por meio de softwares educacionais, as Geometrias não Euclidianas na formação de professores, potencialidade dos fractais para a exploração de outros temas matemáticos, o ensino de Geometrias não Euclidianas por meio de materiais manipuláveis e concepções acerca das Geometrias não Euclidianas de docentes e discentes. Ao final, trazemos um exemplo de aplicação para professores de Matemática, o qual, acreditamos, reflete algumas características essenciais dessas geometrias ao serem abordadas em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Fractais. Geometrias não Euclidianas. Pesquisa bibliográfica.

¹ Este artigo é uma versão estendida do trabalho *Categorizando as pesquisas acerca de geometria dos fractais via periódicos científicos brasileiros*, apresentado pelos autores no XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 13 a 16 de julho de 2016.

Tiago Pereira é acadêmico de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão – e participante do Programa de Iniciação Científica 2015/2016.

E-mail: tiago025pereira@hotmail.com

Fábio Alexandre Borges é Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática. Docente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão.

E-mail: fabioborges.mga@hotmail.com

Recebido para publicação em 14 out. 2016. Aceito, após revisão, em 30 ago. 2017.

Acta Scientiae	Canoas	v.19	n.4	p.563-581	jul./ago. 2017
----------------	--------	------	-----	-----------	----------------

The fractals geometry in Mathematics education: A literature review categorized of Brazilian research of the last ten years

ABSTRACT

Non-Euclidean geometries were recently inserted in discussions about the curriculum of mathematics subject at school. Thinking about the character even of “novelty” of this type of operation in the classroom, research began to emerge recently and has been increasing more and more. In this sense, we aim with this text to present a literature about the geometry of fractals in the teaching of Mathematics. They were investigated scientific papers and reports of Brazilian scientific journals online experiences in the last ten years. The texts were initially found being filtered according to our goals, resulting in a corpus of 12 articles, which were read in their entirety. We performed a categorization process from the general objectives of each text, which resulted in five categories: the Geometries teaching non-Euclidean through educational software, non-Euclidean geometries in teacher training, capability of fractals to the exploitation of other mathematical topics, the Geometries teaching non-Euclidean through manipulative materials and conceptions of non-Euclidean geometries of teachers and students. At the end, we bring an application example for mathematics teachers, which we believe reflects some essential features of these geometries to be addressed in the classroom.

Keywords: Mathematics Teaching. Fractals. Non-Euclidean geometries. Bibliographic research.

INTRODUÇÃO

O artigo aqui apresentado reflete os resultados de uma pesquisa do Programa de Iniciação Científica da Universidade Estadual do Paraná/Campus de Campo Mourão, desenvolvida pelo primeiro autor e sob a orientação do segundo. O principal objetivo almejado foi a realização de uma pesquisa bibliográfica acerca da geometria dos fractais no ensino de Matemática. Além desta busca bibliográfica, houve também a criação de um grupo maior, o qual envolveu três acadêmicos de Licenciatura em Matemática, um estudante do Ensino Médio do Programa de Iniciação Científica Júnior e três docentes. Para este grupo, o objetivo geral foi o de propor e aplicar atividades em sala de aula envolvendo esta geometria, verificando sua potencialidade pedagógica. No presente texto, optamos por trazer os principais apontamentos das pesquisas brasileiras nos últimos dez anos, bem como, ao final, sugerir uma atividade de ensino em consonância com o que apontam as referidas pesquisas.

A temática Fractal é extremamente nova no cenário educacional brasileiro, sendo trazida a tona significativamente apenas na última década (anos 2000), especialmente em nosso Estado, o Paraná. Em 2008, a mesma foi considerada na formulação do documento Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná – DCE – (PARANÁ, 2008) como um tópico das Geometrias não Euclidianas, inserida ainda no conteúdo estruturante Geometrias.

Esta inclusão, por sua vez, fomentou inúmeras discussões e trabalhos acerca do assunto, com as mais diversas abordagens e focos. O intuito de investigar artigos e relatos de experiência publicados em periódicos de revistas *online*, foi o de fazer um levantamento quantitativo dos textos e analisar qualitativamente do que os mesmos tratam, com base em

seus objetivos gerais, com vistas a contribuir com todos aqueles que almejam discutir a geometria dos fractais numa perspectiva de ensino de Matemática. Desta forma, buscamos ampliar as possibilidades pedagógicas no ensino desta temática, considerando seu caráter de desconhecimento por parte dos docentes (SANTOS, 2009).

Na sequência, discorreremos acerca da relação entre os fractais e o ensino de Matemática. Feito isso, detalhamos nossos procedimentos metodológicos adotados, com destaque para uma categorização acerca das principais características encontradas em nosso *corpus* de pesquisa. Por fim, trazemos um exemplo de atividade (Fractal Árvore Pitagórica), numa tentativa tanto de exemplificarmos nossas discussões, como de contribuir com mais uma possibilidade real de atividade a ser utilizada por docentes.

OS FRACTAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

O desenvolvimento e disseminação da geometria dos fractais tem como precursor o francês Benoît Mandelbrot, que a nomeou e apresentou os primeiros estudos sobre essa geometria. Mandelbrot foi o responsável por investigar propriedades e comportamentos de figuras mais complexas as quais a geometria euclidiana não é capaz de representar. Dentre as características principais de um fractal, temos as propriedades de autossimilaridade, de dimensão fracionária e complexidade infinita (BARBOSA, 2005).

Essa geometria vem ganhando espaço nos últimos anos, mesmo que ainda timidamente, devido à sua versatilidade, beleza e pela sua capacidade avançada de análise a objetos da natureza. Um reflexo disso tem sido seu uso recorrente nas diversas áreas da ciência, tecnologia, arte e, especialmente, no cenário educacional, que passa por constantes mudanças. Em uma destas alterações em esfera estadual, a geometria dos fractais foi inserida como conteúdo estruturante no currículo escolar paranaense, passando a ser uma das matérias dos ensinos Fundamental e Médio à qual os alunos devem ser apresentados. Ou seja, existe hoje a indicação de que esta temática deve ser levada para as aulas de Matemática. Entretanto, os professores que estão em atuação não tiveram uma formação que contemplasse este assunto, devido ao caráter de novidade em sua inserção curricular, já que os cursos de licenciatura também acompanham as indicações feitas pelas instâncias reguladoras do ensino em nosso país.

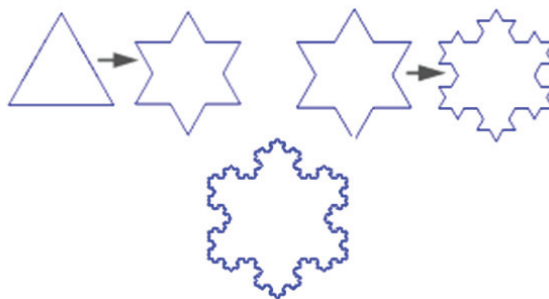
Para conseguir atender as recomendações das DCE, é necessário que os professores tenham o domínio do conteúdo que será abordado. Porém, pesquisas como a de Santos (2009), ao avaliar o desempenho de professores da rede pública em um curso sobre Geometrias não Euclidianas, alertam para um despreparo dos docentes até mesmo para com a Geometria Euclidiana axiomática, o que, segundo a autora, dificulta a diferenciação entre as geometrias. Nas palavras da autora:

[...] o problema com o ensino das Geometrias não Euclidianas envolve um problema mais amplo, já que os professores estão se formando, sem ao menos ter disciplinas voltadas à geometria no seu curso. [...] Encontramos professores que desconheciam

a Geometria Euclidiana axiomática, que nunca tinham ouvido a palavra axioma, e se mostravam surpresos e admirados com o que lhes estava sendo apresentado. Esse pode ser um dos motivos que levaram os professores a apresentarem [...] dificuldade em diferenciar as Geometrias não Euclidianas da Geometria Euclidiana. (SANTOS, 2009, p.121)

A ausência de discussões deste tipo na formação de professores é um dos obstáculos a serem enfrentados na Educação Básica. A fim de auxiliar na discussão acerca da importância da abordagem das diferentes geometrias no ensino e fornecer materiais que possam ser usados pelos professores em sala de aula, Barbosa (2005) pontua possíveis justificativas para o uso desta, que são: as conexões que essa geometria oferece com as demais ciências; a importância, ou mesmo necessidade, do uso desta para se explicar fenômenos e objetos da natureza; o desenvolvimento do senso estético dos alunos via construção de fractais no papel; a difusão do acesso aos computadores e tecnologias da informática para construções em *softwares* e a sensação de surpresa por parte dos alunos, considerando que, diferentemente da geometria euclidiana, que trabalha com uma determinada ordem, as não euclidianas introduzem uma noção de desordem. A título de ilustração, trazemos a seguir um famoso fractal, denominado Floco de Neve de Koch. Nele, podemos observar as mudanças que a figura vai assumindo em cada uma das iterações² realizadas.

FIGURA 1 – Níveis do Floco de Neve de Koch.



Fonte: os autores.

Barbosa (2005) evidencia algumas das potencialidades da geometria fractal para o ensino de matemática, destacando o estudo desta geometria como possibilidade da abordagem de mais de um conteúdo matemático simultaneamente e de maneira lúdica.

² Na construção de um fractal qualquer, existe um procedimento pré-determinado a ser realizado em cada uma das etapas. Por exemplo, no caso da Figura 1, em cada uma das etapas deve-se dividir cada um dos segmentos em três partes iguais, retirando-se o segmento central e substituindo-o por um triângulo equilátero, porém sem um dos lados. Cada vez que este procedimento é realizado, temos uma iteração. Este processo poderá ser realizado sucessivamente, quantas iterações se desejem ou sejam possíveis.

Desta forma, o professor tem a vantagem de inter-relacionar diferentes áreas e conceitos da Matemática com uma única atividade. A título de exemplo, Barbosa destaca:

Estudar as relações numéricas de seus elementos, conforme as iterações sucessivas; por exemplo, contagem, perímetros, áreas e volumes. [...] Outra forma é explorar os fractais despertando ou desenvolvendo o senso estético, pela visualização dos mesmos, quando o professor, em nosso entender, deve procurar captar o educando para o belo e o harmônico no fractal. (BARBOSA, 2005, p.71)

A exploração numérica, mencionada por Barbosa (2005), ocorre quando o professor aborda alguns conceitos presentes no fractal (como perímetro, área, número de figuras, etc) e os relaciona com a quantidade de iterações. Nesta relação, possibilita-se a exploração não somente das características do fractal, mas dos conceitos citados. Além disso, a atividade comum de generalizar o número de iterações em um fractal acabam por possibilitar também a exploração de elementos algébricos. Ademais, a construção de fractais estimula o senso estético do aluno, proporcionando a criação de uma figura matemática que atrai sua atenção por ser, normalmente, desconhecida, fazendo-o imaginar qual formato tal figura assumiria nas próximas iterações e estimulando sua imaginação. Não podemos esquecer também do fato de que, em muitas das atividades, é exigido o manuseio de objetos de medição, como régua e compasso, o que contribui diretamente também para a compreensão de outros assuntos (geométricos, sistemas de medidas etc.).

Na sequência, detalhamos nossas estratégias metodológicas adotadas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Iniciamos uma revisão bibliográfica adotando a perspectiva de Feldens (1981), que trata este tipo de coleta de dados no campo educacional como uma ferramenta capaz de dar foco ao seu problema de pesquisa, delimitando seus objetivos e correlacionando a mesma a outras desenvolvidas no mesmo cenário. Esta também permite destacar a importância do projeto e organizar seu resultados prévios, possibilitando ao leitor a compreensão do fenômeno estudado e como esse se ajusta no contexto geral da pesquisa.

A revisão bibliográfica realizada constituiu-se em três etapas. Na primeira delas, houve o levantamento dos principais periódicos científicos brasileiros com foco em Educação Matemática, bem como outros relacionados à área de Educação, que costumam aceitar trabalhos que discutam o ensino de Matemática. Deste levantamento, criamos uma listagem de 28 periódicos científicos de publicação *online*, com os quais realizaríamos as buscas para encontrar textos que abordassem o tema geometria fractal. A escolha pelos periódicos do tipo *online* se justifica pela maior facilidade de acesso aos textos publicados.

O próximo passo foi a elaboração de critérios de triagem para seleção dos documentos. Duas questões foram levadas em consideração na hora da busca: período de

publicação dos textos a serem analisados e como realizar a seleção. Decidimos investigar textos publicados nos últimos dez anos (2006 a 2015), que viessem como resultado de uma busca usando-se as palavras-chave “fractal”, “fractais” e “não euclidianas” na ferramenta de busca das revistas. Feita a busca, encontramos 27 textos utilizados como objeto da revisão bibliográfica que se iniciava. As primeiras análises foram feitas e nos forneceram alguns dados, como: quantidade de textos por revista, uma tabela com as palavras-chave de cada texto, ano das publicações, quantia de vezes que as palavras fractal, fractais e Não euclidianas apareceram dentro dos textos, instituições nas quais as pesquisas estavam vinculadas, entre outros dados.

A segunda etapa da revisão foi caracterizada por um direcionamento dado a pesquisa, que resultou na filtragem dos textos que viriam a ser analisados. A princípio foi decidido analisar-se apenas os artigos científicos e relatos de experiência (excluindo-se, por exemplo, resenhas encontradas). Estabelecido este posicionamento, o objeto de pesquisa foi reduzido para vinte e três textos, que foram novamente submetidos a uma tabulação de dados quanto a suas palavras-chave para, futuramente, cotejar tais levantamentos com os resultados obtidos.

Após a seleção, os vinte e três textos foram lidos na íntegra, sendo produzidos resumos de todos eles. Para estes resumos, foram destacados os seguintes aspectos: referenciais teóricos utilizados, objetivos de cada texto, procedimentos metodológicos utilizados e principais resultados alcançados, num processo de maior aproximação com os textos considerados como nosso *corpus* de pesquisa.

A terceira e última etapa originou-se após percebermos que a gama de artigos científicos e relatos de experiência selecionados possuíam enfoque ainda bastante diversificado, ou seja, usavam os fractais ou a geometria dos fractais muitas vezes para exemplificar situações ou mesmo citações de pouca significância para a pesquisa desenvolvida. Partindo disto, articulamos uma nova filtragem dos artigos e relatos, com base nos conhecimentos adquiridos acerca do material. Essa filtragem selecionou apenas os textos que tinham os fractais como um de seus objetos de estudo, relacionados com o ensino de Matemática, totalizando doze textos entre artigos científicos e relatos de experiência para a nossa análise.

Com os textos em mãos, novas leituras foram realizadas. Neste momento, decidimos realizar uma categorização das pesquisas selecionadas a partir dos objetivos principais anunciados em cada um dos textos. Para Moraes (2003):

A categorização é um processo de comparação constante entre as unidades definidas no processo inicial da análise, levando a agrupamentos de elementos semelhantes. Os conjuntos de elementos de significação próximos constituem as categorias. [...]. Essa explicitação das categorias se dá por meio do retorno cíclico aos mesmos elementos, no sentido da construção gradativa do significado de cada categoria. Nesse processo, as categorias vão sendo aperfeiçoadas e delimitadas cada vez com maior rigor e precisão. (p.197)

Moraes (2003) afirma que existem dois métodos de definição de categorias: um deles do tipo dedutivo e outro indutivo. No caso do primeiro, as categorias são previamente definidas com relação ao *corpus* de pesquisa. Em nossa pesquisa, justificamos que as categorias foram definidas pelo segundo modo, o indutivo, pois nossas categorias surgiram dos materiais coletados, após a leitura dos mesmos, mais especificamente, dos objetivos gerais extraídos de cada um dos textos selecionados.

Nessa fase da pesquisa, a fim de obtermos um maior aprofundamento com o material e para evidenciar os objetivos dos doze textos, criamos uma ficha de identificação com todas as informações dos artigos científicos e relatos que seriam pertinentes para a pesquisa. Foram obtidos dados como: estado de origem da pesquisa, instituição de ensino, nível de pesquisa (Mestrado, Doutorado, Iniciação Científica etc.), bem como os objetivos de cada texto (sendo este último fundamental para a criação das categorias).

Apresentamos a seguir uma tabela que apresenta os 12 textos selecionados. Dentre os 12 trabalhos, quatro são relatos de experiência e, os demais, artigos científicos, vindos de sete diferentes revistas. Ademais, vale mencionar que todos os trabalhos são datados entre os anos de 2010 e 2015, mesmo a revisão contemplando o período de uma década. Tal informação já nos traz uma primeira consideração: o fato de que as pesquisas envolvendo a geometria dos fractais no ensino de Matemática têm se intensificado muito recentemente.

TABELA 1 – Relação dos textos selecionados.

Titulo do texto	Periódico científico	Autores
O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas	Revista Eletrônica de Educação	José Marcos Lopes, José Antonio Salvador, Inocêncio Fernandes Balieiro Filho.
Relações entre objetos ostensivos e não ostensivos durante o ensino da geometria do taxista com o uso do geogebra	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	Luciano Ferreira, Rui Marcos de Oliveira Barros.
As concepções de geometrias-não euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica	Boletim de Educação Matemática	Karla Aparecida Lovis, Valdeni Soliani Franco.
Experenciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da matemática	Boletim de Educação Matemática	Claudemir Murari.
Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana	Revista Eletrônica de Educação Matemática	José Carlos Pinto Leivas.
A riqueza nos currículos de matemática do Ensino Médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos	Revista de Educação Matemática	Marcio Antonio da Silva, Célia Maria Carolino Pires.

Título do texto	Periódico científico	Autores
Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética	Revista de Educação Matemática	João Debastiani Neto, Clélia Maria Ignatius Nogueira, Valdeni Soliani Franco.
Manipulação e análise de padrões fractais no processo de generalização de conteúdos matemáticos por meio do software GeoGebra	Revista Eletrônica da PUC-SP	Rejane Waiandt Schuwartz Faria, Marcus Vinicius Maltempi.
Aprendizagens matemáticas a partir da construção de fractais	Sociedade Brasileira de Educação Matemática	Teresinha Aparecida Faccio Padilha.
Dobras, cortes e fractais no Ensino Fundamental	Sociedade Brasileira de Educação Matemática	Antônio do Nascimento Gomes, José Antônio Salvador.
Fractais na Educação Básica: Aprendendo com quebra-Cabeças, arte francesa e cartões	Sociedade Brasileira de Educação Matemática	Maria Regina Carvalho Macieira Lopes, Alessandry Amaral, Adriana F. de Matto, Karolina B. Ribeiro da Silva.
Para ler com os alunos uma conversa inicial sobre a geometria dos fractais	Sociedade Brasileira de Educação Matemática	Alexsandra Camara.

Fonte: os autores.

Tomamos por categoria alguns aspectos recorrentes e explícitos nos objetivos gerais dos textos. Ressaltamos, porém, que as categorias definidas estão representadas em todos os artigos e relatos, ou seja, mesmo que uma pesquisa não apresentava em seu objetivo principal elementos de uma determinada categoria, o texto, como um todo, acabava por trazer elementos importantes, portanto, um mesmo texto traz elementos de mais de uma categoria. Apresentamos a seguir as cinco categorias definidas, bem como nossa discussão acerca de cada uma delas.

ANÁLISE DAS CATEGORIAS

O ensino de Geometrias não Euclidianas por meio de softwares educacionais³

Vivemos uma fase de constantes inovações tecnológicas e as geometrias como um todo são comumente relacionadas com o uso de tecnologias, de acordo com as pesquisas. São diversos os trabalhos que enaltecem essa combinação e buscam justificar que o ensino e a aprendizagem, ancorado ao uso de *softwares*, especialmente os de geometria dinâmica, proporcionam ao aluno diversas vantagens na hora do aprendizado, como: melhor visualização, construção e manipulação de figuras de forma mais precisa e rápida, maior facilidade na generalização de fórmulas e conceitos etc.

³ Para esta categoria, consideramos os seguintes trabalhos da Tabela 1: Faria e Maltempi (2012), Silva e Pires (2013), Ferreira e Barros (2013), Padilha (2013) e Leivas (2014).

O trabalho “Manipulação e Análise de Padrões Fractais no Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos por meio do Software GeoGebra”, de Faria e Maltempo (2012), desenvolve a exploração de vários fractais com o uso do software GeoGebra, realizando a construção e manipulação destes com tal precisão e facilidade que a construção por meio de lápis, papel e régua não permitiria. Além disso, o processo de iterações de um fractal, quando feito no papel, encontra-se estritamente limitado a um número menor de etapas, visto que tal construção manual é menos dinâmica que com o uso do *software*. Neste último, temos ferramentas que já determinam as construções, mesmo que as etapas resultem em traços minúsculos. Além disso, o *software* tem a ferramenta do *zoom*, que possibilita visualizações de qualquer etapa construída. Partindo disto, podemos afirmar que é mais fácil demonstrar visualmente as propriedades de autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita dos fractais em *softwares* geométricos.

Nota-se também nos vários trabalhos o uso simultâneo de construções de fractais por meio de *software* e com o lápis e papel, associando conceitos matemáticos como perímetro, área e quantidade de figuras ao número de iterações realizadas. Nestes casos, temos exemplos do que Barbosa denomina de “exploração numérica” (2005) dos fractais.

No trabalho de Ferreira e Barros (2013), que explora a Geometria do Taxi⁴ junto ao *software* GeoGebra, há um alerta acerca de um possível obstáculo didático. A janela de álgebra, entendida pelos autores como um objeto ostensivo⁵, pode levar os alunos a desenvolverem conceitos equivocados, já que estes podem se ater apenas às informações numéricas mostradas no software sem considerar todo contexto do problema, o que merece atenção dos professores que optarem pela aplicação.

Os *softwares* se mostram preciosos aliados quando se é necessário representar gráficos, como as cônicas no trabalho de Leivas (2014), em que mestrands são analisados quanto a sua performance ao realizar cálculos com a métrica dos catetos. Apesar do sucesso dos investigados nas resoluções numéricas e na localização de pontos, os mesmos se mostraram surpresos ao ver o gráfico representado no *software* GeoGebra, o que, segundo o autor, é uma prova do vago contato destes com as Geometrias não Euclidianas.

De maneira geral, todos os trabalhos que abordam *softwares* focam em demonstrar as vantagens fornecidas pelo ensino com o uso destes, cada um com suas metodologias e peculiaridades, mas sempre compartilhando do mesmo objetivo, ensinar matemática por meio de *softwares* de geometria.

Por fim, vale trazer à tona um dado constatado no trabalho “Fractais na Educação Básica: Aprendendo com Quebra-Cabeças, Arte Francesa e Cartões”, de Lopes et al. (2014) que, ao tabularem os dados de um questionário aplicado a 30 professores,

⁴ A Geometria do Táxi, ou Geometria Urbana, é uma geometria não euclidiana na qual se estuda um espaço geométrico comum, mas que não é refletido, via de regra, nos cursos de Geometria, e que está no cotidiano dos indivíduos. É assim designada pois utiliza uma forma de medir distâncias entre dois pontos que não é a usual, como a usada na Geometria Euclidiana (FOSSA, 2001, apud LEIVAS, 2014, p.190).

⁵ Os objetos ostensivos são os objetos percebidos pelo toque, pelo olhar e pelo ouvir. Eles são objetos materiais ou objetos dotados de certas representações materiais, tais como signos, imagens, sons, gestos, etc. (BOSH, 2000, apud FERREIRA; BARROS, 2013, p.33).

evidenciam que apenas 8% destes já fizeram alguma vez o uso de *softwares* ou materias manipuláveis em sala, apesar da gama de vantagens que estes proporcionam.

As Geometrias não Euclidianas na formação de professores⁶

As geometrias na formação dos professores de matemática são conteúdos presentes na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, porém, muitas vezes esse ensino se limita apenas às Geometrias Euclidianas. O conhecimento acerca de conceitos não Euclidianos é fundamental para todo professor de Matemática e é em cima deste aspecto que surgem inúmeros trabalhos. Desconhecer estes conceitos pode criar limitantes de conhecimento para o professor e, consequentemente, para o aluno, enquadrando seu modo de pensar apenas aos elementos da Geometria Euclidiana. Por outro lado, cabe ressaltar que os professores que atualmente estão em atuação nas salas de aula não tiveram esta discussão na formação inicial, já que a temática em questão, como já discutido neste texto, é tida como uma novidade enquanto proposta de ensino.

No artigo “As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica”, de Lovis e Franco (2015), constata-se a ausência do conhecimento sobre as Geometrias não Euclidianas de professores da Educação Básica. Na pesquisa destes autores, dentre vinte e sete docentes da Educação Básica, “seis professores não apresentam uma concepção sobre as Geometrias não Euclidianas e dentre esses, quatro professores nunca haviam estudado essas Geometrias” (LOVIS; FRANCO, 2015 p.379).

Além disto, torna-se discussão o seguinte questionamento: como professores que não conhecem a fundo as Geometrias não Euclidianas, ou mesmo desconhecem, irão trabalhar este conteúdo? A fala de uma professora acerca das reais condições para o desenvolvimento dessa geometria em sala de aula, exposta no trabalho de Caldatto e Pavanello (2014), ganha destaque ao apontar o fato de que é alta a probabilidade dos professores não se sentirem seguros e, caso haja falta de horas aulas para trabalhar todo o conjunto de conteúdos que norteiam a série em questão, o assunto Geometrias não Euclidianas seria um dos primeiros a ser deixado de lado pelo professor, devido a deficiência em sua formação docente.

A falta de contato com as Geometrias não Euclidianas também é constatada no trabalho de Leivas (2014), em que mestrandos não são capazes de conhecer representações gráficas de cônicas em uma métrica diferente da euclidiana.

Mesmo que posterior à formação inicial, é importante que todo professor se intere dos conhecimentos que norteiam essa geometria. Um meio de compensar este *deficit* na formação dos docentes são os cursos de formação continuada, como o elaborado no trabalho de Lopes et al. (2014), que aborda explorações da geometria fractal para a sala de aula com professores da Educação Básica, por meio de uma oficina matemática.

⁶ Para esta categoria, consideramos os seguintes trabalhos da Tabela 1: Lopes et al. (2014), Debastiani Neto, Nogueira e Franco (2013), Lovis e Franco (2015 e Leivas (2014).

Por fim, vale salientar o que muitos trabalhos deixam evidente: aprender sobre Geometrias não Euclidianas amplia a visão de todo licenciando sobre a matemática como um todo e o prepara para poder administrar tais conhecimentos quando lecionar, seguindo as recomendações dos documentos norteadores da educação. Além disso, a discussão desta temática também acaba por fornecer desde cedo conhecimentos aos alunos de que a matemática é bem mais que superfícies planas, cálculos exatos e dimensões inteiras, ajudando assim a formar pessoas que, muito além de saberem aplicar fórmulas, também tenham desenvolvido um pensamento crítico com relação à matemática.

Potencialidade dos fractais para a exploração simultânea de diferentes conceitos matemáticos⁷

A geometria dos fractais apresenta-se como um tema com o qual se possibilita a fundamental correlação de diferentes conteúdos matemáticos simultaneamente. Com isso, o aluno passa a entender a matemática como uma unidade, e não um conjunto de temas independentes, desconexos. Trabalhos que testam as potencialidades da geometria fractal têm sido os mais comuns. Além de se estudar as propriedades dos fractais, estes trabalhos conseguem também abordar inúmeros conteúdos matemáticos, tais como: área, perímetro, probabilidade, estudo de padrões, semelhança de figuras, operações com frações, noções de limite e outros, abrindo possibilidade para o ensino dessa geometria da Educação Básica ao Ensino Superior.

Partindo disto, os trabalhos aqui abordados nos trazem experiências de ensino, que muitas vezes se dão por meio de uma intervenção pedagógica, ensinando determinado conteúdo matemático via geometria fractal. No trabalho de Lopes, Salvador e Balieiro Filho (2013), “O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas”, temos um bom exemplo disto, em que o ensino de probabilidade geométrica é apresentado e desenvolvido com os alunos por meio dos fractais e da resolução de problemas. A possibilidade de inter-relacionar dois conteúdos diferentes ou mais, utilizando mais de uma ferramenta de ensino, como software e papel, por exemplo, torna uma aula mais significativa para os alunos, pois requer destes diferentes conhecimentos e habilidades, além do aproveitamento de tempo que é feito abordando-se simultaneamente mais de um conteúdo. Por outro lado, tal característica requer também do professor um cuidado extra, no sentido de que ele deve ter claro os seus objetivos de ensino, não caindo na “tentação” de abordar temas os quais os seus alunos não tenham condição de compreender naquele momento.

A metodologia de ensino mais utilizada dentre as pesquisas que trabalham com a potencialidade da geometria fractal foi por meio de quadros que interligam medidas para com o número de iterações, que Barbosa (2005) chama de exploração numérica de um fractal, constatadas em algumas pesquisas, como as de Faria e Maltempi (2012), que em

⁷ Para esta categoria, consideramos os seguintes trabalhos da Tabela 1: Lopes, Salvador e Balieiro Filho (2013), Faria e Maltempi (2012), Padilha (2013), Lopes et al. (2014), Gomes e Salvador (2012), Câmara (2010) e Murari (2011).

uma ação sobre os padrões fractais e dos processos de construção dos níveis destes, traz a generalização de conteúdos matemáticos como área, perímetro, progressões geométricas e aritméticas explorada pelos alunos, conduzindo-os a pensar em níveis posteriores. Os trabalhos de Padilha (2013), Gomes e Salvador (2012), Lopes et al. (2014) e Murari (2011) apresentam essa mesma metodologia de exploração, porém, com pequenas variações no enfoque.

Nas considerações finais dos trabalhos, é possível evidenciar uma uniformidade quanto ao sucesso de todos eles ao usar geometria fractal para explorar outros conteúdos matemáticos. Isto muitas vezes se deve a beleza dos fractais, sua simetria perfeita ou mesmo ao uso integrado dos softwares e materiais manipuláveis, que estimulam a curiosidade dos alunos e empenho na realização das atividades, tornando possível a exploração matemática de maneira significativa, com aprendizado.

O ensino de Geometrias não Euclidianas por meio de materiais manipuláveis⁸

Tema frequente dos textos, o uso de materiais manipuláveis na disciplina de Matemática é um importante instrumento de ensino que possibilita ao aluno partir de algo palpável para outros temas mais abstratos, como teoremas, fórmulas e conceitos, sendo assim um subsídio importante para o aluno ter um ponto de partida na tarefa de tornar algo que ele apenas conhece cotidianamente em um conhecimento mais sistemático. Especificamente sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino de Matemática, Rodrigues e Gazire (2012) destacam algumas características. Dentre elas, os autores apontam que o uso pelo uso destes materiais não se efetiva em garantia de sucesso na aprendizagem dos alunos, já que outras questões devem estar bem claras para o professor, como as suas concepções de ensino e aprendizagem. Para estes autores, durante uma atividade que explore materiais manipuláveis no ensino de Matemática, o papel do professor é o de intermediador, colocando-se entre os objetos, os alunos e os objetivos pedagógicos.

Materiais manipuláveis, como papel, espelhos, recortes e dobraduras são os mais recorrentes no ensino de geometria, sejam elas euclidianas ou não. Os mesmos possuem um caráter lúdico e por isso muitas vezes despertam o interesse e empenho dos alunos na realização das atividades, o que favorece e o ensino do professor e a aprendizagem dos estudantes.

Um dos trabalhos aqui analisados, “Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática”, de Murari (2011), aborda a criação de fractais por meio de caleidoscópios, o que atrai os estudantes pela visão que o objeto proporcionava. Outro trabalho cria fractais por meio de dobras no papel e através da extração de recortes, feitos também em folha, intitulado “Dobras, Cortes e Fractais no

⁸ Para esta categoria, consideramos os seguintes trabalhos da Tabela 1: Murari (2011), Gomes e Salvador (2012), Lopes et al. (2014) e Debastiani Neto, Nogueira e Franco (2013).

Ensino Fundamental”, de Gomes e Salvador (2012). Essa interação que os materiais manipuláveis propiciam ao por em contato o aluno com o próprio objeto da análise, muitas vezes criado por ele, como no caso das dobraduras, tira os estudantes do papel de meros expectadores de uma aula e os coloca como participantes do desenvolvimento do conhecimento, além de também mudar a função do professor, que passa de detentor e expositor de conhecimentos para intermediador destes, tornando-se alguém que, ao invés de conduzir o ritmo da aula, orienta o aluno nas suas próprias escolhas de construção ou manipulação do material.

A pesquisa de Debastiani Neto, Nogueira e Franco (2013), que busca investigar as concepções de crianças a respeito de algumas Geometrias não Euclidianas (Projetiva, Topológica), utiliza-se de massas de modelar e placas de isopor para criação de sólidos geométricos. A escolha do material de manipulação deve levar em consideração a faixa etária de aplicação, tanto para o sujeito da pesquisa não ter grandes dificuldades na manipulação deste, quanto para o melhor aproveitamento do material, vislumbrando uma interação mais condizente entre o objeto e o manipulador.

Outros exemplos que envolvem o ensino de Geometrias não Euclidianas com auxílio de materiais manipuláveis estão presentes nos trabalhos de Lopes et al. (2014), que utilizam de quebra-cabeças, arte francesa e cartões em atividades sobre geometria fractal para professores, e em Gomes e Salvador (2012), que apresentam o passo a passo da construção de um balão fractal com papel cartão e a exploração do processo iterativo deste.

Ademais, é consenso entre todos os textos que não existe apenas uma maneira de se ensinar e aprender geometria. Destacamos também que, para o uso de quaisquer métodos de ensino, é preciso domínio de conteúdo e da metodologia a ser usada por parte do professor, apostando sempre em atividades motivadoras para o aprendizado dos alunos e que proporcionem sempre uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas, como atenta Passos (2006) em seu texto.

Mediante ao atendimento dos três critérios (domínio do conteúdo e da metodologia, utilização de atividades que motivem os alunos e elaboração de exercícios que personifiquem o conceito matemático verdadeiramente) defendidos por Passos (2006), podemos afirmar, com base nos textos, que o uso de materiais manipuláveis é um meio eficaz para o ensino e o aprendizado de geometria, contanto que estes sejam sempre usados com vistas aos conceitos matemáticos que se pretende discutir e ensinar.

Concepções docentes e discentes acerca das Geometrias não Euclidianas⁹

As concepções de professores, sejam eles da Educação Básica ou Ensino Superior, também foram alvo das pesquisas. Especificamente no caso do Paraná, a inclusão das

⁹ Para esta categoria, consideramos os seguintes trabalhos da Tabela 1: Lovis e Franco (2015), Murari (2011), Gomes e Salvador (2012) e Debastiani Neto, Nogueira e Franco (2013).

geometrias não Euclidianas no currículo da Educação Básica fomentou ainda mais discussões que inspiraram trabalhos a respeito deste assunto, os quais, em sua maioria, alertam para o despreparo de parte dos professores para o trabalho com o “novo” assunto.

Uma categorização exposta no trabalho “As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica”, de Lovis e Franco (2015), embasada em dados obtidos com vinte e sete licenciados em matemática, separa estes em três categorias quanto aos seus conhecimentos não euclidianos. A primeira destas seria relacionada àqueles docentes que não apresentam concepções a respeito dessas geometrias, totalizando seis professores. A segunda, composta por treze docentes, diz respeito àqueles que apresentam algumas ideias e opiniões acerca das Geometrias não Euclidianas. A terceira e última, com oito docentes, contempla aqueles que expõem suas concepções por meio de resultados e/ou conceitos matemáticos acerca das Geometrias não Euclidianas. Ademais, grande parte dos professores investigados não teve contato com as Geometrias não Euclidianas em sua formação docente e todos os vinte e sete professores investigados nunca estudaram qualquer geometria não euclidiana na Educação Básica.

Outro trabalho, de Debastiani Neto, Nogueira e Franco (2013), intitulado “Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética”, analisou os próprios alunos para saberem se o fato de possuírem conceitos euclidianos pode interferir no aprendizado de outros não euclidianos, o que caracterizaria um obstáculo didático. Por meio de atividades com alunos que já conhecem e outros que ainda não estudaram conceitos euclidianos, os autores evidenciaram que a obtenção de conceitos euclidianos pode atrapalhar no estudo de não euclidianos, quando não compreendidos de maneira correta pelo aluno. Esta pesquisa também defende o ensino das Geometrias não Euclidianas antes de abordagens euclidianas, pois, ancorados nas teorias de Piaget e Inhelder, as crianças formam primeiro as ideias da geometria topológica, seguidos da projetiva e só então começam a entender os conceitos que norteiam a geometria de Euclides.

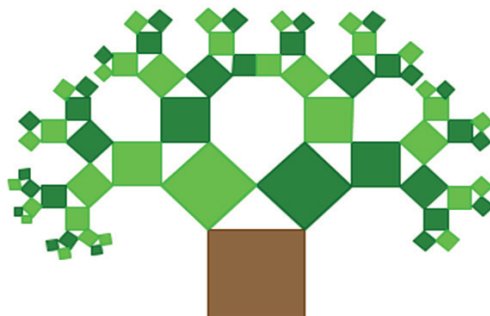
O trabalho de Leivas (2014) traz a análise das concepções não euclidianas de mestrandos, apontando as dificuldades destes em reconhecer o gráfico de cônicas exposto na métrica dos catetos, mesmo conseguindo localizar seus pontos, o que prova o desconhecimento das representações gráficas dessa métrica. Por fim, Lovis e Franco (2015) salientam a importância de ocorrerem pesquisas a fim de identificar, descrever e analisar as concepções dos professores, pois estas são uma condição indispensável para transformar o cenário do ensino de geometrias.

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE: A “ÁRVORE PITAGÓRICA”

Pensando nas discussões promovidas por meio das categorias elencadas, optamos por trazer um exemplo de atividade a qual pudesse contribuir tanto como exemplificação dos

dados, quanto também como uma proposta a ser aplicada professores que possivelmente se interessem pelo assunto. O exemplo retrata o fractal “árvore pitagórica”, o qual julgamos apresentar uma grande potencialidade para a exploração de diferentes temas matemáticos, de diferentes níveis de ensino. Além disso, tal fractal não aparece nas pesquisas por nós abordadas, sendo ainda pouco explorado em atividades de pesquisa e de ensino. A figura 2 a seguir apresenta o fractal “árvore pitagórica”. Este fractal foi discutido e construído pelo grupo de estudos mencionado na introdução deste texto, tendo sido também aplicado em contextos escolares, com o auxílio de instituições parceiras.

FIGURA 2 – Fractal “árvore pitagórica” após cinco iterações.



Fonte: autores.

O fractal apresentado na imagem foi construído no *software* GeoGebra. Para isto, utilizamos de uma construção base (primeira etapa do fractal) que fornece os subsídios necessários para a criação de uma ferramenta integrada ao *software* e agiliza o processo iterativo, possibilitando uma melhor visualização das suas propriedades de autossimilaridade, complexidade infinita e o pensar sobre a dimensão fracionária em tempo reduzido, evitando um processo repetitivo e demorado. A construção ocorreu da seguinte forma: inicialmente, construímos um triângulo retângulo isósceles (catetos com medidas iguais): traçamos um segmento qualquer, tendo os seus extremos conhecidos; em seguida, tomamos um ângulo de 45° com vértice em um extremo do segmento e um do lados sendo o próprio segmento; feito isso, traçamos um reta que passa pelo extremo do segmento com ângulo definido e pelo ponto que surgiu ao delimitarmos o ângulo; por fim basta traçamos outra reta perpendicular a anterior que passe pelo outro extremo do segmento e temos o desejado. Sobre cada um dos três lados do triângulo isósceles, construímos um quadrado tomando a medida do lado correspondente do triângulo, e assim temos a construção base, que irá se repetir no processo iterativo.

Quanto às possibilidades de utilização pedagógica deste fractal pelo professor de Matemática, podemos evidenciar algumas explorações a serem realizadas nos diferentes níveis de escolarização (Fundamental e Médio). Dentre estas explorações conceituais, podemos citar: simetrias, números fracionários, sequências, perímetro e área de figuras planas etc. Abaixo, apresentamos uma proposta de exploração do conceito de contagem,

área e perímetro, utilizando-se de uma tabela, a qual apresenta relações entre o número de quadrados presentes na figura, seus perímetros e áreas com o número de iterações realizadas, podendo esta ser apresentada tanto para o Ensino Fundamental quanto o Médio, o que dependerá da necessidade ou não de generalizações algébricas pelo professor e enfoque nos conceitos desejados.

TABELA 2 – Exploração da Árvore Pitagórica.

Iteração	Quantidade quadrados por iteração	Total de quadrados por iteração	Medida do lado do novo quadrado em cada iteração	Área do novo quadrado em cada iteração	Perímetro do novo quadrado em cada iteração	Área de todos os quadrados que surgem na etapa	Perímetro de todos os quadrados que surgem na etapa
0	1	1	L	L^2	$4L$	L^2	$4L$
1	2	3	$\frac{L}{\sqrt{2}}$	$\frac{L^2}{2}$	$\frac{4L}{\sqrt{2}}$	$\frac{2L^2}{2}$	$\frac{8L}{\sqrt{2}}$
2	4	7	$\frac{L}{2}$	$\frac{L^2}{4}$	$2L$	$\frac{4L^2}{4}$	$8L$
3	8	15	$\frac{L}{2\sqrt{2}}$	$\frac{L^2}{8}$	$\frac{2L}{\sqrt{2}}$	$\frac{8L^2}{8}$	$\frac{16L}{\sqrt{2}}$
n	2^n	$2^{(n+1)} - 1$	$\frac{L}{\sqrt{2}^n}$	$\frac{L^2}{2^n}$	$\frac{4L}{\sqrt{2}^n}$	L^2	$\frac{2n \cdot 4L}{\sqrt{2}^n}$

Fonte: autores.

Uma atividade que culmine na construção da tabela apresentada anteriormente possibilita a discussão de temas como potenciação, sequências, progressões, função exponencial, conceitos de infinito, dentre outros. Salientamos que, tal tabela, trata-se apenas de uma proposta geral e ampla, sendo que, cabe a cada educador, adequar os conceitos que deseja discutir, diminuindo ou ampliando esta tabela. Essa mesma construção pode ser realizada com o uso de lápis e papel, com o auxílio de instrumentos de desenho geométrico, como compasso e régua. Acreditamos que o manuseio adequado destes materiais manipuláveis propicia ao aluno atingir mais facilmente os resultados esperados. Além disso, o próprio uso de instrumentos de desenho acaba, direta ou indiretamente, por exigir dos sujeitos envolvidos o aprendizado de outros temas, como os sistemas de medida etc.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa aqui descrita constitui-se como uma revisão bibliográfica categorizada que analisou textos disponíveis nos periódicos de revistas *online* com enfoque em educação e educação matemática, publicados nos últimos dez anos que tratam do assunto geometria dos fractais. Sabemos que outros textos de periódicos possivelmente não foram

contemplados, já que, por exemplo, é comum que pesquisas em Educação Matemática sejam publicadas em revistas de outras áreas educativas. Entretanto, acreditamos que os dados aqui apresentados, categorizados e discutidos já trazem, por si só, elementos importantes para todos aqueles que se interessem pela temática em questão, sejam eles pesquisadores e, também, professores de matemática.

Buscamos realizar uma análise qualitativa, visto que seus resultados foram expressos por meio de cinco categorias que discutem e exemplificam como a geometria dos fractais tem sido abordada nos textos que a citam em um contexto educacional. As categorias encontradas foram: o ensino de Geometrias não Euclidianas por meio de softwares educacionais, as Geometrias não Euclidianas na formação de professores, potencialidade dos fractais para a exploração de outros temas matemáticos, o ensino de Geometrias não Euclidianas por meio de materiais manipuláveis e a última categoria, concepções acerca das Geometrias não Euclidianas de docentes e discentes.

Considerando o fato de que as geometrias, muitas vezes, são renegadas a um segundo plano por diversos educadores em sua atuação em sala de aula, de todas as características já analisadas acerca dos fractais e demais Geometrias não Euclidianas, destacamos o fato de que estas possibilitam uma abordagem atrelada a outros conceitos matemáticos (geometria e álgebra, geometria e simetria, geometria e frações etc.). Enfim, com o presente texto, esperamos contribuir com todos aqueles que almejam iniciar uma discussão em sala de aula sobre geometrias, de maneira geral, ou mesmo fornecer subsídios para pesquisas que tratem especificamente das Geometrias não Euclidianas, tornando o tema mais conhecido e, conseqüentemente, cada vez mais presente no cotidiano das aulas de Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos às professoras Veridiana Rezende e Mariana Moran Barroso, além das mestrandas Fabrícia de Carvalho Paixão e Thaís Martires, pela parceria nos estudos que originaram a presente publicação.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, R. M. *Descobrimdo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- CALDATTO, M.E.; PAVANELLO, R. M. O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. *Bolema*, Rio Claro, v.28, n.48, p.42-63, 2014.
- CAMARA, A. Para ler com os alunos: uma conversa inicial sobre a geometria dos fractais. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, n.29, p.15-18, 2010.
- DEBASTIANI NETO, D. J.; NOGUEIRA, I. M. C.; FRANCO, S. V. Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética. *Revista Zetetiké*, Paraná, v.21, n.40, 2013.

FARIA, S. W. R.; MALTEMPI, V. M. Manipulação e Análise de Padrões Fractais no Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos por meio do Software GeoGebra. *Revistas Eletrônicas da PUC-SP*, São Paulo, v.5, n.1, p.1-15, 2012.

FELDENS, M. G. F. Os propósitos da revisão de literatura e o desenvolvimento da pesquisa educacional. *Ciência e Cultura*, v.33, n.9, p.1197-1199, 1981.

FERREIRA, L.; BARROS, R. M. O. Relações entre os objetos ostensivos e objetos não ostensivos durante o ensino da Geometria do Taxista com o software Geogebra. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, São Paulo, v.6, n.2, p.31-59, 2013.

GOMES, A. N.; SALVADOR A. Dobras, Cortes e Fractais no Ensino Fundamental. *Educação Matemática em revista*, São Paulo, ano 17, n.37, nov. 2012.

LEIVAS, P. C. J. Elipse, parábola, hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Santa Catarina, v.9, n.2, p.189-209, 2014.

LOPES, M. C. R. M.; AMARAL, A.; MATTO, F. A.; SILVA, R. B. K. Fractais na Educação Básica: aprendendo com quebra-cabeças, arte francesa e cartões. *Educação Matemática em revista*, Paraná, ano 19, n.41, mar. 2014.

LOPES, M. J.; SALVADOR, B. J.; FILHO B. F. I. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. *Revista Eletrônica de Educação*, São Paulo, v.7, n.3, p.47-62, 2013.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de geometrias-não euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica. *Bolema*, Rio Claro, v.29, n.51, p.369-388, 2015.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Revista Ciência & Educação*, Bauru, v.9, n.2, dez. 2003.

MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da matemática. *Bolema*, Rio Claro, v.25, n.41, p.187-211, 2011.

PADILHA, F. A. T. Aprendizagens matemáticas a partir da construção de fractais. *Educação Matemática em Revista*, Rio Grande do Sul, Ano 15, n.39, ago. 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica*. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2016.

PASSOS, C. L. B. Materiais Manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006.

PAVANELLO, R. M.; ANDRADE, R. N. G. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. *Educação Matemática em Revista: revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, São Paulo, n.11, p.78-86, abr. 2002.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v.7, n.2, p.187-196, 2012.

SANTOS, T. S. *A inclusão das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. 2009. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SILVA, A. M.; PIRES, C. M. C. A riqueza nos currículos de matemática do Ensino Médio em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos. *Revista Zetetiké*, São Paulo, v.21, n.39, p.19-52, 2013.