As Dimensões do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: O *Knowledge Quartet* como Ferramenta de Análise da Prática Docente

Karina Aguiar Alves
Márcia Aguiar
Alessandro Jacques Ribeiro

RESUMO

O presente artigo, parte integrante de uma dissertação de mestrado defendida pela primeira autora, tem por objetivo levantar e mapear quais as dimensões de conhecimentos docentes que emergem de dois professores ao ensinar equação na educação básica. Com esse intuito, fundamentamo-nos no modelo teórico *Knowledge Quartet* para orientar nossas investigações sobre como os conhecimentos docentes desses professores se manifestam na prática de sala de aula ao desenvolverem aulas sobre o conceito de equação na educação básica. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de abordagem interpretativa, tendo os dados sido produzidos em uma formação continuada e captados por meio de gravações em áudio e vídeo, assim como por meio de produções escritas e observação de aulas. Com relação as dimensões do conhecimento matemático para o ensino, os resultados nos mostram como algumas intervenções podem enriquecer abordagens do conceito de equação sob uma perspectiva geométrica na educação básica. Para além disso, em nossas conclusões, apontamos que a manifestação de determinadas dimensões do conhecimento docente é propiciada pela estrutura da dinâmica de aula adotada pelo professor.

Palavras-chave: Conhecimentos Docentes. Formação de Professores que Ensinam Matemática. *Knowledge Quartet*. Ensino de Equação.

The Dimensions of the Knowledge of Math Teachers: The Knowledge Quartet as Instrument of Analysis of the Teaching Practice

ABSTRACT

This article as part of master's dissertation written by the first author has the aim to arise and survey which dimensions of teaching knowledge are emerged from two teachers when they teaching

Karina Aguiar Alves é Mestra do Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e Matemática da UFABC. Correio eletrônico: karina.aguiar@aluno.ufabc.edu.br
Márcia Aguiar é Doutora em Educação Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professora adjunta no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). Correio eletrônico: marcia.aguiar@ufabc.edu.br
Alessandro Jacques Ribeiro é Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Professor adjunto no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). Correio eletrônico: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br
Recebido para publicação em 19 dez. 2017. Aceito, após revisão, em 14 mar. 2018.

equation in elementary education. For that purpose, based on the theoretical model *Knowledge Quartet* to guide our investigations about how these professors' teaching knowledge is shown on their classes when they develop lessons about equation in basic education. This research is a qualitative study with an interpretative approach. Regarding the dimensions of the mathematical knowledge for teaching, the results showed how some interventions can enrich approaches to the concept of equation from a geometric perspective. Moreover, in our findings, we point out that the manifestation of certain dimensions of teacher knowledge is facilitated by the structure of the classroom dynamics adopted by the teacher.

Keywords: Teacher Knowledge. Mathematics Teacher Education. Knowledge Quartet. Teaching of Equation.

INTRODUÇÃO

O artigo aqui apresentado é um dos resultados da dissertação de mestrado desenvolvida pela primeira autora (Alves, 2017) junto ao Programa de Pós-Graduação de uma universidade pública do Estado de São Paulo, sob a orientação dos dois outros autores. Os estudos realizados estavam vinculados a um projeto mais amplo, também concebido na universidade citada, financiado pelo Programa Observatório da Educação (OBEDUC), junto à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).[1] A referida dissertação buscou, em particular, investigar quais conhecimentos profissionais docentes foram mobilizados por dois professores quando eles ministravam aulas sobre o conceito de equação na Educação Básica.

Apresentado o contexto no qual a pesquisa de mestrado foi desenvolvida, situamos nossa intenção de, neste artigo, levantar e mapear quais as dimensões de conhecimentos docentes que emergem dos professores ao ensinar equação na educação básica.

Nossa problemática foi construída tomando-se por base as pesquisas desenvolvidas pelo grupo de pesquisadores da Universidade de Cambrigde, SKIMA,[2] o qual, desde 2002, tem se debruçado sobre os estudos envolvendo a análise, o desenvolvimento e a atuação de professores em sala de aula e, para isso, desenvolveram cenários[3] que englobam os eventos ocorridos nessas aulas. De acordo com esse modelo teórico (Turner & Rowland, 2011) o conhecimento do professor que ensina matemática pode ser estudado a partir da sua prática em sala de aula, considerando a atuação como componente primordial do processo de investigação do ensino da matemática.

Nas seções seguintes, apresentaremos o modelo teórico que fundamentou a produção, análise e discussão dos dados, bem como, apresentaremos nossas conclusões e considerações a respeito da aplicação desse modelo em duas salas de aula da Educação Básica.

[1] Edital 049/2012, Projeto nº 1600. Projeto aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa sob CAAE 55590116.8.0000.5594.

[2] SKIMA: *Subject Knowledge in Mathematics.*

[3] O termo cenário aqui é entendido como um recorte de um evento ocorrido em sala de aula, ou seja, como algo pontual selecionado para análise, mas que pertence ao contexto geral da aula (Powell, Francisco, & Maher, 2004).

AS DIMENSÕES DO CONHECIMENTO DOCENTE: O MODELO TEÓRICO DO KNOWLEDGE QUARTET

Nesta seção nos aprofundaremos na discussão do modelo teórico do *Knowledge Quartet* (KQ) e sua utilização em nossa investigação. Como já fora dito anteriormente, o quadro teórico do KQ é resultado de estudos que vem sendo desenvolvidos desde 2002 em universidades europeias. A proposta consiste em investigar o conhecimento de professores em formação e as formas como esses conhecimentos se manifestam no planejamento e na execução de aulas de matemática (Turner & Rowland, 2011). A partir dos resultados oriundos dessas pesquisas, desenvolveu-se um quadro teórico para observação, análise e desenvolvimento do conhecimento do conteúdo matemático (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005). Ao invés de considerar certas características relacionadas à gestão da sala de aula, o KQ categoriza os eventos de salas de aulas de matemática com enfoque na associação e utilização, pelo professor, do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo trabalhado (Shulman, 1986).

Uma das características do KQ fundamenta-se na importância do exercício prático do ato de ensinar inserido em seu contexto: a sala de aula. Um dos objetivos para o desenvolvimento do KQ reside na identificação de conhecimentos que o professor possui sobre determinados conteúdos matemáticos e como o professor os utiliza em sala de aula como oportunidades potencializadoras de ensino e aprendizagem. A partir deste objetivo, o KQ surge como um meio para reflexão sobre o ensino e o conhecimento do professor com vista ao desenvolvimento de ambos.

Com base na análise dessas aulas filmadas e dos planejamentos realizados, os pesquisadores perceberam que grande parte das interações em que se notara a presença do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico não havia sido planejada pelos futuros professores, mas emergiam espontaneamente a partir da dinâmica da sala de aula. Essas situações que propiciavam a inter-relação entre esses domínios do conhecimento foram agrupadas em 17 diferentes códigos (Rowland, 2013). Após uma releitura e uma compactação desses códigos, baseados nas associações entre os elementos da intersecção desses códigos, foram propostas quatro amplas dimensões, as quais são denominadas por: (i) *Fundamento*, (ii) *Transformação*, (iii) *Conexão* e (iv) *Contingência*[4] (Rowland, 2013). Na Figura 1 encontramos a esquematização das quatro dimensões e suas inter-relações.

[4] *Foundation, Transformation, Connection and Contingency.*

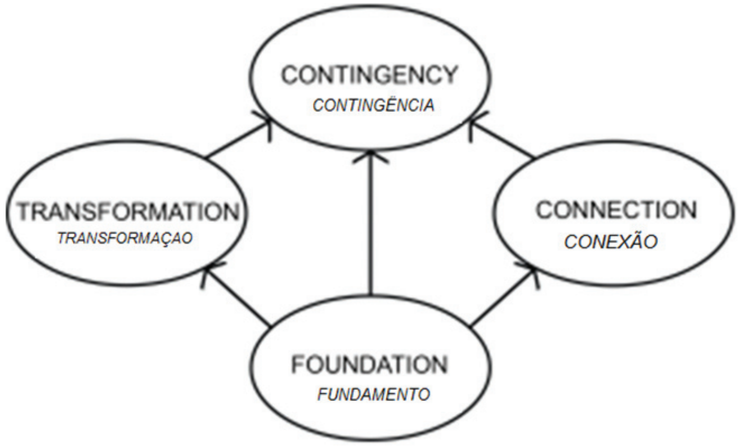


Figura 1. As dimensões do *Knowledge Quartet*

Fonte. Traduzido da *homepage:* http://www.knowledgequartet.org/

Na Figura 1, observamos como cada uma das quatro dimensões se relaciona com as outras. No Quadro 1 observamos os códigos constituintes dessas dimensões. Na concepção dos autores, o KQ é abrangente como uma ferramenta para pensar maneiras de compreender e desvelar como o conhecimento do conteúdo entra em jogo na sala de aula (Turner & Rowland, 2011). No Quadro 1 apresentamos a configuração do quadro teórico com o reagrupamento dos códigos e das dimensões.

Quadro 1. *Relação dos códigos e dimensões do The Knowledge Quartet*

The Knowledge Quartet	
Fundamento	Conhecimentos e crenças sobre: Descrições e significados de conceitos matemáticos e as relações entre eles; Os múltiplos fatores que a investigação revelou serem significativos no ensino e na aprendizagem da matemática; O status ontológico da matemática e os propósitos de ensiná-lo. Códigos contributivos: consciência do propósito; identificação de erros; conhecimento do conteúdo; fundamentação teórica da pedagogia; uso de terminologia; uso de livro didático; confiança nos procedimentos.

The Knowledge Quartet	
Transformação	Conhecimento-na-ação como revelado na escolha e planejamento do ensino. Os próprios significados e descrições são transformados e apresentados de maneira que os alunos possam aprender. Essas formas incluem o uso de poderosas analogias, ilustrações, explicações e demonstrações. A escolha dos exemplos feitos pelo professor é especialmente visível: Para a aquisição de conceitos matemáticos, procedimentos e/ou vocabulário; Para enfrentar e resolver equívocos comuns; Pela justificação (por exemplo genérico) ou pela refutação (por contraexemplo) de conjecturas matemáticas. Códigos contributivos: escolha da representação; demonstração de professores; escolha de exemplos.
Conexão	Conhecimento-na-ação como revelado na escolha e planejamento do ensino. Em uma única aula, ou em uma sequência de aulas, o professor unifica o assunto e desenha a coerência em relação a: Conexões entre diferentes significados e descrições de conceitos específicos ou entre formas alternativas de representação conceitos e procedimentos; A complexidade relativa e as demandas cognitivas de conceitos e procedimentos, atenção ao sequenciamento do conteúdo. Códigos contributivos: fazer conexões entre procedimentos; fazer conexões entre conceitos; antecipação da complexidade; decisões sobre sequenciamento; reconhecimento da adequação.
Contingência	Conhecimento-na-interação como revelado pela habilidade do professor em "pensar com seus pés" e responder adequadamente às contribuições feitas por seus alunos durante um episódio de ensino. Às vezes isso pode ser visto na disposição do professor em desviar-se de seu planejamento quando houver uma contribuição não prevista: Pode ser de benefício especial para aquele aluno, ou Poderia sugerir uma via de investigação particularmente proveitosa. Códigos contributivos: responder às ideias das crianças; uso de oportunidades; desvio do planejamento.

Fonte: apresentado em Rowland, Huckstep e Thwaites (2005, p.265-266, tradução nossa).

Nossa escolha pela utilização do KQ como modelo teórico para o desenvolvimento docente reside na compreensão das características gerais que cada uma das quatro dimensões possui e suas diferenças. O destaque desta tipologia de conhecimentos docentes reside na preocupação em analisar a prática na formação de professores, inicial ou continuada, no que tange o seu desenvolvimento profissional.

A primeira dimensão apresentada por Turner e Rowland (2011) foi *Fundamento*, na qual os conhecimentos e as crenças dos professores estão abarcados. Essa dimensão engloba os pressupostos relacionados ao conhecimento, compreensão e recorrências àquilo que foi aprendido em sua escolarização e em sua formação inicial, de forma intencional ou não. A sua principal distinção das outras três dimensões reside na concepção do conhecimento que o professor possui, o *knowledge 'possessed'*[5] (Turner & Rowland, 2011), independente de saber se tal conhecimento será objeto de uso ou não em sala de aula. A escolha pela primazia dessa dimensão encontra-se em seu protagonismo com relação às demais dimensões, como destacam os autores, uma vez que, a junção desses conhecimentos acadêmicos e pessoais, possibilitaria ao professor a escolha de estratégias pedagógicas de forma mais fundamentada. Em outras palavras, o professor seria capaz de abordagens mais diversificadas que propiciariam uma tomada de decisões mais eficaz e não, simplesmente, a repetição ou imitação de estratégias já utilizadas.

As três dimensões restantes, ao contrário da primeira, referem-se às formas e aos contextos em que o conhecimento é mobilizado na preparação e na condução das aulas. Essas dimensões concentram-se no conhecimento na ação, como pode ser visto no planejamento e na execução das aulas.

A segunda dimensão tratada é a *Transformação* e seu embasamento consiste na definição do domínio do conhecimento especializado do conteúdo (SCK)[6] proposto por Ball, Thames e Phelps (2008). Nessa dimensão considera-se como característica inerente aos conhecimentos docentes, o conhecimento para o ensino, ou seja, não basta o professor deter o conhecimento sobre determinado conteúdo para si, mas, principalmente, espera-se que o professor consiga transpor esse conhecimento de forma a torná-lo ensinável, utilizando-se para isso de diferentes estratégias de ensino.

A dimensão de *Conexão* encontra-se na coerência do planejamento utilizado pelo professor, na promoção do pensamento dedutivo e conexionista entre os conteúdos matemáticos.

> Relacionado com a integridade do conteúdo matemático na mente do professor e sua gestão no discurso matemático na sala de aula, a nossa concepção de coerência inclui a *sequência* de tópicos de instrução entre as aulas, incluindo a ordenação de tarefas e exercícios. Em grande medida, estas refletem escolhas que envolvem não apenas o conhecimento das conexões dentro da própria matemática, mas também a consciência das demandas cognitivas relativas a diferentes tópicos e tarefas. (Turner & Rowland, 2011, p.201, tradução nossa, ênfase no original)[7]

A última dimensão, *Contingência*, refere-se à postura e à conduta do professor em relação aos eventos ocorridos em sala de aula que não foram previstos em seu planejamento. Como relatam os autores, "enquanto o estímulo – as ações pretendidas

[5] Conhecimento possuído, tradução literal.
[6] *Specialized Content Knowledge (SCK).*
[7] *Related to the integrity of mathematical content in the mind of the teacher and his/her management of mathematical discourse in the classroom, our conception of coherence includes the sequencing of topics of instruction within and between lessons, including the ordering of tasks and exercises. To a significant extent, these reflect deliberations and choices entailing not only knowledge of structural connections within mathematics itself, but also awareness of the relative cognitive demands of different topics and tasks.*

pelo professor – podem ser planejadas, as respostas dos alunos não podem." (Turner & Rowland, 2011, p.202). Os autores também destacam que, essa habilidade de reconhecer uma resposta fornecida por um estudante como uma oportunidade de engajamento para aula, não é comum em professores em início de carreira.

O KQ emerge como um modelo teórico oriundo de discussões focadas em conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula e o papel do conhecimento especializado da matemática (SMK) (Ball, Thames, & Phelps, 2008) e sua relação com o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK)[8] (Shulman, 1986). O KQ apresenta-se com a finalidade de ser uma ferramenta útil para capturar ideias importantes e componentes do conhecimento do conteúdo matemático em relação ao ensino.

O grupo de pesquisa liderado por Turner e Rowland, tem testado o quadro teórico extensivamente, tais pesquisas e relatos estão sendo divulgados na *homepage*[9] do grupo de pesquisadores, onde é possível consultar como diferentes pesquisadores tem abordado o KQ como ferramenta descritiva e analítica do conhecimento docente. Neste contexto, nossa pesquisa insere-se com um diferencial, utilizamos os códigos do KQ num curso de aperfeiçoamento docente, com professores em formação continuada, tal experiência será relatada em trabalhos futuros.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Considerando nosso objetivo de investigação, posicionamos nosso referencial epistemológico numa perspectiva construcionista (Esteban, 2010), uma vez que tal perspectiva corrobora com nosso referencial teórico – o *Knowledge Quartet* – no que concerne a mobilização de diferentes formas de conhecimentos em determinados contextos. Do ponto de vista da perspectiva teórica de nossa investigação, tomamos o interpretativismo, segundo Esteban (2010), uma vez que este nos permite alinhar nossos pressupostos filosóficos a uma metodologia condizente, bem como, nos permite inferir elementos provenientes da realidade a ser estudada e das relações sociais, que somente são percebidas quando coletadas em seu ambiente natural.

As aulas ministradas pelos professores participantes foram filmadas e editadas tornando-se cenários de investigação de ensino, os quais foram produzidos com o intuito de contemplar intervenções pontuais dos professores no que diz respeito ao conteúdo matemático. Trouxemos para discussão alguns trechos desses cenários ocorridos em sala de aula, que julgamos pertinentes para discussão e análise dos códigos mobilizados por esses professores. Nossa denominação de cenários vai ao encontro do que Powell, Francisco e Maher (2004) consideram como eventos

[8] No estudo publicado por Turner (2004), o autor avaliou o KQ como uma ferramenta para identificar e desenvolver o SMK e PCK, de futuros professores.
[9] *The Knowledge Quartet*. Disponível em: <http://www.knowledgequartet.org/>. Acesso em: 24 set. 2017.

> [...] *eventos* podem ser descritos como sequências conectadas de expressões e ações que, dentro do contexto de nossas – *a priori* ou *a posteriori* – questões de pesquisa, requerem explicação por nós, pelos estudantes ou por todos. (Powell, Francisco, & Maher, 2004, p.104, ênfases no original)

Tomaremos a utilização do termo *cenário* como sinônimo de *eventos críticos* (Powell; Francisco; Maher, 2004), por ser a tradução que mais se aproxima da já utilizada pelo grupo de pesquisadores do KQ, *scenario*. Destacamos que os cenários de investigação de ensino só diferem em terminologia, mas seu significado converge com a noção de que “Eventos críticos são contextuais. Um evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa.” (Powell, Francisco, & Maher, 2004, p.105).[10]

Com o intuito de facilitarmos nossas identificações e posteriores explanações sobre o assunto, construímos a legenda apresentada no Quadro 2 a fim de identificarmos as dimensões que se apresentam no cenário investigado. Tal inspiração deve-se ao trabalho desenvolvido por Oliveira e Cyrino (2015) na apresentação e análise de dados.

Quadro 2. *Dimensões do Knowledge Quartet (KQ), em cores*

LEGENDA	
Fundamento	
Transformação	
Conexão	
Contingência	

Fonte: adaptado de Oliveira e Cyrino (2015)

A fim de contextualizarmos o leitor, apresentamos um breve perfil dos professores participantes. O professor que ministrou a aula do 3º ano do ensino médio, aqui denominado, John, possuía na época da aplicação, 21 anos de idade e estava cursando o último semestre do curso de licenciatura em matemática, numa faculdade privada da cidade de Guarulhos, sediada na região metropolitana de São Paulo. Não possuía experiência em sala de aula, mas na época, atuava como plantonista em um colégio particular de Guarulhos e fora monitor da disciplina de álgebra na faculdade em que estudava. O outro professor, responsável pela condução do plano de aula do 9º ano, aqui denominado, Paul, possuía na época da aplicação, 39 anos de idade, formação em licenciatura e bacharelado em matemática e em pedagogia. Embora ele possuísse experiência em sala de aula como

[10] Destacamos que nossas observações partem de interpretações subjetivas do ocorrido com a intencionalidade de responder às questões de pesquisa outrora propostas, não intentamos fazer nenhum juízo de valores ou apontar erros e/ou equívocos nas aulas aplicadas, portanto as transcrições foram realizadas de forma a se manter a fidedignidade ao evento ocorrido.

professor, na época do desenvolvimento da aula ele trabalhava em processos de formação continuada com professores de uma rede privada de ensino.

Na seção seguinte, partiremos para a apresentação e posterior análise dos cenários de ensino selecionado para a exemplificação da aplicação do quadro teórico do KQ. Optamos por essa estrutura na separação da análise e discussão, por partimos da ideia de que, na seção de análises, apresentaremos nossos pressupostos teóricos a partir da análise dos dados obtidos; enquanto na seção de discussão, retomamos nossos dados relacionando-os com o referencial adotado.

ANÁLISE DOS DADOS: O PROFESSOR JOHN E AS EQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

A aula ministrada por John na turma do 3º ano do ensino médio ocorreu em uma escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de Santo André, região metropolitana de São Paulo. No dia da aplicação da tarefa, a sala contava com 35 estudantes que foram divididos em grupos de até 4 membros. A duração da aula fora de aproximadamente 100 minutos, dispondo de duas aulas de 50 min cada.

Salientamos que a aula desenvolvida por John, concentrava-se na resolução de uma tarefa, na qual o conceito de equação seria discutido com a intenção de explorar suas potencialidades geométricas. Os estudantes teriam que localizar as coordenadas de uma torre de transmissão que deveria ser posicionada de forma a estar equidistante dos outros 4 pontos (cidades), dois a dois, fornecidos no enunciado da tarefa, como podemos observar na Figura 2.

(IBMEC) Uma Operadora de telefonia quer instalar uma antena para a transmissão da tecnologia 4G que atendam 4 (quatro) cidades: Cuiabá, Brasília, Salvador e Fortaleza, porém para conseguir atender estas 4 cidades esta torre de transmissão terá que ficar exatamente, conforme a seguir:

- A distância entre a torre de transmissão e a cidade de Cuiabá terá que ser igual à distância entre a torre e a cidade de Brasília.
- Assim como terá a mesma distância da torre entre a cidade de Fortaleza e a Cidade de Salvador.

Considerando as coordenadas abaixo, a localização da estação deverá ser em que ponto:
A - Cuiabá (0,0)
B - Brasília (50,0)
C - Salvador (60,30)
D - Fortaleza (30,60)

Figura 2. Tarefa proposta para a turma do 3º ano do EM
Fonte: Dante (2014, p.68)

John iniciou a aula revisitando alguns conceitos que seriam necessários para resolução da tarefa. Nesta seção trazemos para análise, o cenário que aborda o conceito de inclinação, desenvolvido por John junto com a turma do 3º do EM.

No cenário o contexto[11] em que se dava a discussão até então, era a construção do conceito de inclinação, que seria utilizado posteriormente para a formalização do conceito de coeficiente angular. Observamos que John adotou uma postura bastante participativa com a sala, procurando sempre que possível, levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o assunto. Adiante, analisaremos a transcrição do cenário em questão.

Cenário 1. Transcrição do cenário inclinação

[01] P: E inclinação? [...]. Pode falar o que vem a cabeça de vocês…

[02] E1: Mais inclinado…

[03] P: Mais inclinado. Mas o que é esse ser inclinado? Mais inclinado?

[04] E2: Uma coisa assim *(estudante desenha uma diagonal no ar)*

[05] P: Uma coisa mais… diagonal? O que mais?

[06] E3: Hã… se aproximando do chão, no caso.

[07] P: Se aproximando do chão... mas se estiver subindo? Pode?

[08] ESTUDANTES: Pode.

[09]P: Então a gente pode dizer que é algum *detalhezinho* ali que vai direcionar essa reta, por exemplo. Posso falar assim? Se eu quiser saber uma inclinação da reta, eu consigo descobrir?

[10] ESTUDANTES: Consegue.

[11] P: Consigo?

[12] ESTUDANTES: Consegue.

[13] P: Vocês conseguem lembrar como?

[14] E2: É…. tem a ver com o grau.

[15] E3: *iô ô mi xô xô* $(y - y_0) = m\ (x - x_0)$

[16] P: Vocês conseguem lembrar disso que ele falou?

[17] ESTUDANTES: O quê? O quê? Fala aí de novo…

[18] P: *iô iô mi xô xô*... já ouviram falar disso?

[19] ESTUDANTES: Não!

[20] E3: A gente viu isso bimestre passado…

[21] P: E1 Você lembra disso de qual série? De onde? [...]. Olha a professora disse que foi esse ano.

[22] ESTUDANTES: Ixiiii…

[23] P: Ó… é mais ou menos isso daqui ó… *(Professor escreve* $(y - y_0) = m\ (x - x_0)$ *na lousa).*

[24] ESTUDANTES: Ah! Agora sim…!

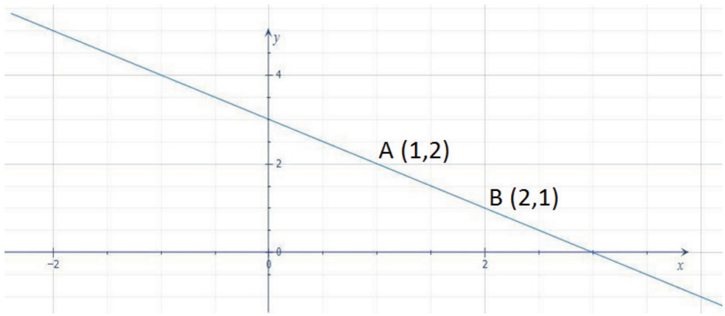
[25] E4: Eu não lembro disso chamar *iô iô*.

[11] Optamos pela transcrição do cenário na íntegra por acreditarmos na importância do contexto geral em que a discussão se desenvolveu.

[26] P: É então... isso daqui é pra gente achar o quê? *(Apontando para a fórmula na lousa)* O coeficiente angular?

[27] E4: Não lembro disso.

[28] P: Tranquilo, né? Se eu tiver, por exemplo se tiver dois pontos eu consigo encontrar o coeficiente angular dessa reta. Então… dessa reta aqui *(apontando para a lousa)* a gente consegue achar o coeficiente angular dela? Consegue? Como?



[29] E1: Você pega o… calma… o final, no caso o 1.

[30] P: Então eu vou colocar aqui o 1.

[31] E1: Menos o *y* inicial que é 2.

[32] P: Ok! Estão entendendo o que ele está falando? Ó.… o *y* final (apontando para a lousa) é isso? E o inicial. Ele determinou quem era o final e o inicial através do que a gente colocou aqui, tudo bem? E aí?

[33] E1: Vai ser igual ao *m*.

[34] P: Ok. Que é o que a gente quer descobrir.

[35] E1: Vezes o *x* final que vai ser 2 menos 1.

[36] P: Menos o 1? É isso? Tranquilo? Então o que é que a gente faz agora? Só a gente fazer as operações, né? Então vai ficar como isso daqui?

[37] E3: *m* igual a…

[38] P: *m* igual? *(Professor escreve na lousa)*

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$(1 - 2) = m(2 - 1)$$

$$m =$$

(A sala sorri constrangida)

[39] P: Ao invés de fazer direto, vamos fazer por partes. Então vai ficar assim, resolve isso daqui primeiro *(apontando para o primeiro termo da expressão)* depois a gente coloca o *m* igual. Primeiro, isso daqui dá quanto? 1 – 2? [...] – 1?, né? [...] – 1 igual a *m* vezes, quanto é isso daqui? *(Apontando para o segundo termo da expressão)* um, certo? E aí? *m* vezes um é quanto? *m*. Qualquer coisa vezes 1 é qualquer coisa, né? Então posso dizer que o 1, aliás que o *m* é igual a…?

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$(1 - 2) = m(2 - 1)$$

$$-1 = m \cdot 1$$

$$-1 = m$$

[40] ESTUDANTES: – 1

[41] P: – 1. Então essa aqui é a inclinação da minha reta? *(Apontando para a lousa)*. Sim. Tá certo estar negativo isso daqui?

[42] E2: Não!

[43] ESTUDANTES: Tá sim…

[44] P: Tá. Por que está certo? [...] A gente pode pensar assim ó.… quando o coeficiente angular é negativo a gente tem daquela propriedade, né? Então a inclina... a direção da reta, né? A reta, né? É uma reta decrescente, né? A gente vê que quando é negativo é decrescente, né? Isso daqui é decrescente? *(Apontando para o gráfico na lousa)*

[45] ESTUDANTES: É!

[46] P: É decrescente, né? Então a gente pode tirar isso daí como *detalhezinhos* pra gente verificar se está correto ou não, tudo bem?

Fonte: dados da pesquisa.

Neste cenário de análise, encontramos alguns códigos mobilizados claramente por John no início de sua explanação. Nos turnos [1] e [3] observamos a mobilização da dimensão *fundamento*. Para introdução do conceito, John adota uma postura de primeiro ouvir o que os estudantes têm a dizer sobre o assunto, demonstra o uso de uma terminologia mais próxima dos estudantes e no trecho em que pergunta se a inclinação pode ser positiva "*Se aproximando do chão...mas se estiver subindo? Pode?",* vemos uma preocupação de John em antecipar uma possível dúvida com relação a inclinação positiva, já que todos os exemplos trazidos pelos estudantes se tratavam de inclinações negativas *"Hã… se aproximando do chão, no caso.*".

No decorrer da exposição de John, observamos nos turnos [14] e [27] intervenções que estudantes fizeram durante a aula, mas que não foram aproveitadas por John, essas intervenções são caracterizadas com códigos pertencentes à dimensão de *contingência*, que pode ser "testemunhada nas respostas dos professores aos eventos da sala de aula que não foram antecipados ou planejados, geralmente desencadeado por uma resposta ou uma observação fornecida por um aluno."[12] (Rowland & Zazkis, 2013, p.138-139).

DISCUTINDO E REFLETINDO A PARTIR DA AULA DO PROFESSOR JOHN

Nesta seção, observaremos as intervenções que poderiam ser mais bem abordadas por John no andamento desse cenário. Cabe destacar que o exercício de pesquisa aqui empreendido se encontra no exercício da utilização dos códigos constituintes do KQ, como uma ferramenta para ser utilizada em tarefas de desenvolvimento profissional docente.

[12] *Contingency, is witnessed in teachers' responses to classroom events that were not anticipated or planned, usually triggered by an answer or a remark contributed by a student.* (Rowland & Zazkis, 2013, p.138-139)

Observamos que nos dois momentos em que houve a possibilidade de uma intervenção por parte dos estudantes, John ignora a fala dos estudantes e continua com o seu planejamento, perdendo oportunidades de explorar o conteúdo, como, por exemplo no turno [14], John poderia ter aproveitado a fala do estudante, explorando a compreensão que o estudante trazia de ângulo e ter esclarecido que por meio do cálculo do coeficiente angular[13] podemos encontrar a inclinação da reta, explorando suas relações com a tangente e o ângulo θ que varia $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Neste caso, John poderia ter optado por um caminho alternativo, partindo do ângulo podemos obter o coeficiente angular, assim fornecendo uma resposta que contemplasse a intervenção do estudante, enriquecendo a aula e motivando a participação dos estudantes.

Uma possibilidade de intervenção que John poderia ter explorado com os estudantes, a fim de aproveitar a dúvida do estudante sobre o grau e contemplar o conceito de declividade, seria a proposição da dedução do coeficiente angular e sua relação com a equação da reta, sendo assim fornecendo aos estudantes uma oportunidade de aprofundamento e inter-relação com os conceitos já trabalhados em séries anteriores. A abordagem do coeficiente angular poderia partir de sua característica geométrica

Ainda se utilizando do exemplo plotado na lousa, poderia deduzir com os estudantes de maneira intuitiva a fórmula para o cálculo do coeficiente angular, utilizando-se para isso de uma abordagem geométrica pautada nas relações trigonométricas do triângulo retângulo, recapitulando e revendo conceitos que os estudantes aprenderam em séries anteriores, como podemos observar na Figura 3.

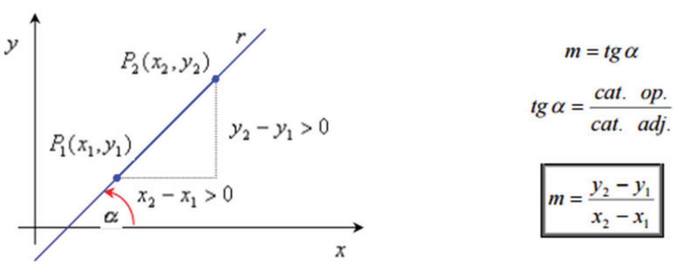


Figura 3. Dedução do coeficiente angular/ declividade
Fonte. Brasil (2010, p.13).

Para então, a partir da dedução do coeficiente angular, generalizar com os estudantes a equação da reta como $y_2 - y_1 = m(x_1 - x_2)$ ou, utilizando a nomenclatura adotada até o momento, $y - y_0 = m(x - x_0)$. Estratégia que, acreditamos ser mais eficaz na construção da relação entre elementos geométricos e algébricos, posteriormente utilizados na execução da tarefa.

[13] Adotaremos neste trabalho a distinção entre inclinação, como o ângulo e o coeficiente angular como tangente do ângulo. Utilizaremos coeficiente angular quando nos relacionamos com a expressão algébrica, enquanto que as ideias de inclinação ou declividade se relacionam a noção geométrica.

Outra característica que nos sobressalta quando analisamos a aula de John, são os momentos contingentes, a postura do professor pode variar e como descrevem Rowland e Zazkis (2013), podem ser de três formas:

> Ignorar, reconhecer, mas deixar de lado e reconhecer e incorporar. Às vezes, existem boas razões para escolher a segunda dessas opções, e talvez até a primeira, mas são oportunidades interessantes, matematicamente e pedagogicamente, para explorar as possibilidades do terceiro tipo. (Rowland & Zazkis, 2013, p.144)[14]

No caso descrito acima, denominaremos esse tipo de contingência como aquela em que o professor ao invés de aproveitar a intervenção do estudante de forma a enriquecer ou explorar outros conteúdos a negligencia, de forma proposital ou não, perdendo oportunidades de enriquecimento, aproximação e valoração de conhecimentos trazidos pelos estudantes. Como já fora apontado em outros trabalhos que utilizam o KQ, a dimensão de *contingência*, requer habilidades do professor na interação com estudantes, é uma dimensão relacionada diretamente à experiência de sala de aula do professor.

Acreditamos que a não utilização desse tipo de oportunidades para construir relações, retomada de conceitos e oportunidades perdidas, pode ser explicada pela não familiarização de John com a classe e sua pouca experiência em sala de aula, que evidencia algumas perdas de chances de intervenções matemáticas. Outra hipótese que podemos considerar para que John não abordasse tais conteúdos, deve-se a uma carência conceitual proveniente da construção das relações da matemática universitária com a matemática para o ensino, demonstrada por John na utilização de alguns exemplos e abordagens empregadas em sala de aula. A não construção dessa relação entre as diferentes matemáticas praticadas e ensinadas nos cursos de licenciatura pode ser encontrada nos trabalhos desenvolvidos por Wassermann (2015) em formação de professores que ensinam matemática.

Na conclusão do cenário, observamos que John ao optar por esse exemplo, em que o coeficiente angular é negativo, o faz de forma a enriquecer a explanação do conteúdo, porque constrói com os estudantes a propriedade de que o coeficiente angular negativo indica que a reta é decrescente. E por fim, a substituição do termo inclinação por direção no turno [44] pode nos indicar uma adequação à terminologia explorada por John no início da aula, a de que os estudantes demonstraram inclinação como algo decrescente. Essa tentativa de adequação do termo inclinação para direção demonstra uma apropriação da terminologia explorada anteriormente.

Considerando aspectos analíticos da aula desenvolvida por John, observamos que a dimensão de *contingência* foi pouco explorada e as oportunidades que surgiram para explorá-la não foram aproveitadas. Algumas hipóteses do que pode ter contribuído para

[14] *To ignore, to acknowledge but put aside, and to acknowledge and incorporate. There are sometimes good reasons for choosing the second of these options, and perhaps even the first, but we find it interesting, both mathematically and pedagogically, to explore possibilities of the third kind.* (Rowland & Zazkis, 2013, p.144).

essa característica: a dinâmica em que a aula do John se desenvolveu, ou seja, de forma contínua, muito mais expositiva, seguindo um sequenciamento dos conteúdos que seriam utilizados na resolução da atividade proposta, não permitiu que houvesse um entrosamento maior entre o professor, os estudantes e a tarefa proposta.

ANÁLISE DOS DADOS: O PROFESSOR PAUL E AS EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

A aula ministrada por Paul na turma do 9º ano do ensino fundamental dos anos finais ocorreu em uma escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de São Paulo. No dia da aplicação da atividade, a sala contava com 38 estudantes que foram divididos em grupos de até 5 membros. A duração da aula fora de aproximadamente 150 minutos.

Destacamos que o objetivo da aula desenvolvida por Paul, concentrava-se na resolução de uma tarefa, na qual o conceito de equação seria discutido a partir da aplicação do método "completando por quadrados". Para isso, os estudantes receberam um *kit* contendo formas geométricas (quadrados e retângulos) em material EVA. Podemos visualizar a tarefa proposta aos estudantes na Figura 4.

④ Após as orientações do professor, conversem entre si e respondam: Qual é o valor de x na equação $x^2 + 4x + 3 = 3$? Registrem suas conclusões abaixo.

Figura 4. Enunciado da tarefa com os estudantes do 9º ano do EF

Paul iniciou sua intervenção propondo aos grupos de estudantes que fizessem a caracterização das figuras entregues calculando suas áreas com a utilização de uma régua. Nesta seção, trazemos o cenário no qual Paul discute com os estudantes a regra de sinais e sua aplicação na resolução de uma equação polinomial de grau 1.

No momento selecionado para análise, os estudantes deveriam agrupar as peças que haviam identificado na atividade introdutória a fim de representarem a expressão $x_2 + 2x + 1$, de forma geométrica, utilizando as figuras já identificadas.

Cenário 2. Transcrição do cenário das regras de sinais

[01] P: Vamos pensar aqui ó...se eu quiser encontrar o x, o valor de x nessa equação. Então, vejam ó... é uma equação que tem o $x^2 + 2x + 1$ que a gente já sabe o que é, tá bom? Então quero encontrar o valor de x aqui...Vocês concordam que eu posso trocar tudo isso aqui ó (sublinha na lousa a expressão $x^2 + 2x + 1$) por quanto?

[02] ESTUDANTE: 3.

[03] ESTUDANTE: $3x$.

[04] P: Olha ali o que a gente já fez. (professor aponta para lousa)

[05] E4: $x1$.

[06] P: Olha para o que a gente já fez.

[07] E1: $x + 1$.

[08] P: $x + 1$?

[09] ESTUDANTES: Ao quadrado.

[10] P. Ao quadrado!

[11] E4: Vocês não soltam a voz!

[12] P: Beleza! Se não soltar a voz eu não vou ouvir, né?

[13] E4: Aí eu sou obrigado a responder!

[14] P: Tudo bem essa troca que a gente fez na equação? (professor coloca embaixo da expressão $x^2 + 2x + 1$, $(x + 1)^2$). O que nós estamos fazendo? Ó eu já vi que tem gente aí ó que foi tentar usar a fórmula com delta.

[15] E4: Isso!

[16] P: O que nós estamos tentando fazer é uma alternativa, tá certo? Pra eu não precisar usar o delta, o a e o c. Vocês estão conseguindo entender isso? Tudo bem?

[17] ESTUDANTES: Sim.

[18] P: Por isso que eu tô fazendo… tentando fazer com que vocês pensem de uma outra forma, tá bom?

[19] E4: Tá bom.

[20] P: Mas vocês já viram, já trabalharam com isso daqui porque a professora X (responsável pela turma) já falou pra gente. Não tem problema. Continuando aqui ó.. então isso daqui a gente colocou o $(x + 1)^2 = 9$ tudo bem? Agora eu quero encontrar o x, não é isso que eu quero fazer? Quando a gente resolve equação o que a gente quer encontrar? [...] Não é o bendito do x? [...] Agora eu quero perguntar o seguinte: qual é o número que ao quadrado dá 9?

[21] ESTUDANTES: 3.

[22] P: 3. Significa que o nosso $x + 1$ aqui ó, ele vale quanto?

[23] ESTUDANTES: 3.

[24] P: 3 porque ele ao quadrado dá 9. Deixa eu perguntar pra vocês: só 3 ao quadrado que dá 9?

[25] ESTUDANTES: Não!

[26] P: Tem outro número que ao quadrado dá 9?

[27] ESTUDANTE: Não conheço.

[28] E4: Se tiver eu não sei.

[29] ESTUDANTE: 3 negativo.

[30] P: 3 negativo?

[31] ESTUDANTES: É!

[32] P: E aí?

[33] ESTUDANTE: 3 vezes 3 é 9.

[34] P: Vocês me falaram 3 positivo. 3 positivo ao quadrado dá 9.

[35] E4: Negativo dá a mesma coisa, não dá?

[36] ESTUDANTE: Dá.

[37] E4: Só dá menos.

(professor escreve na lousa a expressão $3^2 = 9$)

[38] P: Negativo também? Assim ó…

(professor escreve na lousa a expressão $-3^2 = 9$)

[39] ESTUDANTE: É! Sim!

[40] P: Ou assim…

(professor escreve na lousa a expressão $(-3)^2 = 9$)

[41] E5: Com parênteses dá menos.

[42] P: Como você chama?

[43] E5: E5.

[44] P: E5, com parênteses ou sem parênteses?

[45] E5: Eu acho que com…

[46] E4: parênteses.

[47] P: E5, acha que é com que vai dar 9.

[48] E4: Isso mesmo, eu também.

[49] P: Você também. Quando está sem?

[50] E4: Fala aí (se direcionando para E1)

[51] P: Eu tô provocando vocês…

[52] E6: É que quando está sem acaba dis… pera aí...

[53] E1: Quando está sem mantém o sinal, quando divide e quando multiplica.

[54] P: Isso.

[55] E4: Solta voz!

[56] P: Com parênteses... como você chama?

[57] E6: E6.

[58] P: E6 está dizendo que com parênteses o sinal multiplica e sem parênteses o sinal não multiplica. Isso daqui dá menos 9 (completando o resultado da expressão $-3^2 = -9$). E esse aqui dá 9 (preenchendo o resultado da expressão $(-3)^2 = 9$), porque aqui eu faço – 3 vezes – 3. Então é esse aqui que a gente estava procurando (circula a expressão $(-3)^2 = 9$), né? O outro número que ao quadrado dá 9.

Fonte: dados da pesquisa.

Neste cenário, Paul inicia abordando a resolução de uma equação a partir do isolamento da incógnita. Embora a atividade proposta com a turma visasse uma abordagem geométrica, dedutivamente geométrica, Paul recorre a um algoritmo algébrico para encarar a resolução da equação. No turno [18], observando que a sala apresenta certa resistência ao utilizar o método de resolução proposto, Paul argumenta que este método seria uma alternativa à resolução de equações por meio da fórmula de Bhaskara.

Com relação ao cenário, Paul opta por explorar a regra de sinais com os estudantes a partir do questionamento contido no turno [24]. Neste trecho observamos que o professor, baseado nos conhecimentos docentes matemáticos, antecipa-se a uma possível dúvida com relação a regra de sinais aplicada a exponenciação. Adiante prosseguimos com nossas discussões acerca do relatado neste item.

DISCUTINDO E REFLETINDO A PARTIR DA AULA DO PROFESSOR PAUL

Nesta seção, destacamos as intervenções que poderiam ser melhor abordadas por Paul no andamento de sua aula, baseadas nas dimensões constituintes do KQ e em alguns recursos metodológicos que poderiam facilitar a apreensão de conceitos matemáticos. Discutiremos algumas possíveis abordagens que poderiam ser melhor implementadas a fim de facilitar a comunicação entre o professor e os estudantes.

Observamos que o professor demonstra certo domínio dos conhecimentos subjacentes a esse conteúdo, a dimensão de *contingência* se manifesta de forma mais evidente nas intervenções do professor Paul. Tais características podem ser provenientes de sua maior experiência como professor da educação básica, já que esta dimensão depende de características relacionadas a vivência de sala de aula.

No decorrer da explicação, Paul opta por utilizar as expressões 3^2; -3^2; $(-3)^2$ e a partir delas discutir suas implicações uma a uma. Cabe salientar que essa intervenção não fora planejada no plano de aula e surgiu de uma possível antecipação de complexidade observada por Paul. Em conjunto com os estudantes, o professor vai direcionando os estudantes para uma generalização em relação à regra de sinais aplicada nessa operação, o que se encerra no turno [53] com a generalização proposta pelo estudante. No momento de encerramento do cenário, observamos que Paul retoma a generalização no turno [58] adequando a terminologia da regra aos estudantes, revelando a importância da adequação do conhecimento matemático ao propósito de ensiná-lo.

No trecho no qual Paul aborda a regra dos sinais nas potências, observamos que, uma outra forma de abordar o assunto, poderia residir na junção das suas propriedades, de modo a enfatizar ao estudante a retomada e a relação entre os conteúdos. Por exemplo, ao explicar a relação das potências com o sinal, Paul poderia ter explicitado da seguinte forma, enfatizando a noção de oposto (– 3 como oposto de 3), se concentrando nas propriedades numéricas e não na utilização ou não, dos parênteses.[15]

---

[15] As propriedades mencionadas nas operações abaixo decorrem da seguinte proposição:
Sejam a e $b \in Z$, então vale:

(i) $-(-a) = a$

(ii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(Milies & Coelho, 2001, p.17)

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$-3^2 = -(3^2) = -(3 \cdot 3) = -(9)$, o oposto do número 3 elevado ao quadrado é igual ao oposto de 9

$(-3)^2 = (-3).(-3) = -[3.(-3)] = -[-(3 \cdot 3)] = -[-9] = 9$ **aqui temos que o oposto de 3 elevado ao quadrado é igual a 9**

No turno [58], quando Paul ratifica a proposta de generalização do estudante em relação à regra de sinais, observamos que o enfoque concentra-se na utilização, ou não, dos parênteses. Quando, na verdade, a operação que tem sido realizada deveria se concentrar na noção de oposto de um número. Acreditamos que esse tipo de explanação, seja mais profícua para uma educação matemática baseada no sentido das representações matemáticas, na construção de significados que essas operações desempenham, a fim de evitarmos alusões falsas ou propriedades decoradas sem que a construção do sentido seja feita.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta ao iniciar o artigo concentrava-se no levantamento e mapeamento de como as dimensões do conhecimento docente eram mobilizadas pelos professores participantes ao aplicar uma atividade envolvendo o conceito de equação. Consideramos que essa completude na análise não poderia ser extraída por meio de episódios estanques de sala de aula, mas acreditamos que nossa seleção através de cenários de ensino nos forneceu elementos relevantes na construção dos conhecimentos docentes na prática.

Destacamos que a dinâmica de aula escolhida por John baseava-se numa exposição inicial sobre os conteúdos que seriam necessários para a resolução da tarefa proposta, essa dinâmica não possibilitou uma relação tão próxima entre o professor e os estudantes. Concentrou-se, em muitos momentos, numa exposição unilateral de conhecimentos. Já na aula do Paul temos uma outra dinâmica, a cada uma das tarefas propostas temos a intervenção pontual de Paul, ou seja, os estudantes eram convidados a resolver a questão e Paul os acompanhava na posterior resolução, dinâmica essa, que acreditamos ter facilitado a ocorrência de maiores oportunidades de participação dos estudantes com o professor.

Essas dinâmicas diferenciadas das aulas ministradas evidenciam-se no decorrer das tarefas e no surgimento e mobilização de determinadas dimensões constituintes do KQ. Um exemplo disso é o surgimento da dimensão *contingência* muito mais frequente na aula ministrada por Paul do que por John.

Concordamos com Rowland (2013) no que tange o conhecimento matemático para o ensino e suas multifaces provenientes da prática do exercício docente, ampliando a noção de que o conhecimento para o ensino extrapola sua vertente conteudista para abarcar outras relações.

> Sugerimos que a posição de alguém em relação ao conhecimento matemático necessário (ou essencial) para o ensino depende de a percepção do próprio ensinar. Se o ensino envolvesse apenas cenários prescritos e atendendo a um currículo predeterminado, é provável que o conhecimento do currículo fosse suficiente. No entanto, ensinar também envolve atender a perguntas, antecipando algumas dificuldades e lidar com situações inesperadas, aproveitando oportunidades, fazendo conexões e **estendendo os horizontes dos estudantes além do imediatismo das tarefas**. (Rowland, 2013, p.138, tradução nossa, ênfases nossas)

É neste viés que ratificamos a importância de tarefas que discutam a prática do professor em sala de aula em cursos de formação de professores. As dimensões que constituem o trabalho docente não são estanques e necessitam ser teorizadas para serem melhor exploradas.

REFERÊNCIAS

Alves, K. A. (2017). *Perfil conceitual de equação e a sala de aula da educação básica: uma análise do conhecimento profissional docente* (150f.). Dissertação de mestrado, Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What makes it special? Journal *of Teacher Education*, *59* (386), p.389-407.

Brasil, A. N. (2010) *Geometria analítica e álgebra linear.* 1º semestre, 17f. Notas de Aula. Tópico: retas e planos.

Dante, L. R. (2014) *Matemática: contextos e aplicações*. (3ª ed.). São Paulo: Editora Ática.

Esteban, M. P. S. (2010) *Pesquisa qualitativa em Educação: Fundamentos e tradições*. (19ª ed.). Porto Alegre: AMGH.

Milies, C.P. & Coelho, S. P. (2001) *Números: uma introdução à Matemática*. São Paulo: EDUSP.

Oliveira, L. M. C. P. de, Cyrino, M. C. de C. T. (2015) Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. In: *Atas do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, VI, Pirenópolis, 15-19 novembro 2015 (pp.1-12). SBEM: Brasil.

Powell, A. B., Francisco, J. M., Maher, C. A. (2004) Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema, 17* (21), p.81-140.

Rowland, T. The Knowledge Quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers´mathematics knowledge. *Sisyphus, 1*(3), p.15-43.

Rowland, T., Zazkis, R. (2013) Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13* (2), p.137-153.
Rowland, T., Huckstep, P., Thwaites, A. (2005) Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal Of Mathematics Teacher Education*, *8* (3), p.255-281.
Shulman, L. S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), p.4-14.
Turner F., Rowland T. (2011) The Knowledge Quartet as an Organising Framework for Developing and Deepening Teachers' Mathematics Knowledge. In: Rowland T., Ruthven K. (Eds.) *Mathematical Knowledge in Teaching*. Mathematics Education Library, vol 50. Springer, Dordrecht.
Wasserman, N. H. (2015) Introducing Algebraic Sctructures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers. *Primus, 24* (3), p.191-214.