

La enseñanza de o desde la resolución de problemas matemáticos: concepciones de profesores de Matemática en formación

Yocelyn Parra Urrea
Adriana Breda

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo evidenciar las concepciones que poseen los profesores de matemática en formación, de una universidad chilena, sobre la resolución de problemas (RP) y cómo ellos la implementan en el desarrollo de sus clases. Para lograr nuestros objetivos se realizó: a) una revisión de la literatura con el propósito de identificar las distintas perspectivas teóricas en torno a la resolución de problemas b) un cuestionario de cinco preguntas orientadas a examinar lo que cuatro futuros profesores de matemática en formación entienden por resolución de problemas y cómo la utilizan en el desarrollo de sus clases de matemática. Por medio de un análisis cualitativo se concluye que existen imprecisiones, por parte de los profesores en formación, respecto de las definiciones de resolución de problemas. Además, se constató que la conceptualización dada por los docentes se acerca, por un lado, a las perspectivas tradicionales, tales como las propuestas de Polya y Schoenfeld y se aleja, por otro lado, de las perspectivas más actuales como, por ejemplo, la de Lesh y Zawojewski. En este mismo sentido, se corroboró que las respuestas de los profesores sufren influencias curriculares que fomentan la concepción de resolución de problemas como una actividad que se incorpora posterior a la conceptualización de nociones matemáticas específicas.

Palabras-clave: Resolución de Problemas. Concepciones. Profesores de Matemática. Enseñanza.

The teaching of or from the Mathematical Problem Solving: Conceptions of teachers of Mathematics in formation

ABSTRACT

This paper aims to demonstrate the conceptions of mathematics teachers in training, a Chilean university, about problem solving (PS) and how they implement it in the development of their classes. For that was performed, a) a literature review was carried out with the purpose of identifying the different theoretical perspectives around problem solving; b) a questionnaire of five questions aimed at examining what four future mathematics teachers in formation understand by Problem Solving and how they implement it in the development of their math classes. Through a qualitative analysis it is concluded that there are inaccuracies, on the part of

Yocelyn Parra Urrea es Magíster en Educación Matemática, estudiante de doctorado de la Universidad de Los Lagos y académica de la Universidad San Sebastián, Facultad de Ciencias de la Educación, Bellavista 7, Santiago, Chile. E-mail: yocelynparra@gmail.com

Adriana Breda es Doctora en Educación en Ciencias y Matemática, académica de la Universidad de Los Lagos, Departamento de Ciencias Exactas, Calle Lord Cochrane, 1039, Osorno, Chile.

E-mail: adriana.breda@ulagos.cl

Recebido para publicação em 23/2/2017. Aceito, após revisão, em 30/4/2017.

Acta Scientiae	Canoas	v.19	n.2	p.277-295	mar./abr. 2017
----------------	--------	------	-----	-----------	----------------

the teachers in formation, regarding the definitions of problem solving. In addition, it was found that the conceptualization given by teachers is, on the one hand, approaching the traditional perspectives, such as those proposed by Polya and Schoenfeld and, on the other hand, moving away from the more current perspectives, for example, Lesh and Zawojewski. In this same sense, it was corroborated that teachers' responses suffer from curricular influences that promote the conception of problem solving as an activity that is incorporated after the conceptualization of specific mathematical notions.

Keywords: Problem Solving. Conceptions. Teachers. Teaching.

INTRODUCCIÓN

El modelo tradicional de enseñanza de la matemática, ha sido fuertemente cuestionado por diversos investigadores, esto debido al carácter algorítmico y mecánico de los procesos de instrucción que impide a los estudiantes valorar la significación de los distintos objetos matemáticos. Del mismo modo, la enseñanza bajo este modelo no propicia actividades que motiven el estudio y que muestren la relevancia social del aprendizaje matemático. Por otra parte, la falta del planteamiento de situaciones contextualizadas y/o problemáticas impide estimular a los estudiantes a abordar situaciones nuevas, a responder a problemáticas para las que no se conoce una respuesta directa, a elaborar estrategias de resolución, a plantearse preguntas y a aplicar sus conocimientos y habilidades a otras situaciones (VILA; CALLEJO, 2004).

Conforme se explicita en Breda, Font y Lima (2016), recientemente, en el área de la Educación Matemática (EM), se aumentó el interés por estudiar las tendencias que deben seguir los profesores para lograr una enseñanza de mejor calidad. Por una parte, dichas tendencias pueden ser verificadas en las publicaciones más relevantes del área, como por ejemplo, en los *handbooks* sobre investigación en (BISHOP et. al., 2003; ENGLISH et. al., 2008; LESTER, 2007) y, por otra parte, pueden ser encontradas en las reflexiones de distintos investigadores en educación matemática del mundo iberoamericano (FONT, 2008; GUTIÉRREZ; BOERO, 2006; GUZMÁN, 2007; MÜLLER, 2000). Estas nuevas perspectivas fueron diseminadas en los currículos de los distintos países y se presentaron como tendencias que tratan la enseñanza de las matemáticas con enfoque en: la historia de las matemáticas, la modelación matemática, la etnomatemática, las tecnologías de la información y comunicación y, en particular, la resolución de problemas. Esta última es considerada sumamente relevante, dado que constituye un tipo de tarea educativa que debe ocupar una posición destacada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues contribuye a su formación intelectual y científica (CASTRO, 2008).

Algunos educadores matemáticos, cómo Font (2008) y Guzmán (2007), defienden que los procesos de enseñanza aprendizaje deben favorecer una instrucción basada en la discusión y solución de problemas situados en contextos diversos que demanden la reflexión cognitiva por parte de los estudiantes. Además, los procesos de instrucción deben propiciar instancias que admitan experimentar, establecer conjeturas, presentar argumentos y/o justificaciones, comunicar resultados, entre otros.

Es importante destacar que, aunque haya conocimiento de la importancia de los procesos de resolución de problemas matemáticos por parte de los docentes, nos enfrentamos a algunas cuestiones cuándo salimos del plano teórico – en relación a la Resolución de Problemas – y nos adentramos en el plano de la práctica profesional del profesor de matemáticas que se encuentra en formación, es decir: ¿Qué entienden los futuros profesores de matemáticas por resolución de problemas matemáticos? ¿La práctica de resolución de problemas se lleva a cabo en el desarrollo de las clases de matemática? ¿De qué forma?

El propósito de este escrito es evidenciar las concepciones (conceptos, ideas y opiniones) que poseen los profesores de matemática en formación, de una universidad chilena, sobre la resolución de problemas (RP) y cómo la (RP) se implementa en el desarrollo de sus clases.

Este artículo se encuentra estructurado en tres apartados. En el primer apartado se explicita una descripción de los antecedentes teóricos de la resolución de problemas, en el segundo apartado se indaga sobre las diversas concepciones que poseen los profesores en formación en torno a la resolución de problemas y cómo está se implementa en el desarrollo de sus clases. Finalmente, en el tercer apartado se presentan las conclusiones donde se plantean las principales aportaciones de este estudio.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

Diversos son los estudios que refieren a la Resolución de Problemas, entre ellos los trabajos de Polya (1989), Schoenfeld (1985), Silver (1985), Lesh y Zawojewski (2007) entre otros. Dichos autores se han interesado en indagar: sobre cómo los estudiantes pueden resolver un problema matemático, sobre la enseñanza de estrategias para la resolución de problemas y de los procesos meta-cognitivos y más actualmente estudios sobre la modelación matemática y como dicho enfoque genera procesos cognitivos relevantes en los estudiantes. Además, defienden que la resolución de problemas representa un aspecto fundamental del pensamiento y del saber matemático y que constituye uno de los ejes principales para propiciar el aprendizaje matemático. Asimismo, proporcionan orientaciones para la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad que nos rodea. (ANDALUCÍA, 2010 apud BEDOYA; OSPINA, 2014, p.28).

A continuación realizaremos una descripción de algunas perspectivas sobre resolución de problemas, principalmente las propuestas por Polya, Schoenfeld, Lesh y Zawojewski, destacando, en particular, las concepciones de dichos autores referentes a lo que significa resolver problemas en el área de las matemáticas y cuál es el rol del profesor en dicho proceso.

Resolución de problemas según Polya

En una de las definiciones dadas por Polya (1945) citado en D'Amore (2010) se establece que:

Resolver problemas significa encontrar un camino para salir de una dificultad, para sortear un obstáculo, para alcanzar un objetivo que no sea inmediatamente alcanzable. Resolver problemas es una empresa específica de la inteligencia y la inteligencia es el don específico de los humanos: se puede considerar la resolución de problemas como la actividad más característica del ser humano. (D'AMORE, 2010, p.20)

Además de dicha definición, Polya (1945), propone avances y estrategias considerables en la tarea de resolución de problemas. Esto con el propósito de fortalecer los procesos de enseñanza aprendizaje. Del mismo modo, basa su programa en la idea del resolutor ideal, esto es, el sujeto que resuelve un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta su solución. El propósito fundamental del modelo es conseguir que cualquier persona, preferiblemente con la ayuda de un tutor, logre asimilar las técnicas de resolución que se han demostrado efectivas, hasta convertirse en un buen resolutor de problemas (BLANCO, 1996, p.13).

Polya (1945) sugiere un modelo heurístico que contempla cuatro fases para conducir la resolución de un problema. Estas fases han sido definidas como:

- ✓ Comprender un problema: El estudiante debe familiarizarse con lo planteado en el enunciado para identificar tanto la información presentada como aquello que requiere ser resuelto. Durante esta etapa se sugiere realizar preguntas como ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? entre otras. Es decir, esta es la etapa para determinar la incógnita, los datos, las condiciones, y decidir si esas condiciones son suficientes, no redundantes ni contradictorias.
- ✓ Concebir un plan: El estudiante concibe un plan cuando al menos determina qué cálculos, qué razonamientos, o construcciones habremos de efectuar para la resolución del problema. También debe relacionarse con resultados útiles, y se debe determinar si se pueden usar problemas similares o sus resultados (aquí se resalta la importancia de los problemas análogos). Durante esta fase el rol del docente radica en guiar al estudiante, a través de interrogantes, como ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Conoce un problema relacionado? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- ✓ Ejecutar el plan: El estudiante aplica lo establecido en la fase anterior. Además, analiza y examina que todos los pasos realizados en el proceso de resolución

sean correctos. Es de vital importancia efectuar preguntas como ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?

- ✓ Examinar la solución: En esta etapa el estudiante debe tener una visión retrospectiva de la solución presentada, es importante verificar el resultado y razonamiento utilizado. Para ello, se sugiere efectuar las siguientes interrogantes ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Según Polya (1989), el papel del profesor es “ayudar al estudiante”. Sin embargo, es subjetivo determinar si el profesor está ayudando mucho o poco. En el desarrollo de la resolución de un problema el profesor debe comenzar con una pregunta general o una sugerencia, luego efectuar preguntas más precisas hasta obtener las respuestas esperadas. Las preguntas y sugerencias propuestas por Polya (1945; 1989) no están restringidas a un determinado tema, deben ser naturales y sencillas. Es decir, son preguntas generales aplicables a cualquier tipo de situación.

Desde esta perspectiva, la Resolución de Problemas se configura, desde el punto de vista del paradigma del aprendizaje, cómo un modelo lineal y conductista, dónde el estudiante “aprende” las estrategias previamente dadas, por medio de la imitación y repetición, es decir, basta seguir los pasos previamente establecidos, para que el estudiante tenga la competencia de resolver cualquier problema y se convierta en un “resolutor ideal”. En esta perspectiva el profesor tiene el rol de conductor, por lo tanto es el responsable de hacer las preguntas y conducir el proceso de aprendizaje de estrategias para que el estudiante resuelva determinados problemas

Resolución de problemas según Schoenfeld

Otra perspectiva sobre la Resolución de Problemas es la que conocemos como la perspectiva “Schoenfeldiana”.

Schoenfeld (1985) define resolución de problemas como “el uso de problemas o proyectos difíciles por medio de los cuales los alumnos aprenden a pensar matemáticamente”. El término difícil hace referencia a que es una situación en la que su solución no es inmediata, por lo cual el éxito depende de los conocimientos y habilidades previas que posea el estudiante. (BAHAMONDE; VICUÑA, 2011, p.8)

Schoenfeld (1985) propone un modelo mucho más global a lo trabajado por Polya, dado que detecta bloques de conductas homogéneas asociadas a una función concreta dentro de la globalidad del proceso. Con su modelo no se pretende convertir a cada individuo en un resolutor ideal estándar, sino hacerlo mejorar a partir de un doble conocimiento de las técnicas consagradas y de las características del modo en que él mismo

se enfrenta a los problemas. En contra de la idea de Polya, Schoenfeld entiende que el proceso de resolución de problemas no es lineal, sino que supone caminos en *zig-zag* y marchas hacia atrás y hacia adelante, aun así, él delimita cuatro fases en dicho proceso: análisis, exploración, ejecución y comprobación (BLANCO, 1996).

Schoenfeld (1985) explicita que para trabajar la resolución de problemas como estrategias didácticas hay que tener en cuenta situaciones más allá de las heurísticas pues es fundamental considerar otros factores involucrados (culturales, sociales, afectivos, cognitivos, etc.). Schoenfeld (1985) señala que “el estudiante debe estar familiarizado con una amplia gama de problemas generales, técnicas conocidas como la heurística a resolver. Para ser eficiente, se necesita entrenar la forma de gestionar los recursos a su disposición” (SCHOENFELD, 1985, p.12). Schoenfeld (1985) sostiene la existencia de cuatro aspectos que influyen en la resolución de problemas: Los recursos, las heurísticas, el control y el sistema de creencias. Estos aspectos han sido definidos por Schoenfeld como:

- ✓ Los recursos: Hacen referencia al dominio por parte de los estudiantes de los conocimientos previos necesarios para la resolución de un determinado problema.
- ✓ La heurística: Son entendidas como las estrategias, reglas o planteamientos que ayudan a resolver un problema.
- ✓ El control: Se entiende como la forma en que el estudiante manipulan la información y las estrategias heurísticas para resolver un problema, este involucra conductas de interés tales como: planificar, seleccionar metas, sub-metas y un monitoreo constante durante el proceso de resolución.
- ✓ Sistema de creencias: refiere al conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes manejan sobre la matemática y su enseñanza, de las cuales documenta las siguientes:
 - ✓ Las matemáticas son de carácter abstracto, no se relacionan con la vida cotidiana o que los conceptos no se aplican en la resolución de problemas.
 - ✓ Los problemas matemáticos deben ser resueltos en menos de diez minutos, de lo contrario no tienen solución.
 - ✓ Sólo genios o superdotados son capaces de descubrir o crear matemática.

Esta perspectiva, aunque presenta características conductistas, dado que adopta algunos pasos previamente definidos, difiere de la perspectiva “Polyana” ya que va más allá de las heurísticas, es decir, la resolución de problemas propuesta por Schoenfeld es un proceso que involucra aspectos, sociales, culturales, afectivos, sistemas de creencias y procesos metacognitivos, dónde los estudiantes deben, por si mismos, hacer el plan, el control y el monitoreo cuándo están resolviendo un determinado problema. En este mismo sentido, el docente necesita llevar a cabo los factores afectivos, debe considerar a los estudiantes como individuos inmersos en un sistema de creencias y de visiones

particulares del mundo. En este sentido, el docente debe conectarse con las diferencias individuales y culturales presentes en la resolución de cada estudiante. En la secuencia presentamos una tabla dónde se puede evidenciar las principales diferencias entre la perspectiva de Polya y de Schoenfeld sobre la Resolución de Problemas.

TABLA 1 – Diferencias entre las perspectivas de Polya y Schoenfeld.

Resolución de Problemas según Polya	Resolución de Problemas según Schoenfeld
Para trabajar la resolución de problemas se sugieren cuatro pasos que constituyen una estrategia y/o heurística de resolución.	Para trabajar la resolución de problemas hay que tener en cuenta situaciones más allá de las heurísticas, pues es fundamental considerar otros aspectos involucrados como culturales, sociales y cognitivos.
El sujeto que resuelve un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta la solución.	El proceso de resolución de problemas no es lineal sino supone caminos en zig-zag generando procesos metacognitivos.
No se refiere al sistema de creencias.	Establece un sistema de creencias: que refiere al conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes manejan sobre la matemática y su enseñanza.

Fuente: las autoras.

Resolución de problemas según Lesh y Zawojewski

En esta perspectiva, Lesh y Zawojewski (2007) definen resolución de problemas al

[...] proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007, p.782)

Lesh y Zawojewski (2007) en su estudio proponen reexaminar y establecer otras opciones de nivel básico sobre lo que significa entender los conceptos de matemáticas y los procesos de resolución de problemas. Una alternativa es utilizar las perspectivas teóricas y las metodologías de investigación que acompañan lo que llamamos modelos y perspectivas de modelación (MMP) sobre la resolución de problemas de matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza.

De acuerdo con Lesh y Harel (2003) cuando los estudiantes son capaces de dar sentido a situaciones basadas en extensiones de sus propios conocimientos y experiencias personales y cuando sus formas de pensar le permiten probar, refinar y/o extender significativamente sus producciones, logran construcciones matemáticas ‘sofisticadas’ que bajo otro tipo de actividades (algorítmicas y/o mecánicas) se dificultaría considerablemente su comprensión. En este mismo sentido, Lesh y Doerr (2003) sostienen que un “problema

no rutinario” permite al estudiante definir, refinar, transformar y extender sus sistemas conceptuales con tal de crear interpretaciones adecuadas del problema o de la situación planteada por el docente. Además, este debe incluir situaciones matemáticas interesantes para el estudiante, de tal forma, que concluya que es necesario construir nuevos modelos y explicaciones para poder resolver un determinado problema. El resultado de este proceso debe ser la unión de modelos complejos o herramientas conceptuales que no solo le permitan resolver el problema planteado, sino que además puedan aplicarlo a distintos problemas que planteen situaciones similares. Tanto la situación planteada como las conclusiones del estudiante deben propiciar las reflexiones de la misma a través de la documentación de los aprendizajes y los procesos planteados por el mismo para resolver el problema, esto permite que puedan compartir sus razonamientos y formas de pensar (LESH et. al., 2000).

De acuerdo con Lesh et. al. (2000), la actividad debe estar abierta a distintas formas de resolución con tal que el estudiante pueda juzgar por sí mismo la validez de las distintas estrategias utilizadas para abordar el problema planteado. Así, la actividad de la resolución de problemas radica en la interpretación, búsqueda, selección y aplicación de datos o herramientas conceptuales para dar respuesta a los diferentes problemas o situaciones planteadas, estableciendo así todo un proceso cíclico de expresión, interpretación, definición, transformación y extensión de ideas y conceptos, los cuales son gradualmente ordenados, integrados, refinados, elaborados y/o rechazados (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007).

Este tipo de perspectiva introduce lo que es conocido por “pensamiento productivo”, el cual requiere que el solucionador de problemas interprete matemáticamente una situación, lo que suele implicar la progresión a través de ciclos iterativos de escribir, probar y revisar interpretaciones matemáticas, así como identificar, integrar, modificar o refinar conjuntos de conceptos matemáticos extraídos de diversas fuentes (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007). Esta última perspectiva se difiere del pensamiento de Polya y Schoenfeld justamente por no ofrecer una secuencia de pasos o heurísticas que el estudiante debe seguir para resolver un determinado problema. En resumen, el modelo MMP propuesto por Lesh y Zawojewski (2007) y Lesh y Harel (2003) apunta que: a) si los estudiantes son capaces de dar sentido a las situaciones basadas en extensiones de su conocimiento y experiencia, y si expresan sus formas de pensamiento mediante su capacidad de testear y refinar repetidamente, entonces ellos modifican, extienden o revisan constructos matemáticos que son considerablemente más sofisticados que aquellos que les parecían difíciles de comprender cuando la situación de enseñanza era tradicional; b) si una actividad que provoca modelos requiere que los estudiantes desarrollen herramientas conceptuales que involucren un sistema de constructos cuyas etapas de desarrollo han sido estudiadas por psicólogos o educadores matemáticos (v.g., Piaget, o Van Hiele), entonces las tareas específicas de ciclos de modelación pueden soportar tales etapas durante el desarrollo; c) estos modelos teóricos, pueden ayudar a explicar el proceso de desarrollo conceptual requerido durante una actividad que provoca modelos. Esto es, los sistemas conceptuales relevantes son desarrollados primero como modelos situados que se aplican a situaciones particulares de resolución de problemas

donde el reto para los estudiantes es ampliar, reorganizar, mejorar, modificar o adaptar las construcciones que tienen.

Por otra parte, Zimmermann (2016) evidencia que situaciones “sencillas” y provenientes de la enseñanza tradicional pueden generar dificultades en su resolución. Se estima que cuando los estudiantes se enfrentan a problemas cuya resolución es ‘evidente’ tienden a no cuestionar una estrategia de resolución menos convencional y en ocasiones la invalidan, no propiciando habilidades de reflexión, argumentación, establecimiento de conjeturas, análisis entre otros. Esto representa una gran dificultad pues no se revisan y/o analizan problemáticas que involucran objetos matemáticos específicos en que su significación requiere ser refinada tanto por los estudiantes como también por los profesores.

En esta perspectiva el docente asume el rol de investigador y fomentador de la construcción del conocimiento, dado que, además de plantear distintas tareas, él acompaña el proceso de resolución de cada estudiante, de tal forma que con el aporte de modelos teóricos él puede ayudar a explicar el proceso de desarrollo conceptual logrado por sus estudiantes.

METODOLOGÍA

Esta investigación trata de un estudio exploratorio que indaga las concepciones que cuatro profesores de matemática en formación (P1, P2, P3, P4), pertenecientes a una universidad chilena, poseen sobre la resolución de problemas. Para ello, se aplicó un cuestionario de cinco preguntas orientadas a examinar cómo estos futuros profesores implementan la resolución de problemas en el desarrollo de sus clases de matemática. La actividad fue propuesta a estudiantes de pedagogía de educación media en matemática quienes han finalizado su sexto semestre lectivo (correspondiente al penúltimo año de su plan de estudios), todos han realizado cuatro prácticas progresivas y están a dos semestres de realizar la práctica profesional. Cabe destacar que solo uno de los cuatro profesores en formación ha estudiado diversas perspectivas referentes a la Resolución de Problemas en su proceso de formación.

El cuestionario propuesto fue orientado por las distintas perspectivas de la Resolución de Problemas (POLYA, 1945; SCHOENFELD, 1985; LESH y ZAWOJEWSKI, 2007). Sin embargo, las preguntas 4 y 5 fueron tomadas del estudio realizado por Zimmermann (2016). En dicha investigación se presentan algunas tareas propias de la enseñanza tradicional – orientada principalmente a procesos algorítmicos – que podrían relacionarse de manera natural con la enseñanza de la resolución de problemas. Una de las problemáticas que se presentan es ¿Podría conjeturar una regla de cómo dividir una fracción por otra fracción? (Pregunta 4). Ante esta pregunta se expone en el estudio de Zimmermann (2016) la respuesta dada por un estudiante de la escuela primaria que se corresponde con la pregunta 5 propuesta en nuestro estudio. Así, El propósito del cuestionario es verificar la conceptualización de los profesores en formación sobre la

resolución de problemas, además de identificar el tipo de respuesta que proporcionarían aseveraciones como la que se describe en la pregunta 5.

A continuación en la tabla 2, se presenta el cuestionario aplicado a los profesores en formación.

TABLA 2 – Cuestionario aplicado a los profesores de matemáticas en formación.

Cuestionario
1. ¿Qué entiende por Resolución de Problemas Matemáticos?
2. ¿Es importante la enseñanza de estrategias para la resolución de problemas matemáticos? ¿Por qué?
3. En la implementación de sus clases ¿La enseñanza de la matemática es de o desde la resolución de problemas? Argumente.
4. ¿Podría conjeturar una regla de cómo dividir una fracción por otra fracción? Explícite su conjetura.
5. La siguiente respuesta es presentada por un estudiante de la escuela primaria: “Para dividir dos fracciones, tengo que dividir el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción. Entonces, divido el resultado por el denominador de la primera fracción dividido por el denominador de la segunda fracción”. Si usted fuera el profesor del estudiante ¿Cuál sería su reacción?

Fuente: las autoras.

El enfoque metodológico de esta investigación es de tipo cualitativo y consiste en el análisis de las respuestas obtenidas posterior a la aplicación del cuestionario. Según Moraes y Galiuzzi (2011), la investigación cualitativa tiene como objetivo profundizarla comprensión de los fenómenos que investiga a partir del análisis riguroso y completo de dicha información con la intención de entender y “[...] reconstruir los conocimientos existentes sobre los temas de investigación” (MORAES; GALIAZZI, 2011, p.11, traducción nuestra).

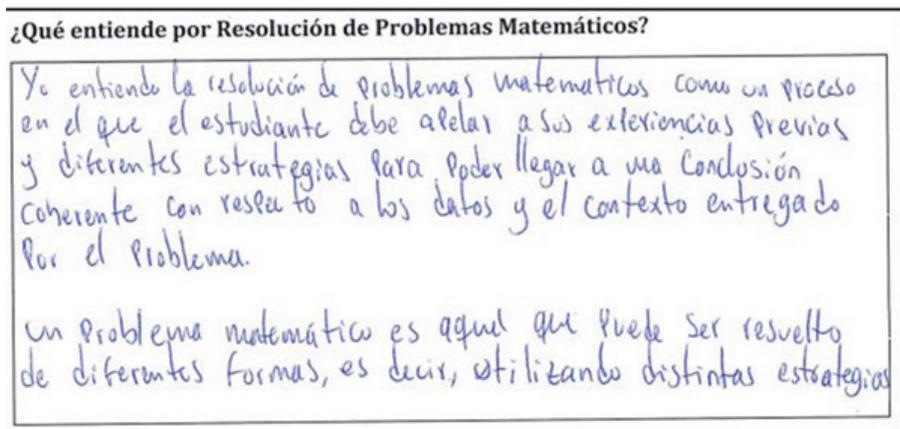
ANÁLISIS Y RESULTADOS

Los resultados están organizados conforme se explicitan las respuestas de los cuatro profesores de matemáticas en formación (P1, P2, P3, P4), en relación a cada una de las cinco preguntas presentadas en la sección anterior. Cabe destacar que por motivos de espacio solo se presentan las respuestas que proporcionan mayor información.

La primera pregunta tiene como objetivo determinar lo que los profesores entienden por Resolución de Problemas Matemáticos. De acuerdo, con Lester (1993) citado en Zimmermann (2016) “La relativa ineficiencia de la instrucción para mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas se puede atribuir al hecho de que la resolución de problemas ha sido a menudo conceptualizada de una manera simplista” (ZIMMERMANN, 2016, p.3). Partiendo del presupuesto que existen imprecisiones, desde una perspectiva teórica en la conceptualización de la Resolución de Problemas, la primera

pregunta busca describir las nociones que poseen profesores de matemática en formación sobre dicho enfoque. Las figuras 1 y 2 muestran las respuestas proporcionadas por los profesores en formación.

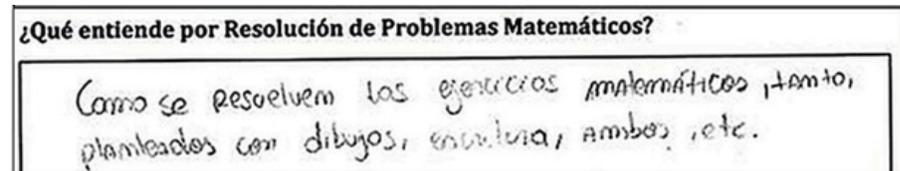
FIGURA 1 – Respuesta Profesor 1 (P1).



Fuente: las autoras.

En la figura 1, podemos observar que el profesor 1 (P1) hace alusión a la (RP) como el proceso que requiere movilizar diversas estrategias para responder a la problemática presentada, además menciona que para ello se deben determinar los datos y el contexto del problema planteado, conjuntamente a eso se debe recurrir a las experiencias previas. Esta respuesta considera algunos elementos de la perspectiva de Schoenfeld quien menciona que “el éxito en la resolución de un problema depende de los conocimientos y habilidades previas que posea el estudiantes” (BAHAMONDE; VICUÑA, 2011, p.8). Sin embargo, el (P1) enfatiza el trabajo de resolución de problemas a partir de diversas estrategias, además no se refiere a otros aspectos involucrados en dicho proceso, como los culturales, los sociales y los cognitivos. En este sentido, se entiende que la respuesta dada por el profesor 1 se acerca principalmente a las perspectivas dadas por Polya.

FIGURA 2 – Respuesta Profesor 2 (P2).



Fuente: las autoras.

En la figura 2, se puede percibir que el (P2) tiene una concepción “limitada” de (RP). Solo explicita las características (dibujos y escritura) que se debe tener en el planteamiento de un determinado problema. De acuerdo a lo señalado por Carrillo, et. al. (2015) el (P2) se refiere a un tipo de problema, conocido como el *Problema de palabras*.¹

El profesor 3 (P3) menciona: “*la resolución de problemas es una situación que no tiene una solución clara*”. Esto se condice con lo señalado por Polya (1989) quien argumenta que resolver problemas significa encontrar un camino para salir de una dificultad, para sortear un obstáculo, para alcanzar un objetivo que no sea inmediatamente alcanzable y por lo mencionado por Schoenfeld (1985) cuando dicho autor señala que un problema es una situación en la que su solución no es inmediata. Para obtener mayor información se entrevistó al (P3) para conocer el significado que le atribuye al problema matemático, señalando: “*Un problema, en un contexto cualquiera, puede ser resuelto con procedimientos matemáticos, ahora ese contexto puede ser o no matemático*”. Es decir, el profesor reconoce la matemática como una herramienta que permite la resolución de problemas no estrictamente matemáticos.

En relación a la respuesta dada por el P4 se evidencia que él reconoce la diversidad de estrategias para la resolución de un problema. Esto se refuerza cuando menciona “*puede llegar a la solución de este problema por diferentes caminos*”. Además, señala “*los estudiantes deben aplicar todas sus capacidades matemáticas, para poder resolverlos*”. De la misma manera que el P1, el P4 considera algunos elementos de la perspectiva de Schoenfeld quien menciona que “*el éxito en la resolución de un problema depende de los conocimientos y habilidades previas que posea el estudiantes*” (BAHAMONDE; VICUÑA, 2011, p.8) y además se refiere a las diversas estrategias y/o caminos para alcanzar la resolución de un problema. En este sentido su respuesta se acerca específicamente a las ideas de Polya.

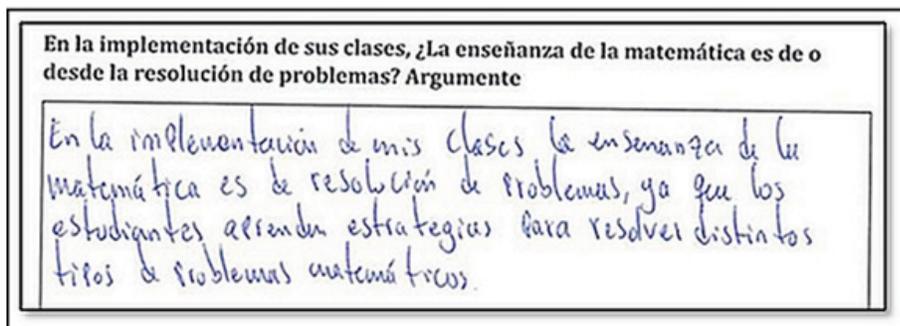
El propósito de las preguntas 2 y 3 es determinar cómo los profesores de matemática utilizan la resolución de problemas en la implementación de sus clases. Se evidencia que todos los profesores valoran y consideran relevante, para la apropiación y comprensión de la matemática, mostrar a los estudiantes diversas estrategias para la resolución de un problema específico.

Cabe destacar, que el profesor 1 (P1), entre sus respuestas menciona: “*La enseñanza de estrategias para la resolución de problemas matemáticos propicia procesos algorítmicos y mecánicos, permite que los estudiantes adquieran un pensamiento lógico matemático*”. Es decir, el (P1) inesperadamente relaciona el trabajo secuencial (enseñanza de estrategias) al desarrollo del pensamiento lógico matemático. Para el caso de la pregunta tres, menciona que, en la implementación de sus clases, la enseñanza de la matemática es de resolución de problemas. Esto se condice con la respuesta a la pregunta dos, pues

¹ El *Problema de palabras* es el que se caracteriza por estar enunciado en un contexto concreto que necesita traducirse al lenguaje matemático para su resolución, en los que toda la información necesaria para resolverlos aparece en el enunciado y, además, suele indicarse la estrategia a seguir (CARRILLO et. al., 2015, p.79).

si el profesor considera que debe enseñar resolución de problemas podría tener sentido la importancia que otorga a la enseñanza de las estrategias (Figura 3).

FIGURA 3 – Respuesta Pregunta 3 Profesor 1 (P1).



Fuente: las autoras.

Por otra parte, el profesor 3 (P3) entre sus respuestas enfatiza la importancia de la resolución de problemas matemáticos y aun cuando considera relevante dar a conocer a los estudiantes algunas “pistas o estrategias” menciona que estas orientaciones se deben complementar con el razonamiento matemático de los estudiantes. En este mismo sentido, señala que en el desarrollo de sus clases la enseñanza de la matemática se efectúa de y desde la resolución de problemas. Sin embargo, otorga especial valoración a la enseñanza desde la resolución de problemas.

Las figuras 4 y 5, presentan las respuestas dadas por el profesor 4 (P4). Allí se percibe, que el docente en el desarrollo de sus clases muestra la resolución de los problemas planteados. Esto se refuerza cuando menciona: “yo enseño a través de un problema matemático, y hago su resolución”. Al parecer el docente siente la responsabilidad de mostrar soluciones pues considera que los estudiantes solo podrán efectuarlas cuando hayan comprendido y abordado los conceptos matemáticos involucrados. El (P4) menciona “primero entienden el concepto matemático y una vez aprendido pueden ellos mismos comenzar con una resolución propia, ya que cuentan con una base dada por el docente, en este caso yo”. En cuanto a la pregunta 2 considera que la enseñanza de estrategias debe realizarse cuando exista una aprehensión significativa de los conceptos.

FIGURA 4 – Respuesta Pregunta 2, Profesor 4 (P4).

¿Es importante la enseñanza de estrategias para la resolución de problemas matemáticos? ¿Por qué?

Considero que sí, pero esto se debe realizar cuando el estudiante maneje muy bien el contenido matemático, para que no tienda a confundirse con pequeños trucos o estrategias matemáticas. Es importante que el estudiante aprenda estas técnicas ya que de esta manera es más rápido al resolver los problemas y aprende a optimizar tiempo en caso de una prueba.

Fuente: las autoras.

FIGURA 5 – Respuesta Pregunta 3, Profesor 4 (P4).

En la implementación de sus clases, ¿La enseñanza de la matemática es de o desde la resolución de problemas? Argumente

Yo enseño a través de un problema matemático, y hago su resolución, ya que considero que de esta manera los estudiantes primero entienden el concepto matemático y una vez aprendido pueden ellos mismos comenzar con una resolución propia, ya que cuentan con una base dada por el docente, en este caso yo.

Fuente: las autoras.

En la pregunta 4 se requería que los profesores estableciesen una regla para dividir una fracción por otra fracción. Todos los profesores explicitan la misma estrategia, es decir, todos aluden a multiplicar la primera fracción por el recíproco de la segunda. Esta estrategia se condice con las propuestas en los programas de estudio y libros de texto chilenos.

En relación a la pregunta 5, el profesor (P2), por ejemplo, alude a que la estrategia utilizada por el estudiante es incorrecta e intenta mostrar un contraejemplo, sin embargo, no explicita por qué falla la regla que intenta describir a través de su contraejemplo. Por otro lado, el profesor (P4), menciona que la estrategia usada por el estudiante es correcta y para ello, muestra una situación que ejemplifica lo señalado, conforme figura 6. Se estima que ambos profesores (P2) y (P4) solo adoptan el significado de fracción como la división de numerador por denominador sin importar la naturaleza de los números que se están dividiendo, es decir, consideran válido una fracción con numerador y denominador no entero, dejando de lado la definición formal de fracción. Además, se infiere que el (P4) valida la conjetura del estudiante considerando sólo el valor numérico que se obtiene de la división usual de fracciones $\frac{5}{3} : \frac{2}{5} = \frac{25}{6} = 4,1\bar{6}$ y del algoritmo propuesto por el estudiante de primaria $\frac{5}{3} : \frac{2}{5} = \frac{5:2}{3:5} = \frac{2,5}{0,6} = 4,1\bar{6}$. Se evidencia los profesores (P2) y (P4) poseen cierto desconocimiento con respecto a la definición de fracción y a una ley de composición interna.

Aunque los cuatro profesores en formación destacan la importancia de incorporar la Resolución de Problemas en la implementación de sus clases, las concepciones que poseen en relación a la RP se acercan, de alguna manera, al modelo de Schoenfeld y, sobretodo, al modelo de Polya. Dicha concepción se reafirma cuándo los profesores destacan la importancia de enseñar a sus estudiantes las estrategias necesarias para la resolución de un determinado problema. Además, los docentes enfatizan que antes de iniciar con la resolución de tareas y/o problemas específicos, es fundamental que los estudiantes posean los conocimientos matemáticos necesarios – trabajados previamente – que le permitan dar respuesta a las problemáticas planteadas. Esta idea se aleja de la concepción presentada por Lesh y Zawojewski (2007) y Lesh y Harel (2003), quienes explicitan que la enseñanza de la matemática debe abordarse desde la resolución de problemas, pues este tipo de instrucción matemática genera, en los estudiantes, procesos cognitivos relevantes como: la conjeturación, la prueba, la generación de hipótesis, la argumentación y, en particular, la formulación de conceptos matemáticos.

¿Podría conjeturar una regla de cómo dividir una fracción por otra fracción?
 Explícite su conjetura.

"Para dividir dos fracciones debemos multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y esto dividirlo por el denominador de la primera fracción y multiplicarlo por el numerador de la segunda fracción.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Esta problemática es presentada a estudiantes. Entre las respuestas dadas se explicita "Para dividir dos fracciones, tengo que dividir el numerador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción. Entonces, divido el resultado por 'el denominador de la primera fracción dividida por el denominador de la segunda fracción"

Si usted fuera el profesor del estudiante ¿Cuál sería su reacción?

Por lo escrito por el estudiante, el debe haber pensado:
 $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4:2}{9:3} = \frac{2}{3}$ mostrana al estudiante p.e.
 Su pensamiento es correcto, ya p.e. al tomar cualquier fracción esto siempre se cumplirá

$$\frac{5}{3} : \frac{2}{5} = \frac{5:2}{3:5} = \frac{2.5}{0.6} = 4.166...7$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{6} = 4.1666...7$$

Fuente: las autoras.

CONCLUSIONES

El objetivo de este escrito fue investigar las concepciones que poseen los profesores de matemática en formación, de una universidad chilena, sobre la resolución de problemas (RP) y cómo ellos la implementan en el desarrollo de sus clases. Los resultados evidencian que existen imprecisiones en las definiciones de resolución de problemas proporcionadas por los profesores en formación. Esto, en general, puede ser producto del desconocimiento de las diversas perspectivas relativas a esta área de investigación. Además, hemos constatado que la conceptualización dada por los docentes se acerca, por un lado, a las perspectivas tradicionales, tales como las propuestas por Polya y Schoenfeld y se aleja, por otro lado, de las perspectivas más actuales como, por ejemplo, la de Lesh

y Zawojewski. En este mismo sentido, hemos corroborado que las respuestas de los profesores sufren influencias curriculares que fomentan la concepción de resolución de problemas como una actividad que se incorpora posterior a la conceptualización de nociones matemáticas específicas.

De acuerdo con Lester y Charles (2003); Schoen y Charles (2003) citado en Frank, Lester y Jinfa Cai (2016) defendemos que “En la enseñanza a través de la resolución de problemas, el aprendizaje se lleva a cabo durante el proceso de intentar resolver problemas en los que se incorporan conceptos y destrezas matemáticas relevantes” (p.3). Es decir, enseñar a través de la resolución de problemas favorece una comprensión conceptual significativa de los objetos matemáticos. En este mismo sentido, dichos autores han demostrado que el enfoque de la enseñanza por medio de la resolución de problemas permite que los estudiantes mejoren su desempeño en la resolución de problemas, no porque hayan aprendido estrategias y heurísticas generales, sino porque tienen una comprensión conceptual de las matemáticas.

Schoenfeld (1992) explicita que los diversos intentos de enseñar a los estudiantes a utilizar heurísticas del estilo de Polya no han sido probados como exitosos. De allí la importancia de fomentar una instrucción matemática desde la resolución de problemas como una herramienta que conduce hacia la construcción de aprendizajes significativos. No obstante, a partir de este estudio hemos evidenciado que los profesores aun no tienen claridad sobre las ventajas de la enseñanza desde RP. Es más, aun cuando todos los profesores en formación valoran la importancia de implementar en el desarrollo de sus clases situaciones problemáticas que requieran ser resueltas, se percibe fuertemente la incidencia curricular 'estricta' que sugiere el trabajo de la RP posterior al desarrollo y estudio de los conceptos matemáticos. Por otra parte, se evidencia que situaciones “sencillas” y provenientes de la enseñanza tradicional pueden generar dificultades en su resolución. Se estima que cuando los estudiantes se enfrentan a problemas cuya resolución es 'evidente' tienden a no cuestionar una estrategia de resolución menos convencional y en ocasiones la invalidan, no propiciando habilidades de reflexión, argumentación, establecimiento de conjeturas, análisis entre otros. Esto representa una gran dificultad pues no se revisan y/o analizan problemáticas que involucran objetos matemáticos específicos en que su significación requiere ser refinada tanto por los estudiantes como también por los profesores.

REFERENCIAS

- BAHAMONDE, S.; VICUÑA, J. *Resolución de problemas matemáticos*. 2011. 140f. Tesis (Pregrado en Educación). Facultad de Educación, Universidad de Magallanes, Punta Arenas.
- BEDOYA, M.; OSPINA, S. *Concepciones que poseen los profesores de matemática sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza y aprendizaje*. 2014. 217f. Tesis (Magíster en Educación Matemática) – Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín, Medellín.

- BISHOP, A. J.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. K. S. *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 2003.
- BLANCO, L. La resolución de problemas. Una revisión Teórica. *SUMA*, n.21, p.11-20, 1996.
- BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. Análise das Propostas de Inovação nos Trabalhos de Conclusão de Curso de um Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, v.10, n.2, 2016, p.53-72.
- CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.; GUERRERO, A.; LÓPEZ, E. La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, v. 8, p.73-93, 2015.
- CASTRO, E. *Resolución de problemas*. Ideas, tendencias e influencias en España. Granada: Universidad de Granada, 2008.
- D'AMORE, B. *Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en actividad de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis, 2010.
- ENGLISH, L. D.; BARTOLINI-BUSI, M.; JONES, G. A.; LESH, R.; TIROSH, D. *Handbook of international research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum, 2008.
- FONT, V. Enseñanza de las matemáticas. Tendencias y perspectivas. In: GAITA, C. (Ed.). III COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2008. *Actas...* p.21-62.
- FRANK, K.; LESTER, Jr.; JINFACAI. Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In: *Posing and Solving Mathematical Problems*. Springer International Publishing, 2016.
- GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2006.
- GUZMÁN, M. Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, v.43, p.19-58, 2007.
- LESH, R.; DOERR, H. Foundation of a Models and Modeling Perspective on Mathematics teaching and Learning. In: _____ (Eds.). *Beyond Constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving*. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2003, p.9-34.
- LESH, R.; HAREL, G. Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, v.5, n.2, p.157-189, 2003.
- LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In: KELLY, A.; LESH, R. (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 2000, p.591-646.
- LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. S. Problem solving and modeling. In: LESTER, F. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007, p.763-804.
- LESTER, F. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing e NCTM, 2007.
- MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. *Análise textual discursiva*. Ijuí: Unijuí, 2011.

- MÜLLER, I. Tendências atuais de educação matemática. *UNOPAR Científica Ciências Humanas e Educação*, v.1, n.1, p.133-144, 2000.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas, 1989.
- POLYA, G. *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1945.
- SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York, NY: Macmillan Publishing Co, 1992, p.334-370.
- SCHOENFELD, A. *Mathematical problem solving*. Nueva York: Academic Press, 1985.
- SILVER, E. A. Research on teaching mathematical problem solving: Some under represented themes and needed directions. In: SILVER, E. A. (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985, p.247-266.
- VILA, A.; CALLEJO, M. *Matemáticas para aprender a pensar*. El papel de las creencias en la resolución de problemas. Madrid: Ediciones Narcea, 2004.
- ZIMMERMANN, B. Improving of Mathematical Problem-Solving: Some New Ideas from Old Resources. In: *Posing and Solving Mathematical Problems*. Springer International Publishing, 2016, p.83-108.