O *design* de tarefas-matemáticas-com-realidade-aumentada: uma autorreflexão sobre o processo[1]

Felipe Diego Bulla
Maurício Rosa

RESUMO

Nesse artigo apresentaremos os dados produzidos a partir de uma pesquisa realizada com intuito de analisar como o *design* de tarefas-com-Realidade Aumentada (RA), pode potencializar/transformar em termos de Modelagem Matemática (MM) o estudo de funções de duas variáveis reais. A pesquisa é de âmbito qualitativo, segundo uma autorreflexão sobre o próprio processo investigativo. Valemo-nos, então, de estudos sobre Tecnologias Digitais, Realidade Cibernética e Realidade Aumentada, Design Instrucional, entre outros. Entendemos que as Tecnologias Digitais, ao tornarem-se partícipes do processo de ensino e de aprendizagem (ROSA, 2008), podem produzir significados matemáticos distintos. Desse modo, exploramos os recursos do programa Blender e do aplicativo AndAR para produção de tarefas-com-Realidade Aumentada sobre funções de duas variáveis reais. Na medida em que as tarefas foram produzidas, refinávamos nosso pensamento e nossa compreensão sobre o tema da pesquisa ao mesmo tempo em que desenvolvíamos, consequentemente, nossa própria Cyberformação (ROSA, 2015). Por fim, vislumbramos que a percepção (MERLEAU-PONTY, 2006) pode contribuir para potencializar/transformar o estudo de funções de duas variáveis reais conforme a prática pedagógica a ser adotada tanto na produção quanto na utilização das tarefas. Ainda, consideramos que o processo investigativo pode ser estendido para o estudo de outros tópicos matemáticos bem como favorecer a formação com professores e futuros professores de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Função de Duas Variáveis Reais. Cyberformação. Tecnologias Digitais.

[1] Pesquisa financiada pelo CNPq, Edital Universal Chamada 14/2013, Processo 486260/2013-5.

Felipe Diego Bulla é Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Rua Phoenix, 82 – Estância Velha, 92031-085 –Canoas/RS. E-mail: felipedbulla@gmail.com
Maurício Rosa é Doutor em Educação Matemática (Unesp-RC). Atualmente, é professor da Faculdade de Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Av. Paulo Gama, 110 – Farroupilha, FACED – Sala 404, 90040-060 – Porto Alegre/RS. E-mail: mauriciomatematica@gmail.com
Recebido para publicação em 9/4/2017. Aceito, após revisão, em 8/5/2017.

The Mathematical-task-with-reality-augmented design: A self-reflection on the process

ABSTRACT

In this paper we will present the data produced from a research carried out with the purpose of analyzing how can the design of the task-with-Augmented Reality (RA) enhance/transform in terms of Mathematical Modeling (MM) the study of functions of two real variables? The research is of qualitative scope, according to a self-reflection about the investigative process itself. So, we are interested in studies on Digital Technologies, Cyber Reality and Augmented Reality, Instructional Design, among others. We understand that Digital Technologies, by becoming participants in the teaching and learning process (ROSA, 2008), can produce different mathematical meanings. In this way, we explore the capabilities of the Blender program and the AndAR application for the production of Augmented Reality tasks over two real-variable functions. To the extent that the tasks were produced, we refined our thinking and understanding on the subject of research while at the same time developing our own Cybereducation (ROSA, 2015). Finally, we notice that perception (MERLEAU-PONTY, 2006) can contribute to enhance/transform the study of functions of two real variables according to the pedagogical practice to be adopted both in production and in the use of tasks. Furthermore, we consider that the investigative process can be extended to the study of other mathematical topics as well as favor the education with teachers and future teachers of mathematics.

Keywords: Mathematics Education. Function of Two Real Variables. Cybereducation. Digital Technologies.

INTRODUZINDO O PROCESSO

Neste artigo, analisamos o desenvolvimento de tarefas-com-Realidade Aumentada[2] (RA) e as possíveis potencialidades do processo de design com RA. Nesse sentido, Kirner e Siscoutto (2007, p.5) apontavam as tecnologias de RA como a próxima geração de interface popular a serem aplicadas nas mais variadas áreas de conhecimento, entre elas, a área da medicina já possui um equipamento capaz de corrigir uma deficiência visual do usuário, com relação a um ponto cego (escuro/turvo), ao se visualizar uma determinada imagem. Também, Kirner (2011) exibe um modelo de jogo interativo suportado pela RA no qual os jogadores respondem a um questionário no *notebook* ao mesmo tempo em que avançam com carros de papel em um tabuleiro físico com marcadores. Esses marcadores, por sua vez, geram novas interações entre o jogador e a interface virtual do jogo (questionário visualizado no *notebook*). A RA, então, mistura elementos da Realidade Virtual (RV) com elementos mundanos, ou seja, objetos e cenários que podemos perceber a nossa volta, em nossa dimensão mundana. Da mesma forma, essas características da RA, a nosso ver, podem potencializar/transformar o estudo de funções de duas variáveis reais.

Assim, na investigação que apresentamos, investigamos essa potencialização com dois licenciandos em matemática e os autores desse estudo, todos componentes

[2] A Realidade Aumentada pode ser definida como "[...] o enriquecimento do ambiente real com objetos virtuais, usando algum dispositivo tecnológico, funcionando em tempo real" (KIRNER; SISCOUTTO, 2007, p.10).

de um grupo de pesquisa formado para compartilhamento de ideias/sugestões sobre os recursos computacionais de RV e RA (ambos necessários para o *design* das tarefas com RA). Trabalhamos na perspectiva de autoanálise como fez Nunes (2011) em seu estudo sobre o *design* de tarefas-com-calculdaora-HP50g-sobre-funções-trigonométricas e, essencialmente, nos concentramos em um processo autorreflexivo sobre o *design* das próprias tarefas construídas pelo primeiro autor desse artigo. Nossa investigação tomou como principal objetivo investigar como a RA, em consonância com a MM, no processo de elaboração de tarefas pedagógico-matemáticas, pode se mostrar à Cyberformação[3] com licenciandos em matemática no estudo de funções de duas variáveis reais, em termos de possível potencialização/transformação desse estudo.

Na medida em que o primeiro autor desse trabalho construía as tarefas-com-RA, avaliávamos (grupo de pesquisa) se a proposta pedagógica de suas tarefas estava de acordo com a prática de MM a ser adotada na utilização das tarefas e, paralelamente, nos esforçávamos para verificar características de como o *design* das tarefas, na perspectiva da RA, pode potencializar/transformar o estudo de funções de duas variáveis reais. Assim, notamos que a percepção, conforme o entendimento de Seidel e Rosa (2011), se mostrou como uma característica para tentar desvelar essa potencialização/transformação.

Com isso, em seguida, discutiremos sobre o referencial teórico que sustenta nossas análises e sobre a metodologia qualitativa utilizada ao longo do processo investigativo, comentando a respeito das Tecnologias Digitais (TD) envolvidas no processo. Por fim, relataremos o desenvolvimento das tarefas, destacando como identificamos a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) como estrutura fundamental elencada pela RA ao se estudar superfícies geradas por funções de duas variáveis reais.

PROCESSO TEÓRICO

Entendemos que o uso das TD em nossa pesquisa pode contribuir para Educação Matemática, no sentindo de gerar outras tarefas que venham a se tornar recursos tecnológico-pedagógico-matemáticos para ensinar e para aprender funções de duas variáveis reais. Assim, destacamos as concepções defendidas por Rosa (2008) ao tratar das relações do ser-com-TD, pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD, pelas quais o processo cognitivo matemático pode ser potencializado pelas tecnologias se a intencionalidade do uso dessas se desvelar no sentido das TD (no caso, desse autor, tomando o ciberespaço como TD) se tornarem efetivamente partícipes desse processo cognitivo. Ou seja, o movimento do ser-aí-no-mundo-com, hifenizado, é concebido como um movimento intencional de lançar-se ao mundo com as tecnologias, de forma que essas não somente auxiliam, mas, participem da produção do conhecimento matemático. Assim, a hifenização

[3] O termo Cyberformação (ROSA, 2015) pode ser entendido como uma formação com Tecnologias Digitais (TD) as quais estão em constante inovação e transformação. A Cyberformação (ROSA, 2015) está dividida em três dimensões: específica (Matemática, no caso de nossa investigação), pedagógica e tecnológica.

dos termos ser-pensar-fazer-com-TD, no caso a ser citado, em especial, com o ciberespaço, é descrita da seguinte maneira pelo autor:

> Sou um "ser" que só existe porque há o ciberespaço. Sou ser-com, pois estou com o mundo cibernético, com as ferramentas computacionais (chat, fórum, email) e com as narrativas ou avatares que me materializam, por meio dos bits da rede. Sou um "ser-com", pois, entre outras coisas, penso-com-o-ciberespaço e aprendo-a-fazer-com-ele, uma vez que, construo o conhecimento em com-junto com o mesmo. Ou seja, sou imerso nesse ambiente e executo minhas ações nele, pois estas constituem os modos como me apresento. O ser, então, também é pensar, também é saber fazer (ROSA, 2008, p.81)

Nessa perspectiva, o mundo cibernético é entendido por Bicudo e Rosa (2010) como o mundo-vida estabelecido pela conexão homem-máquina. Assim, o ciberespaço pode ser compreendido como o ambiente cibernético sustentado materialmente por obra das TD e dos seres humanos, no qual as ações, as informações e as ideias são executadas, desenvolvidas ou construídas. Rosa (2015), também entende que em consequência a esta imersão dos seres humanos no ciberespaço e ou com qualquer outra TD provém a Cyberformação. Nesse caso, a Cyberformação vem a ser uma formação-com-TD, as quais estão em constante transformação e inovação (ROSA, 2015). Portanto, compreendemos que as TD são reorganizadas ou reestruturadas de acordo com as novas necessidades e os pensamentos do ser humano e, reciprocamente, o modo de pensar desse indivíduo é inovado ou interferido a partir do próprio uso das TD. Isso, então, é considerado um processo de *formação* (BICUDO, 2003), plasticamente uma ação que dá forma e se modela na própria ação, contínua e infindável. Logo, em virtude dessa concepção de formação, acreditamos, assim como Rosa (2008), na possibilidade de explorar as TD para desenvolver práticas pedagógicas que possibilitem a transformação/potencialização da produção do conhecimento matemático e consequentemente da própria formação docente. Ou seja, na medida em que professores e alunos interagem com as TD, novos caminhos para o ensino e para a aprendizagem de matemática podem ser trilhados, possivelmente não vistos ou analisados em planos didáticos que não fizeram o uso das TD, ou mesmo que fizeram sem tomar por base a concepção de Cyberformação.

Portanto, pensar-com-TD e fazer-com-TD torna-se um processo evolutivo tanto do "ser" como das TD, pois estamos transformando e potencializando nosso pensamento. Por conseguinte, estamos desenvolvendo, igualmente, TD durante o processo. Conforme notamos nas ponderações de Kenski (2007), tecnologias são instrumentos, produtos ou processos. Se conseguirmos pensar-com-TD ou fazer-com-TD, de modo que nosso pensamento e nossa ação sejam potencializados e/ou transformados durante o próprio processo de aprendizagem, entendemos que estamos produzindo instrumentos e recursos tecnológico-pedagógico-matemáticos, ou seja, Tecnologias.

Nesse ínterim, segundo Kirner e Siscoutto (2007) a tecnologia foi se adequando às necessidades de seus usuários. Graças aos avanços tecnológicos, os autores comentam que pesquisadores da área conseguiram implementar interfaces de voz, interfaces tangíveis, interfaces hápticas[4] etc. aos inventos tecnológicos (computadores, *smartphones* e *tablets*, por exemplo). Em meio a essa evolução tecnológica, começaram a surgir recursos tecnológicos de RA, na década de 90, os quais permitiram a sobreposição de objetos ou ambientes virtuais com o ambiente mundano, a partir de um dispositivo tecnológico.

> Essas aplicações ficaram mais acessíveis somente no início dos anos 2000, com a convergência de técnicas de visão computacional, software e dispositivos com melhor índice de custo-benefício. Além disso, o fato dos objetos virtuais serem trazidos para o espaço físico do usuário (por sobreposição) permitiu interações tangíveis mais fáceis e naturais, sem o uso de equipamentos especiais. Por isso, a realidade aumentada vem sendo considerada uma possibilidade concreta de vir a ser a próxima geração de interface popular, a ser usada nas mais variadas aplicações em espaços internos e externos (KIRNER; SISCOUTTO, 2007, p.5)

Por meio da RA, o usuário possui uma liberdade para interagir tanto com a realidade mundana quanto com a realidade cibernética. A RA nos proporciona uma experiência qualitativamente diferente de uma decorrida na tela de um computador, em virtude dos objetos estarem "presos" ou "amarrados" apenas à realidade cibernética. A RA, também, cria um contexto diferente para a Realidade Mundana, pois, insere elementos cuja materialidade é outra nesse ambiente. Por isso, entendemos que a RA pode modificar a estrutura e o contexto da Realidade Virtual, assim como, o da Realidade Mundana. Consequentemente, nos interrogamos sobre como trabalhar com isso em prol da Educação Matemática.

Nesse sentido, respaldamos nosso entendimento sobre o *Design* Instrucional, o qual segundo as considerações de Filatro (2008, p.97):

> [...] também resulta em um produto final, uma solução educacional, virtual ou não, que apresenta forma e funcionalidade, e propósitos e intenções bem definidos. Tanto é que, bem antes do emprego da tecnologia computacional na educação [...] o design instrucional vem-se ocupando de projetar, implementar e avaliar soluções instrucionais na forma de impressos, filmes, vídeos, áudios etc.

Justamente, projetar, implementar e avaliar soluções instrucionais pode ser um ato que em conformidade com a RA, venha colaborar com a Educação Matemática. Assim, entendemos que o Design Instrucional pode ser capaz de contribuir para que o professor de matemática produza tarefas com formas e funcionalidades específicas a fim

[4] "As interfaces que produzem sinais mecânicos responsáveis por estímulos cinestésicos e de tato são denominadas 'interfaces hápticas'. [...] O termo háptico deriva do grego (ἅπτω) com o sentido original de 'tocar' ou 'agarrar'" (PALACIOS; CUNHA, 2012, p.669).

de atingir propósitos e objetivos educacionais preestabelecidos. Compreendemos que o *design* de tarefas-com-TD (no nosso caso, RA) requerem projeção, implementação e avaliação para possivelmente transformar/potencializar a produção do conhecimento matemático. Exemplo disso pode ser observado a partir da pesquisa de Nunes (2011). Esse autor realizou um trabalho autocrítico e auto reflexivo sobre o *design* de suas próprias tarefas, descobrindo possíveis caminhos e formas para o *design* de tarefas, os(as) quais julgava adequados(as) para atingir seus objetivos pedagógicos no que diz respeito ao estudo de funções trigonométricas. Semelhantemente, o uso das TD em nossa pesquisa nos proporcionou momentos de dúvida e de reflexão, contribuindo para que repensássemos e reorganizássemos o *design* de nossas próprias tarefas-com-TD. Descobrimos funcionalidades e recursos das TD as quais contribuíram para o *design* de nossas tarefas da mesma forma que transformamos nossa maneira de estudar funções de duas variáveis reais. No entanto, essas transformações também se deram em consonância à perspectiva que adotamos para essas tarefas, a qual se voltava à Modelagem Matemática (MM). Ou seja, queríamos tarefas que possibilitassem ao estudante/usuário o ingresso em um processo dinâmico de criar modelos. Nesse ínterim, o conceito de MM adotado para nossa pesquisa é o conceito defendido por Dalla Vecchia (2012, p.123, grifo do autor), o qual diz respeito a "[...] **um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade**".

Desse modo, a inspiração para a construção de nossas tarefas esteve relacionada, intrinsecamente, com elementos do mundo cibernético conforme abordado na tese de Dalla Vecchia (2012). Entretanto, no processo de *design* das tarefas, compreendemos que a produção de sentidos para os saberes matemáticos, ao empregarmos o uso de modelos virtuais (guiados por modelos da Realidade Mundana), puderam emergir a partir da percepção desses modelos virtuais em um ambiente de RA. Não obstante, concordamos com as ponderações de Dalla Vecchia (2012, p.123, grifo do autor) ao interpretar que a MM visa "**encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade**", pois nos embasamos nisso ao conduzir a resolução das tarefas propostas nessa pesquisa em um ambiente de RA, pois, conhecer como os processos de ensino e de aprendizagem matemática podem ser potencializados/transformados nesse espaço nos interessa e nos instiga. Conforme, Dalla Vecchia (2012, p.219), podemos estudar outros caminhos para compreender e ampliar a noção de MM, "[...] buscando associações com outras dimensões da realidade, como realidade aumentada, hiperrealidade e a própria realidade mundana" e, nesse sentido, sob o viés do Design Instrucional, criar tarefas-com-RA que venham a possibilitar o ser-com, pensar-com, saber-fazer-com-RA de forma que estudantes se engajem em um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias relativas a funções de duas variáveis reais.

Uma função f de duas variáveis é definida como "[...] uma regra que associa um único número real $f(x, y)$ para cada ponto (x, y) de algum conjunto D no plano xy" (ANTON, 2000, p.313). No caso, o conjunto D ao qual Anton (2000) se refere é o próprio domínio da função f, ou seja, ele é o conjunto que restringe as variáveis x e y da função f. Com efeito, Anton (2000) cita exemplos de funções de duas variáveis como a fórmula para calcular a área de um retângulo, dada por $A_{retângulo} = b \times h$, tal que b representa a base do retângulo e h representa a altura do retângulo. Nessa situação, $A_{retângulo}$ representa a função $f(b,h)$ na qual b, h são as suas variáveis independentes. Outrossim, o autor ainda argumenta que podemos pensar em uma função de duas variáveis como sendo um programa de computador o qual recebe duas entradas, executa uma operação e, em seguida, produz uma saída.

Distintamente, para Chen (2008), funções multivariáveis são definidas da seguinte forma: seja $f{:}A \rightarrow \mathbb{R}^m{:}x \rightarrow f(x)$[1], onde o domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto no espaço euclidiano n-dimensional e o contradomínio $\mathbb{R}^m$ é um espaço euclidiano m-dimensional tal que $n, m \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in A$, podemos escrever: $x = (x_1, ..., x_n)$, onde $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, pensamos na função [1] como uma função de n variáveis reais x_1, $...x_n$. Se $n > 1$, então dizemos que a função [1] é uma função de várias variáveis reais. Por outro lado, podemos escrever $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$, onde $f_1(x), ... f_m(x) \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que a função [1] é uma função vetorial. Se $m = 1$, então dizemos que a função [1] é uma função real. Chen (2008) ainda exemplifica que nos casos cujos valores de n e m assumem, respectivamente, os valores 2 e 1, dizemos, então, que a função é uma função real de duas variáveis reais. Nessa perspectiva, Anton (2000, p.314) ainda comenta que analogamente às funções de uma variável: "[...] definimos o ***gráfico*** de $f(x, y)$ no espaço xyz como sendo o gráfico da equação $\mathbb{Z} = f(x,y)$. Em geral, tal gráfico será uma superfície no espaço 3-D", o que implica em uma projeção em três dimensões sob um marcador plano disposto em frente ao estudante/professor/usuário, no caso de um gráfico gerado por RA. Logo, na produção de conhecimento matemático sobre esse gráfico, sobre essa função, com-as-TD disponíveis, cabe um estudo sobre a percepção dessas projeções.

Embasamos nosso pensamento nas convicções de Merleau-Ponty (2006, p.6), o qual afirma que a percepção "[...] não é uma ciência do mundo, não é nem mesmo um ato, uma tomada de posição deliberada; ela é o fundo sobre o qual todos os atos se destacam e ela é pressuposta por eles". Assim, concordamos com Seidel e Rosa (2011) que a partir de Merleau-Ponty ainda vislumbram a percepção como "[...] sendo o 'fundo' no qual **as ações são desencadeadas**, e isso implica considerarmos que **o 'algo' perceptivo está sempre no meio de outra coisa**, isto é, ele precisa fazer parte de um 'campo' para que seja dada à percepção" (SEIDEL; ROSA, 2011, p.4 – grifo nosso). Entendemos, então, que a percepção se mostra no/com o mundo no qual as ações são desencadeadas, ou seja, as nossas considerações, ponderações e observações acontecem no/com o mundo na própria percepção.

Seidel e Rosa (2011) sustentam, igualmente, a ideia de revelação intrínseca ao significado de percepção, mencionado anteriormente, conforme as ponderações de Bicudo e Rosa (2010, p.41 – grifo do autor), como sendo "[...] um **ato em movimento** que vai desnudando o que é visto em termos de figura e fundo, ou seja, do contexto em que isso se mostra [...]". Nesse sentido, entendemos que a percepção é um ato duradouro, isto é, ele não acontece de imediato. Ela se mostra na medida em que algo é revelado, desnudado. Assim, aquilo que é percebido vai se "desnudando", ou seja, vai produzindo sentidos com/no mundo.

Por sua vez, os sentidos produzidos por aquele que percebe podem ser diversificados, compreendendo que o outro (SEIDEL; ROSA, 2011, p.5) “[...] para ser percebido, deve ser distinguido de mim como essa espécie de ser sem eu, aquele que pensa e é pensado [...]” e, ainda, entendê-lo como “[...] um sujeito que possui certa ‘visão’ de mundo, que escorrega com a minha visão e ambas são recolhidas formando um único todo, o verso e o reverso em um só mundo no qual participamos como sujeitos da percepção”. Desse modo, compreendemos que cada indivíduo percebe de forma autônoma; porém, toda percepção faz parte de um mesmo universo e, igualmente, o ato de perceber pode ser dado no mesmo contexto. Nossa percepção se distingue da do outrem, uma vez que nossa visão de mundo e nossas experiências são distintas e, por isso, o ato de perceber desencadeia lembranças, pensamentos e considerações distintas para cada indivíduo. Isto é, vivemos em “[...] um mundo que tem vida [...] Portanto mutante, temporalizado, especializado [...] onde estamos umbilicalmente ligados, nutrindo-o e sendo por ele nutrido” (BICUDO, 2011, p.35, grifo da autora). Por isso, estamos em constante transformação, nossas experiências anteriores modificam os acontecimentos posteriores ao passo que o mundo também se transforma ao interagirmos com ele. Nossas experiências causam efeitos tanto em nós como no mundo e nos seres que o habitam.

Logo, a percepção também pode ser desvelada a partir de um exemplo criado por Seidel (2013):

> Ao lado do computador onde estou escrevendo agora, há, vamos assim dizer, um livro aberto na página 15 e um estojo sobre ele. Para mim, que estou vivendo esta circunstância, o estojo que está ali não é um estojo, mas um marcador de página, mesmo não deixando de ser estojo. Para outra pessoa que venha entrar no ambiente procurando uma caneta, o estojo pode ser percebido como um possível lugar para a caneta que ele(a) procura. Ou seja, as coisas no mundo não são dadas “objetivamente”, do tipo “isso é um estojo”, mas constituídas pela intencionalidade com que a consciência se lança ao mundo. (SEIDEL, 2013, p.72)

Com base nas palavras de Seidel (2013), as ações no mundo não ocorrem objetivamente, mas elas são constituídas, de fato, a partir da intencionalidade de cada ser. Seidel (2013, p.72) ainda defende que entendemos o mundo unindo seu extremo objetivismo ao seu extremo subjetivismo, omitindo-se pressupostos teóricos e práticos. Isto é, percebemos o mundo conforme nossa intencionalidade, independente da finalidade teórica ou prática de um determinado objeto (virtual ou mundano), cada indivíduo pode ter uma intenção distinta ao perceber conforme a ação de sua consciência, em determinado momento, no mundo. A percepção se dá diferentes formas, tudo depende da intencionalidade de cada ser, como um indivíduo consciente, no devir em que a percepção acontece.

Nesse ato de perceber, continuamos a lançar luz sobre a percepção da pesquisa que realizamos, assim, nos dedicaremos a escrever sobre o movimento metodológico constituído nessa investigação, o qual podemos observar desde o início da produção de dados até a análise desses.

PROCESSO METODOLÓGICO

A pesquisa realizada se consistiu em um processo investigativo de caráter qualitativo, uma vez que, a pesquisa qualitativa é:

> [...] um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados pós qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.16)

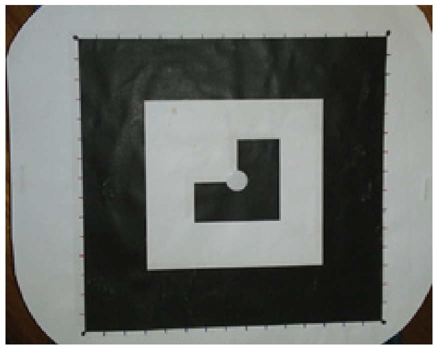
Assim, entendemos que para essa investigação foi necessário adotarmos uma postura qualitativa, em virtude do propósito desse trabalho de buscar responder, possivelmente: *como a Realidade Aumentada potencializa/transforma o design de tarefas em termos da Modelagem Matemática, no que tange o estudo de funções de duas variáveis reais?* Esse "como" abre possibilidades de lançar-se à percepção do fenômeno, qual seja, a RA sendo trabalhada em termos de *design* de tarefas de funções de duas variáveis reais em termos de MM. Nesse ínterim, buscamos em um grupo pequeno, constituído pelos autores desse estudo, como pesquisadores e dois alunos de graduação em Licenciatura em Matemática, evidenciar possíveis aberturas a nossa pergunta. Todavia, o foco principal esteve sobre o primeiro autor desse estudo, o qual foi responsável direto pelo *design* das tarefas com as quais tentamos responder a pergunta diretriz da pesquisa, repensando sua formatação com sugestões dos demais participantes, cada um com seu modo de perceber, sob o viés de suas experiências vividas. Ao longo do processo investigativo, surgiram dificuldades, assim como ideias, as quais são discutidas com os sujeitos da pesquisa e, consequentemente, analisadas nesse trabalho.

Nessa perspectiva, dentre as TD disponíveis para o andamento da pesquisa, selecionamos o aplicativo AndAR, o qual, na tradução das palavras do seu desenvolvedor Domhan (2010): "[...] é um projeto direcionado para o uso de Realidade Aumentada na plataforma Android". Além disso, Domhan (2010) explica que o aplicativo possui um código aberto, ou seja, o mesmo está disponível para receber contribuições de usuários os quais podem submeter fontes de códigos[5] para aprimorá-lo. Domhan (2010) ainda comenta que o AndAR possui uma GPL (General Public License – Licença Pública Geral) a qual permite aos usuários do aplicativo criarem projetos livremente, desde que os mesmos

[5] Os usuários podem submeter, sob a mesma plataforma de programação computacional na qual o aplicativo foi desenvolvido, recursos que ajudem a melhorar suas funções.

respeitem os termos de sua GPL. AndAR está disponível para download na Google Play Store[6] em dois aplicativos distintos: "AndAR" e "AndAR Model Viewer". Ambos os aplicativos são necessários para experimentar os recursos de RA em um *smartphone* ou em um *tablet* (DOMHAN, 2010). Esse autor também revela que para utilização do aplicativo, devemos imprimir um *marker*[7] conforme ilustrado abaixo:

FIGURA 1 – Exemplo de imagem utilizada como *marker* pelo aplicativo AndAR.



Fonte: a pesquisa.

A partir dele, o usuário terá acesso a uma pequena biblioteca a qual é composta por modelos de objetos 3-D como, por exemplo, uma planta, uma cadeira, um sofá ou, até mesmo, um modelo de super-homem conforme ilustrado na figura a seguir:

FIGURA 2 – Imagem capturada da tela do *smartphone* ao projetar o modelo de um super-homem sobre o *marker* utilizado pelo AndAR com a câmera do aparelho.

Fonte: a pesquisa.

[6] A Google Play Store deverá ser acessada a partir de um *smartphone* ou *tablet* com sistema operacional Android. Caso contrário, não será possível realizar o download dos aplicativos AndAR e AndAR Model Viewer. Os links para download dos aplicativos AndAR e AndAR Model Viewer são, respectivamente: https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.dhbw.andopenglcam e https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.dhbw.andarmodelviewer. Acessos em: 17 mar. 2017.

[7] Um desenho específico, utilizado para marcar a posição na qual o objeto virtual será projetado e, simultaneamente, visualizado na tela do *smartphone* ou *tablet* conforme o ângulo de captura da câmera do aparelho.

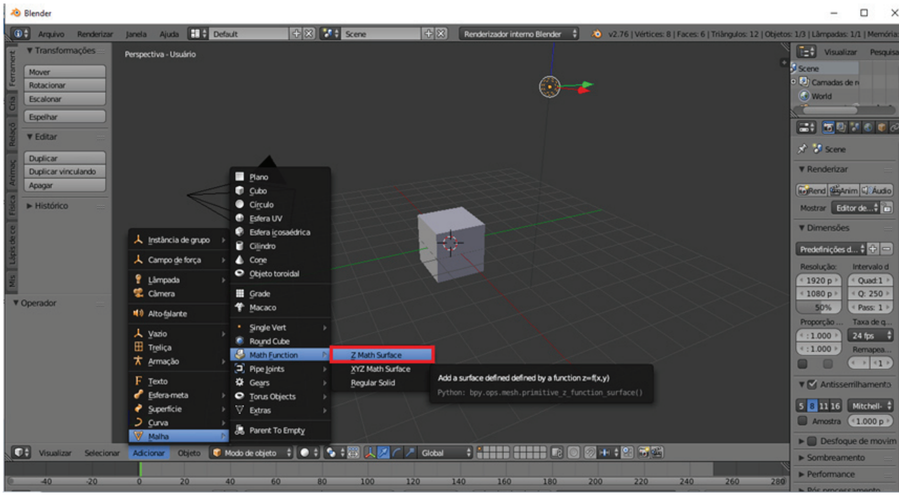
A exploração dos recursos de RA acontece a partir da biblioteca do aplicativo Andar Model Viewer ao apontarmos a câmera do *smartphone* ou do *tablet* para o centro do *marker* (ilustrado na Figura 1). Além dos modelos virtuais 3-D pré-instalados com o aplicativo AndAR Model Viewer, é possível importar modelos virtuais 3-D construídos, por exemplo, com o programa Blender. Contudo, Domhan (2010) adverte que os modelos gerados a partir deste programa devem ser exportados, obrigatoriamente, no formato *wavefront* (extensões *.obj* e *.mtl*) para o aplicativo AndAR Model Viewer. Neste caso, também é necessário instalar o aplicativo OI File Manager[8] para importar os modelos construídos com o programa Blender para visualização sobre o *marker* com o *smartphone* ou *tablet*.

Nesse cenário, o grupo de pesquisa participante explorou o programa Blender para encontrar um recurso capaz de gerar funções de duas variáveis reais. Com efeito, os sujeitos da pesquisa se assistiram, da mesma forma, para descobrir como os arquivos do programa Blender deveriam ser exportados, possibilitando a visualização das superfícies de funções com o aplicativo AndAR. Os manuais do programa Blender e do aplicativo AndAR não estavam claros, em nosso entendimento, e, por isso, o trabalho em equipe contribuiu para se compreender as funcionalidades dos softwares, entre outras particularidades.

A linguagem do programa Blender também dificultou, em alguns momentos, a compreensão de seus recursos. O termo "malha", por exemplo, na verdade está associado ao conceito de superfície, nomenclatura utilizada para os gráficos de funções de duas variáveis, em geral (ANTON, 2000). Analogamente, a noção de comprimento do intervalo definida no recurso *Z Math Function*[9] pelos campos *X Size* e *Y Size*[10] também não estava clara. Nesse sentido, se pensou em efetuar uma série de testes com funções tais como: $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = 2x + y$ para compreender as diferenças entre os gráficos das funções descritas na janela de visualização 3-D. Todavia, verificamos que por meio do programa Blender, é possível, então, construir e modelar objetos virtuais 3-D. Esse programa conta com uma série de mecanismos para transformar, por exemplo, a superfície de um cubo em um modelo de pneu para carros[11]. Os mecanismos do programa Blender, apesar de utilizarem conceitos matemáticos, estão disponíveis em uma linguagem mista, contendo elementos matemáticos bem como elementos de *design* virtual 3-D. Nesse trabalho, entretanto, elaboramos as tarefas com os elementos matemáticos para funções de duas variáveis. Utilizamos o recurso *Z Math Surface* do programa Blender conforme o caminho ilustrado na Figura 3:

[8] Disponível para download na Google Play Store através do link: https://play.google.com/store/apps/details?id=org.openintents.filemanager&hl=pt_BR. Acesso em: 17 mar. 2017.
[9] Esse recurso possibilita a inserção de uma lei de formação de uma função de duas variáveis na janela de visualização 3-D do programa Blender.
[10] Esses campos representam, na verdade, o domínio da função de duas variáveis descrita pela lei de formação inserida com o recurso *Z Math Function*.
[11] Um exemplo de vídeo demonstrando o fato: https://www.youtube.com/watch?v=VdkmBYAWYWw. Acesso em: 17 mar. 2017.

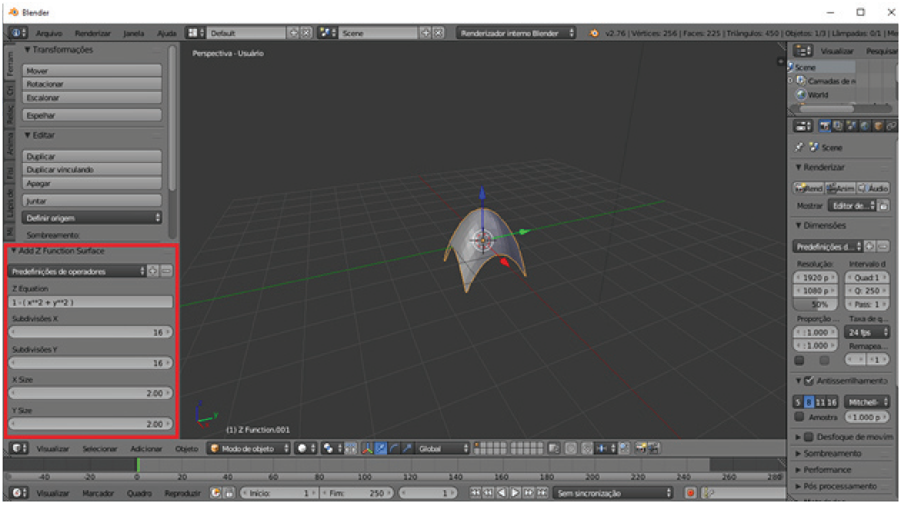
FIGURA 3 – Caminho para acessar o recurso *Z Math Function* do programa Blender, necessário para construir funções de duas variáveis.



Fonte: a pesquisa.

O recurso *Z Math Function* dispõe de cinco campos para preenchimento os quais são: *Z Equation*, *Subdivisões X*, *Subdivisões Y*, *X Size* e *Y Size*. No campo *Z Equation* introduzimos a função $f(x, y)$ que desejamos construir com o programa Blender. Nos campos *Subdivisões X* e *Subdivisões Y* determinamos o número de vértices a serem utilizados para desenhar a superfície da função $f(x, y)$ tanto no eixo x quanto no eixo y. Nos campos *X Size* e *Y Size* selecionamos o comprimento do intervalo no qual a função $f(x, y)$ será definida nos eixos x e y; contudo, o programa Blender interpreta os intervalos da seguinte maneira: $I_{x \text{ ou } y} = \left[-\frac{C_{x \text{ ou } y}}{2}, +\frac{C_{x \text{ ou } y}}{2}\right]$. Nessa situação, $I_{x \text{ ou } y}$ representa os intervalos no eixo x ou y nos quais o gráfico da função $f(x, y)$ será descrito, enquanto que $C_{x \text{ ou } y}$ representa o comprimento do intervalo definido nos campos *X Size* e *Y Size*.

FIGURA 4 – Exemplo de preenchimento dos campos *Z Equation*: $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$, *Subdivisões X*: 16 vértices, *Subdivisões Y*: 16 vértices, *X Size*: $C_x = 2$ e *Y Size*: $C_y = 2$ ($I_{x\ e\ y} = [-1, 1]$).



Fonte: a pesquisa.

Antes de salvarmos o arquivo para ser, posteriormente, aberto com o aplicativo Andar Model Viewer, foi necessário conferirmos as caixas de definições do programa Blender para não ocasionar erros de leitura do arquivo no aplicativo Andar Model Viewer (DOMHAN, 2010).

Assim, com esses recursos, com o objetivo de responder a pergunta diretriz dessa investigação, utilizamos o *design* das tarefas planejadas pelo primeiro autor desse estudo em conjunto com demais membros do grupo de pesquisa, comentando dúvidas, conjecturas e tentativas sobre a preparação das mesmas com o programa Blender, articuladas com o aplicativo AndAR com intuito de praticar a MM no ambiente de RA. Além disso, capturamos imagens da tela do computador, enquanto as tarefas eram desenvolvidas e registramos insights efetuados. Essas imagens e registros foram importantes para retomar o pensamento a respeito das tarefas e auxiliaram na formulação de perguntas quanto ao andamento do processo de *design*.

Não obstante, o desenvolvimento das tarefas discutidas nessa pesquisa foi dividido em momentos distintos; porém, eles se sucederam concomitantemente, uma vez que os sujeitos da pesquisa trabalhavam em conjunto para averiguar os recursos disponíveis nos softwares selecionados. Um dos momentos é formado por experiências, crenças e concepções oriundas da própria formação acadêmica do pesquisador (primeiro autor desse trabalho). Assim, transcrevemos recortes desse momento, ao apresentar as preocupações e reflexões do pesquisador sobre o *design* das tarefas com tecnologia, buscando reconhecer estratégias para o ensino e para a aprendizagem de matemática. Por outro lado, trazemos, igualmente, contribuições formadas por outro participante entre os quais incentivaram o sujeito principal a raciocinar além do *design* planejado de suas próprias tarefas. Na medida em que os colegas do grupo de pesquisa nos forneciam o *feedback* da resolução das versões de tarefas desenvolvidas, repensávamos o processo de construção delas com tecnologia, conduzindo-nos à constante depuração dos objetivos propostos. A partir dos diálogos e trocas de ideias, houve concentração e aprofundamento sobre as TD (nesse caso, o aplicativo Andar e o programa Blender) ao mesmo tempo em que se aprimoravam os saberes sobre funções de duas variáveis. Do mesmo modo, os autores desse estudo articulavam esses saberes ao se buscar realizar MM com as TD, no caso, RA.

Contudo, salientamos, mais uma vez, que o desenvolvimento das tarefas não ocorreu separadamente, mas sim interligado concomitantemente durante a evolução da pesquisa, admitindo contribuições do grupo de pesquisa conforme um processo de depuração compartilhada de ideias (ROSA, 2008). Para realizar a análise desse processo investigativo, visando contribuir com os demais docentes que trabalham com MM e TD, apresentaremos a transcrição e análise dos dados produzidos, vislumbrando responder a pergunta diretriz de nossa investigação.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Os dados da pesquisa serão apresentados indicando o dia ou tempo transcorridos para planejamento das tarefas construídas. Da mesma forma, serão expostas as anotações pessoais do pesquisador principal, refletindo sobre o *design* de suas próprias tarefas. Além disso, serão apresentadas, do mesmo modo, as contribuições dos colegas do grupo de pesquisa ao analisarem o *design* das tarefas ou ao resolverem as tarefas propostas. Assim, foram produzidos os dados relativos aos diálogos entre os integrantes do grupo de pesquisa (por meio de reuniões presenciais, via Skype[12] ou pelo aplicativo Whatsapp),[13] realizando observações possivelmente relevantes para o processo de investigação da pesquisa. Com base nesses dados, ou seja, pesquisador pensando-com-TD (ROSA, 2008), pesquisador dialogando pessoalmente, via Skype e/ou via Whatsapp com o grupo de pesquisa pensando-com-TD (ROSA, 2008), transcrevemos os dados e realizamos suas respectivas análises. Os registros também se mostram a partir de capturas de imagem da tela do computador e/ou da tela do *smartphone* bem como através de algumas anotações pessoais. Assim, a partir desses dados desnudamos uma categoria de análise a qual apresentamos a seguir:

[12] Esse software permite que seus usuários se comuniquem por mensagens de texto bem como chamadas audiovisuais, sendo necessário o cadastramento de um e-mail com domínio relacionado à empresa Microsoft (Hotmail, Outlook, Msn e etc.). Sua plataforma foi desenvolvida para utilização tanto em computadores quanto em *smartphones* ou *tablets*. Por isso, ele possui versões para instalação como um programa ou um aplicativo (conforme o hardware utilizado).

[13] Esse aplicativo possibilita a comunicação via mensagem de texto e de áudio entre usuários de *smartphones* ou *tablets* com o aplicativo Whatsapp devidamente instalado no aparelho nos mais diversos sistemas operacionais (tais como Android e Windows Phone, por exemplo).

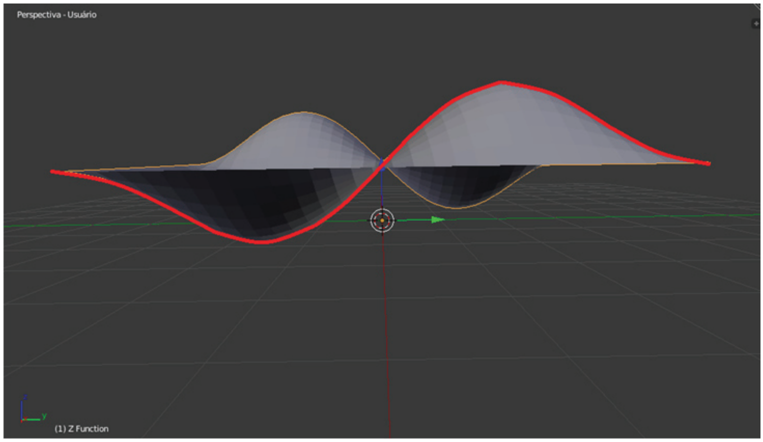
PERCEPÇÃO DISTINTA À REALIDADE MUNDANA

A compreensão dessa categoria manifestou-se no processo de desenvolvimento de tarefas associadas ao ambiente de RA. Estudamos os recursos do programa Blender para construir superfícies, cenários e objetos virtuais; refletimos como seria possível planejar essas tarefas, envolvendo, igualmente, princípios de MM defendidos por Dalla Vecchia (2012); e pesquisamos materiais na internet, os quais envolviam objetos virtuais que faziam referência a modelos mundanos, inseridos em um ambiente de RA. Assim, começamos a explorar a produção de sentidos do conhecimento matemático na percepção de superfícies, cenários e objetos virtuais em um ambiente de RA. Assim, transcrevemos as anotações pessoais do pesquisador principal, realizadas em um arquivo do programa Microsoft Word, ao iniciar a construção do *design* de suas primeiras tarefas. Começamos, então, a analisar a produção de dados dessa pesquisa:

> ***Dia 24/05/2016 – Anotação pessoal:*** *"Preciso criar uma atividade no Blender com a função: $f(x, y)\ sen(x)\cdot sen(y)$, tal que as variáveis x e y estejam limitadas nos intervalos* $[-\pi, \pi]$ e $[-\pi, \pi]$. *Vou limitar o domínio da função nesse intervalo, pois percebi que essa função tem um comportamento semelhante ao da função $f(x) = sen(x)$ nesse mesmo domínio. E se compararmos $f(x, y)$ com $g(x, y) = 2\cdot sen(x)\cdot sen(y)$ em um ambiente de RA? Percebemos alguma diferença? Nota: Pergunto isto, pois em um ambiente de RA não temos condições de analisar o gráfico da superfície definida pelos eixos xyz no espaço tridimensional. Quero verificar se, mesmo assim, é possível perceber alguma diferença entre essas duas funções e gostaria que os colegas descrevessem a diferença entre as superfícies. Pensei em fazer algo semelhante com uma função do tipo $f(x, y) = x^{2a}+y^{2b}$; $a, b \in \mathbb{N}$ e pedir para os colegas descreverem as diferenças entre $f_1(x, y) = x^2 + y^4$ e $f_2(x, y) = x^4 + y^2$ por exemplo".*

Inicialmente, o pesquisador pensou em criar "[...] ***a função:*** $f(x, y) = sen(x).sen(y)$***, tal que as variáveis x e y estejam limitadas no intervalo*** $[-\pi, \pi]$ e $[-\pi, \pi]$ ", pois, sob seu ponto de vista, ele distinguiu características da função $f(x, y) = sen(x)\cdot sen(y)$, as quais lhe pareceram familiares durante seu processo de aprendizagem tanto no ensino médio quanto em sua formação acadêmica. Nesse sentido, ele percebeu que o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ tinha um comportamento análogo ao da função $f(x, y)$. Ele atentou a esse fato ao perceber, devido a sua visão de mundo (SEIDEL; ROSA, 2011) e suas experiências anteriores, a superfície de ângulos específicos, conforme ilustrado na Figura 5:

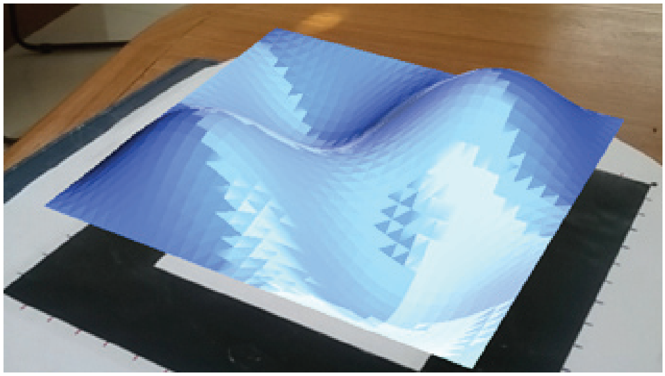
FIGURA 5 – Superfície descrita pela função: $f(x, y)$ - $sen(x)\cdot sen(y) + 1$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ vista a partir do plano yz com o eixo x no sentido positivo.



Fonte: a pesquisa.

Destacamos em vermelho (na Figura 5) a linha que caracteriza o gráfico da função $f(x) = sen(x) + 1$; $x \in [-\pi, \pi]$. De fato, ao observarmos a linha vermelha nessas figuras, estamos olhando para todos os pontos da função f tais que $f\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right) = sen\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen(y) + 1 \rightarrow f\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right) = \pm\, sen(y) + 1$. Ocorre que mesmo ao invertemos o sentido do eixo x (positivo para negativo e vice-versa) ainda continuamos enxergando a função $f(x) = sen(x)$. Assim, entendemos que o pesquisador principal despertou um olhar para o modo como os objetos, os cenários e as superfícies podem ser percebidos em ambientes de realidade virtual e de RA ou, ainda, desenhados em uma folha de papel, pois a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011), tomado pelo ato de pensar-com-TD (ROSA, 2008) do outro (observador) pode ser diferente da nossa, sob esse mesmo olhar, no ambiente de RA. Nessa perspectiva, o *design* das Tarefas 1 e 2 aconteceu identificando possibilidades para se trabalhar com as funções de duas variáveis $f(x, y) = sen(x)\cdot sen(y)$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ e $g(x, y) = cos(x)\cdot cos(y)$; $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Inclusive, podemos utilizar um raciocínio semelhante ao caso anterior (da função $f(x, y)$), tomando $g(0, y) = cos(0)\cdot cos(y) \rightarrow g(0, y) = cos(y)$. Ilustramos as capturas de imagem, realizadas com os recursos do aplicativo AndAR (instalado no *smartphone* do pesquisador principal), para explicarmos essa ponderação:

FIGURA 6 – Imagem capturada em um *smartphone*, com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Tarefa 1: $f(x, y)$ - $sen(x)\cdot sen(y)$; $x,y \in [-\pi, \pi]$.



Fonte: a pesquisa.

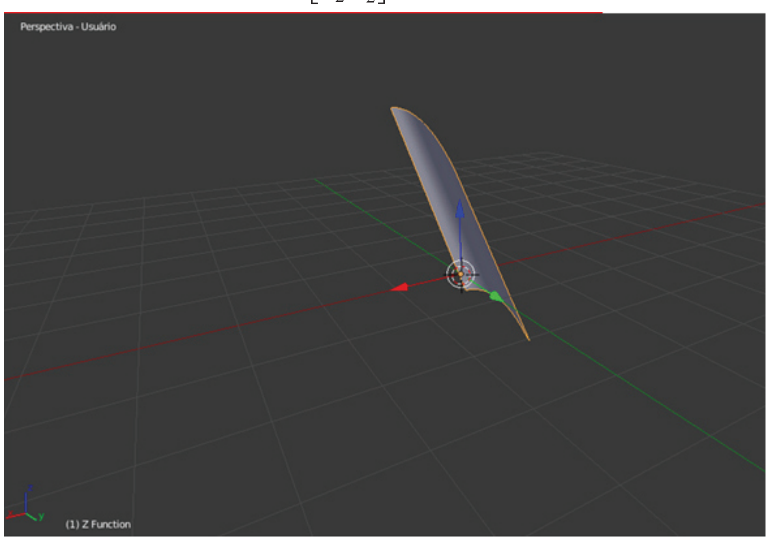
Anton (2000, p.315) argumenta: “Exceto nos casos mais simples, os gráficos de funções de duas variáveis podem ser difíceis de visualizar sem a ajuda de um recurso gráfico computacional”. De fato, o pesquisador principal, não teve condições de esboçar, mentalmente, o gráfico da $f(x, y) = sen(x)\cdot sen(y)$ nem mesmo da função $g(x, y)$ - $cos(x)\cdot cos(y)$; $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ em suas primeiras tentativas.

Retomando a anotação pessoal do dia 24/05/2016, observamos uma tentativa dele para produzir o *design* de uma tarefa ao comentar: “[...] ***Pensei em fazer algo semelhante com uma função do tipo*** $f(x, y) = x^{2a} + y^{2b}$; ***a, b*** $\in \mathbb{N}$ ***e pedir para os colegas descreverem as diferenças entre*** $f_1(x, y) = x^2 + y^4$ ***e*** $f_2(x, y) = x^4 + y^2$***, por exemplo***”. Realmente, podemos perceber que o gráfico das superfícies descritas por funções de duas variáveis com expoentes inteiros pares e positivos como os das funções $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ preservam sua forma em razão da sua simetria com eixo z. A correspondência que podemos fazer, nesse caso, com as funções de uma variável são aquelas geradas a partir da lei de formação $f(x) = x^{2k}$; $k \in \mathbb{N}^+$. Os gráficos das funções formadas por essa lei de formação possuem simetria em relação ao eixo y (em um espaço bidimensional). Assim, o pesquisador procurou realizar experimentos com funções de duas variáveis reais semelhantes à função $f(x, y) = x^{2a} + y^{2b}$; a, b $\in \mathbb{N}$ para tentar construir uma superfície que pudesse ser relacionada a um objeto mundano. Logo, transcrevemos seu esforço para obter resultados a partir da sua próxima anotação pessoal, descrita abaixo:

> ***Dia 25/05/2016 – Anotação pessoal:*** *“Estou tentando criar uma superfície mais sinuosa, semelhante às curvas de um vaso. Tentei com a função* $f(x, y) = -\frac{x^2}{1+x} - \frac{y^2}{y+1}$ *e fiquei surpreso com o resultado, não estou entendendo por que razão a superfície está parecendo um “cone deitado”.*
>
> *“Bah! Que legal! Posso criar uma atividade com uma função que se parece com o “arco” da estação Mercado de Porto Alegre:* $g(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{x^2}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $\in [-4, 4]$”.

No trecho: "***Tentei com a função** $f(x, y) = \frac{x^2}{1+x} - \frac{y^2}{y+1}$ **e fiquei surpreso com o resultado, não estou entendendo por que razão a superfície está parecendo um 'cone deitado'***", o pesquisador principal estava testando expressões para lei de formação da função de duas variáveis reais, tentando encontrar uma superfície sinuosa a qual chamasse a sua atenção. No momento desse registro, ele ainda não sabia que o programa Blender efetuava os cálculos exatamente na ordem em que os elementos estavam escritos no campo *Z Equation*. Ou seja, ao escrevermos $-\frac{x^2}{1+x} - \frac{y^2}{y+1}$ no campo *Z Equation*, o programa Blender realizava as operações da seguinte forma: $-\left(((1 \text{ x } x^2) \div 1\right) + \text{x}) - \left(((1 \text{ x } y^2) + y\right) + 1)$. Desse modo, o pesquisador principal obtinha, na verdade, a seguinte superfície na janela de visualização 3-D do programa Blender:

FIGURA 7 – Superfície construída com o programa Blender, descrita pela função: $f(x, y) = -x^2 + x - y + 1$; $x \in \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]$ e $x \in [-1, 1]$.



Fonte: a pesquisa.

Entretanto, o pesquisador principal nos demonstra satisfação no fragmento em que argumenta: "***Bah! Que legal! Posso criar uma atividade com uma função que se parece com o 'arco' da estação Mercado de Porto Alegre*** $g(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$. O pesquisador principal, ao notar que não obteve o resultado desejado (conforme mencionado no fragmento do registro realizado no dia 25/05/2016), testou coeficientes de valores racionais para as variáveis x e y, procurando obter um gráfico de uma superfície com comportamento diferente das anteriores (superfícies inseridas nas versões iniciais das primeiras tarefas). Na prática, essa função $g(x, y)$ sustentou o *design* da de uma das tarefas, pois, alude a uma outra lei de formação de funções de duas variáveis reais. A seguir, ilustramos o objeto virtual visualizado com o aplicativo AndAR nessa tarefa:

FIGURA 8 – Imagem capturada em um *smartphone*, com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função: $f(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^4}{5} + \frac{17}{5};\ x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$.

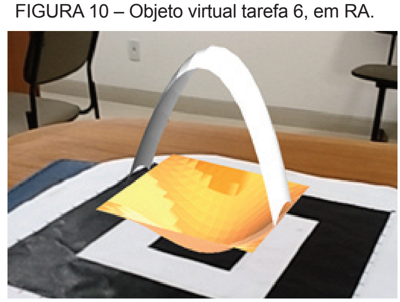
Fonte: a pesquisa.

Ao analisarmos em conjunto as tarefas planejadas até o dia 30/05/2016, percebemos que o processo de resolução das primeiras, tinha o propósito de preparar e instruir os alunos para realização das demais. Isso, pois, os objetos virtuais construídos nessas últimas cinco são constituídos por funções de duas variáveis reais com leis de formação semelhantes às analisadas e estudadas nas três primeiras. Observamos as imagens expostas nas próximas figuras, na perspectiva da RA, relativas aos objetos virtuais construídos para as quatro últimas:

FIGURA 9 – Objeto virtual da tarefa 5, em RA.

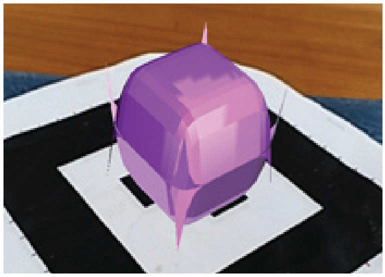
Fonte: a pesquisa.

FIGURA 10 – Objeto virtual tarefa 6, em RA.



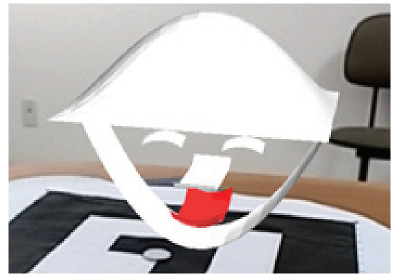
Fonte: a pesquisa.

FIGURA 11 – Objeto virtual da tarefa 7, em RA.



Fonte: a pesquisa.

FIGURA 12 – Objeto virtual da tarefa 8, em RA.



Fonte: a pesquisa.

A ideia de construir objetos virtuais para serem percebidos (SEIDEL; ROSA, 2011) em RA, foi vislumbrada pelo pesquisador principal a partir da anotação pessoal do dia 25/05/2016, conforme descrevemos anteriormente. O objetivo era se pensar-matematicamente-com-RA fazendo referência à realidade mundana. Observamos as imagens capturadas na internet para exemplificar como os modelos de objetos virtuais (Figura 9 a 12) poderiam se relacionar com modelos de objetos mundanos (Figura 13 a 16):

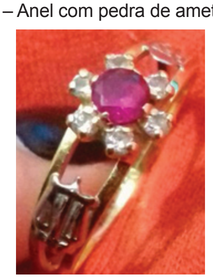
FIGURA 13 – Forma para confecção de ovos de Páscoa.

Fonte: página do site Confraria da Arte[14].

FIGURA 14 – Cestos em três tamanhos distintos.

Fonte: página do site Zardo Arquitetura e Eventos[15]

FIGURA 15 – Anel com pedra de ametista (réplica).



Fonte: a pesquisa.

FIGURA 16 – Brinquedos Playmobil.

Fonte: página do site Pipoca de Pimenta.[16]

[14] Disponível em: http://d2fvaoynuecth8.cloudfront.net/assets/39513/produtos/1484/materiaprima-formasdealuminio-formaovogde.jpg. Acesso em: 07 mar. 2017.
[15] Disponível em: http://www.dizardo.com.br/loc/catdcr/cest/cest21b.jpg. Acesso em: 07 mar. 2017.
[16] Disponível em: http://pipocadepimenta.com/wp-content/uploads/2016/05/Playmobil-2.jpg. Acesso em: 08 mar. 2017.

A busca por tarefas com referência na realidade mundana se deu no sentindo de provocar os estudantes a pensarem-com-RA nos elementos matemáticos dos objetos virtuais (Figuras 9 a 12) de forma que esses modelassem esses objetos questão com o objetivo de se inserirem no processo de construção de funções de duas variáveis reais por diferentes caminhos. Ou seja, a partir de representações gráficas similares a objetos mundanos em uma perspectiva da RA, a qual poderia, a nosso ver, estabelecer aspectos diferenciados.

Junto ao grupo de pesquisa, o "colega A" realizou, individualmente, a construção dos modelos virtuais (percebidos em um ambiente de RA) das quatro últimas tarefas. As funções modeladas pelo "colega A" foram:

(Figura 9)

$$f_1(x, y) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + y^2);\ x \in \left[-\frac{\frac{12}{4,13}}{4}\right] \text{e } y \in \left[-\frac{\frac{1}{2,1}}{2}\right]$$

(Figura 10)

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^4 + y^4) + 1;\ x \in \left[-\frac{\frac{1}{2,1}}{2}\right] \text{e } y \in \left[-\frac{\frac{8}{5,8}}{5}\right]$$

(Figura 11)

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^8 + y^8) + 2;\ x \in \left[-\frac{\frac{1}{2,1}}{2}\right] \text{e } y \in \left[-\frac{\frac{9}{5,9}}{5}\right]$$

(Figura 11)

$$f_4(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + 3;\ x,y \in \left[-\frac{\frac{1}{2,1}}{2}\right] \text{ com origem deslocada } \frac{3}{2} \text{ para direita no eixo } x$$

(Figura 11)

$$f_5(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + 3;\ x,y \in \left[-\frac{\frac{1}{2,1}}{2}\right] \text{ com origem deslocada } \frac{3}{2} \text{ para esquerda no eixo } x$$

(Figura 12)

$$f_6(x, y) = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right) + 4;\ x,y \in \left[-\frac{\frac{13}{4,13}}{4}\right]$$

Notamos que o "colega A" obteve leis de formação diferentes para quase todas as tarefas em comparação às leis encontradas pelo pesquisador principal na elaboração de cada uma das tarefas realizadas. Porém, observamos que ele não representou as superfícies como o pesquisador principal imaginava ao desenvolver a tarefa ou não conseguiu estimar alguns valores para o domínio das funções. Assim, entendemos a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) do "colega A" (sobre a lei de formação de cada uma das funções) foi diferente da que foi elaborada inicialmente pelo pesquisador principal, circunstância que a MM (DALLA VECCHIA, 2012) defende, previamente, no nosso caso, no ato de modelar as imagens em RA.

Compreendemos que o pesquisador ao se lançar à construção do *design* de tarefas planejadas para o ambiente de RA, realizou um movimento semelhante às ponderações de Rosa (2008) ao tratar do ser-com-o-ciberespaço. Distinguimos o ser-com-RA analogamente ao ser-com-o-ciberespaço definido por Rosa (2008). Ser-com-RA, em nosso entendimento, é estar imerso nesse ambiente, seja por gestos naturais na interface háptica do *smartphone* ou, ainda, pela inserção de objetos virtuais semelhantes aos objetos mundanos, misturando-se em nosso ambiente mundano. Entendemos que o movimento de ser-com-RA estabeleceu um elo entre o pesquisador e o ambiente de RA o qual pode ajudá-lo a potencializar e a transformar sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) na produção do conhecimento matemático, no que concerne ao estudo de funções de duas variáveis reais. Realmente, observamos que os recursos de RA se tornaram partícipes do processo de construção do *design* das tarefas. Mesmo que os objetos virtuais tenham sido modelados matematicamente em uma dimensão abrangida pela RV (BICUDO; ROSA, 2010), o pesquisador exercitou sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) a partir do ambiente de RA. Nesse contexto, ele conseguiu perceber, diferentemente, o comportamento dos gráficos descritos por funções de duas variáveis reais em relação ao gráfico das mesmas funções, percebidas em um ambiente de RV ou em uma folha de papel, assim como, perceber que sua tarefa também conduzia seus estudantes/colegas a outras percepções matemáticas. A experiência com o ambiente de RA, sob o ponto de vista do pesquisador principal, contribuiu para sua formação e para sua prática docente, visto as distintas percepções matemáticas dos objetos desenvolvidos. Assim, sob parte do que foi investigado em sua totalidade, nos debruçamos sob como o *design* de tarefas, na perspectiva da Realidade Aumentada (RA), pôde potencializar/transformar em termos de Modelagem Matemática o estudo de funções de duas variáveis reais.

PROCESSANDO CONSIDERAÇÕES

O caminho confrontado nessa pesquisa, naturalmente, contribuiu para formação do pesquisador principal. Ora pela aprendizagem ao estudar possibilidades didáticas com os recursos tecnológicos de RA, ora pelo *design* de tarefas para o estudo de funções de duas variáveis reais em termos de MM. Assim sendo, dados foram produzidos e analisados, ponderando-se suas características para tentar responder nossa pergunta diretriz. Sentimo-nos atraídos pelas possibilidades da RA ao mesmo tempo em que nos dedicamos para compreender as funcionalidades dos programas Blender e AndAR para potencializar o desempenho dos recursos de RA. Além disso, tivemos a sensação de que o vínculo da RA com aparelhos eletrônicos de interfaces naturais (especificamente hápticas) (*smartphones* e/ou *tablets*, por exemplo) nos possibilitaram um "pensar" diferente. Isso nos chama a atenção, pois, de fato, nossa sociedade, no mundo contemporâneo, tende a acompanhar o desenvolvimento das TD, modificando-se e reorganizando-se conforme a evolução tecnológica (DALLA VECCHIA, 2012). Assim, nos parece natural ser-com-RA e pensar-com-RA, uma vez que interagimos nesse ambiente da maneira semelhante às ponderações de Rosa (2008) ao tratar das ações e das interações com o ciberespaço. Convencemos-nos ainda mais, na medida em que os autores Kirner e Siscoutto (2007) expressam suas opiniões sobre como a interface de RA requer gestos fáceis e naturais e, assim, compreendemos que o ensino e a aprendizagem de matemática podem se beneficiar das TD de RA. Acreditamos que a RA pode estabelecer significados possivelmente pertinentes para outros saberes matemáticos além do estudo de funções de duas variáveis reais. Imaginamos que esse recurso tecnológico pode ser aproveitado tanto para o estudo de geometria (euclidiana ou analítica) quanto para Equações Paramétricas (proposta didática identificada ao longo da pesquisa) como outros tópicos matemáticos possíveis.

A pesquisa, então, nos mostrou indicativos que o programa Blender, aliado ao aplicativo AndAR, pode nos ajudar a desenvolver tarefas que estão ancoradas na percepção do outrem (SEIDEL; ROSA, 2011) como forma diferencial de produzir conhecimento matemático. Por isso, entendemos que o *design* de tarefas com tecnologias de Realidade Aumentada pode favorecer a formação de professores e de futuros professores de matemática nos diversos campos de abrangência dessa ciência.

Em virtude da percepção distinta à Realidade Mundana, o processo de autoanálise a respeito do *design* de suas próprias tarefas (realizado pelo pesquisador principal) nos sugere uma possibilidade para trilhar futuras pesquisas que considerem o outrem não como reprodutor de ideias, mas como construtor dessas. Assim, para nós, isso contribui para a formação com professores de matemática, especialmente, em termos de Cyberformação (ROSA, 2015), uma vez que a matemática produzida em estudos como esse se revela uma matemática que não está pronta/acabada, mas em via de descoberta a partir da intencionalidade do ser.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo, um novo horizonte*. 6.ed. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. Porto Alegre: Bookman, 2000. v.1.

BICUDO, M. A. V. A formação do professor: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Formação de professores?* Bauru: EDUSC, 2003.

BICUDO, M. A. V. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez, p.29-40, 2011.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. *Realidade e cibermundo:* horizontes filosóficos e educacionais antevistos. Canoas: Editora da ULBRA, 2010.

CHEN, W. W. L. *Análise multivariável e vetorial*. Universidade Macquarie, Sydney – Nova Gales do Sul, 2008. Disponível em: <https://rutherglen.science.mq.edu.au/~maths/Chen-notes/lnmvafolder/lnmva.html>. Acesso em: 11 mar. 2017.

DALLA VECCHIA, R. *A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético*. Rio Claro: UNESP, 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

DOMHAN, T. Arquivo Google Code. *AndAR – Android Augmented Reality*, mar. 2010. Disponível em: <https://code.google.com/archive/p/andar/>. Acesso em: 17 mar. 2017.

FILATRO, A. *Design instrucional na prática*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

KENSKI, V. *Educação e tecnologias:* o novo ritmo da informação. Campinas: Papirus, 2007.

KIRNER, C. Prototipagem rápida de aplicações interativas de realidade aumentada. *Tendências e técnicas em realidade virtual e aumentada*. SBC, Porto Alegre, v.1, n.1, p.29-54, 2011. Disponível em: <http://comissoes.sbc.org.br/ce-rv/livro2011.pdf#page=29>. Acesso em: 21 mar. 2017.

KIRNER, C.; SISCOUTTO, R. *Realidade virtual e aumentada:* conceitos, projetos e aplicações. Livro do Pré-Simpósio; IX Symposium on Virtual and Augmented Reality, Petrópolis/RJ, 2007.

MERLEAU-PONTY, M. *Fenomenologia da percepção*. Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 3.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006. 662p.

NUNES, J. A. *Design instrucional na Educação Matemática:* trajetória de um professor de matemática que elabora atividades sobre funções trigonométricas com a calculadora HP 50g. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), ULBRA, Canoas, 2011.

PALACIOS, M. S.; CUNHA, R. do E. S. da. A tactilidade em dispositivos móveis: primeiras reflexões e ensaio de tipologias. In: *Contemporânea*, v.10, n.3, set./dez. 2012. p.668-685.

ROSA, M. *A construção de identidades online por meio do Role Playing Game:* relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2008.

ROSA, M. Inovação na prática docente: iniciando pela concepção da cyberformação com professores de Matemática – A formação-docente-com-tecnologias-digitais. In.: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2015, Porto Alegre. *Anais eletrônicos*... Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/anais/anais-do-egem/assets/2015/73605875068P.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2017.

SEIDEL, D. J. *O professor de Matemática online:* percebendo-se em Cyberformação. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil – ULBRA. Canoas/RS, 2013.

SEIDEL, D. J.; ROSA, M. Cyberformação do professor de Matemática: a percepção do outrem. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife/PE. *Anais*... Recife, UFPE, Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2011. 1 CD-ROM.