ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss4id4565

As Dimensões do *Making Sense*: a Compreensão de Funções Exponenciais a partir de uma Atividade Investigativa

Dionei Cardozo[a]
Janaína Poffo Possamai[a]

[a] Universidade Regional de Blumenau, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Blumenau, SC, Brasil.

Recebido para publicação em 18 jul. 2018. Aceito, pós revisão, em 20 out. 2018.
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

RESUMO

Esta pesquisa faz parte da dissertação de mestrado em andamento intitulada "Do Átomo de Carbono às Grandes Populações: o Ensino de Funções Exponenciais sob a Perspectiva da Resolução de Problemas" do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau (FURB), que buscou verificar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas aliada ao uso do *software* GeoGebra para a aprendizagem de funções exponenciais. Nesse trabalho, em específico, busca-se relacionar a Resolução de Problemas como uma temática atual da corrente de ensino da Matemática denominada *Making Sense* e verificar as suas implicações para a aprendizagem de funções exponenciais. Para tanto foi desenvolvida e aplicada uma atividade envolvendo a Lei de Resfriamento/Aquecimento de Newton com o objetivo de relacionar as representações tabular, algébrica e gráfica da função exponencial validando os resultados a partir de uma prática experimental baseada nas dimensões do *Making Sense*. Tal atividade foi aplicada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio e constatou-se que esse problema permitiu contextualizar o conteúdo, bem como promover a aprendizagem de novos conceitos a partir de uma prática em que o estudante passa a ser o agente principal de sua aprendizagem e o professor atua como mediador nesse processo, incentivando e instigando quando necessário. Ao final, percebeu-se que os estudantes compreenderam os conceitos envolvidos sem a necessidade da intervenção direta do professor.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. *Making Sense.* Função Exponencial.

The Dimensions of Making Sense: The Understanding of Exponential Functions from an Investigative Activity

ABSTRACT

This research is part of the ongoing Master's dissertation entitled "From the Carbon Atom to the Great Populations: Teaching Exponential Functions under the perspective of Problem Solving" of the Post-Graduation Program in Teaching Natural Sciences and Mathematics of the Regional

Corresponding author: Gilberto Januario. E-mail: januario@ufop.br

University of Blumenau (FURB), which sought to verify the contributions of the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving and the use of GeoGebra software for learning exponential functions. In this specific work, we seek to relate Problem Solving as a theme of the actual current of teaching Mathematics called Making Sense and to verify its implications for the learning of exponential functions. For this purpose, an activity was developed and applied involving Newton's Cooling / Heating Law with the purpose of relating the tabular, algebraic and graphical representations of the exponential functions, validating the results from an experimental practice based on the dimensions of the Making Sense. This activity was applied in a 1st year high school class and it was verified that this problem allowed to contextualize the program content, as well as to promote the learning of new concepts from a practice in which the student becomes the main agent of his learning and the teacher acts as a mediator in this process, encouraging and instigating when necessary. In the end, it was noticed that the students have understood the involved concepts without needing the direct intervention of the teacher.

Keywords: Problem Solving. Making Sense. Exponential Function.

INTRODUÇÃO

Atualmente, muito se tem falado a respeito de aprender Matemática por compreensão, mas que compreensão seria essa? Será que nossas escolas já não vêm ensinando os estudantes a compreenderem os conteúdos ensinados? A resposta, obviamente, é sim, mas infelizmente um alto nível de entendimento não é alcançado por todos estudantes. Uma pesquisa divulgada em 2015 pelo movimento Todos pela Educação mostrou que apenas 9,3% dos estudantes do Brasil, que terminam o Ensino Médio, apresentam o entendimento adequado e necessário da disciplina de Matemática. Tais dados evidenciam que, infelizmente, somente uma minoria está sendo contemplada com o atual sistema de ensino.

Para contribuir com a melhoria desse cenário são necessárias novas abordagens de ensino que possibilitem ao estudante não apenas um entendimento adequado dos conteúdos, como também que o prepare para essa nova dinâmica presente em nossa sociedade, conforme já indicado no final da década 90 por Hiebert et al.:

> Para aproveitar as novas oportunidades e enfrentar os desafios do amanhã, os estudantes de hoje precisam de abordagens flexíveis para definir e resolver problemas. Eles precisam de métodos de solução de problemas que possam ser adaptados a novas situações e precisam do know-how para desenvolver novos métodos para novos tipos de problemas. Em nenhum lugar essas abordagens são mais críticas do que na sala de aula de matemática. Não apenas a tecnologia está tornando algumas habilidades convencionais obsoletas – como altos níveis de velocidade e eficiência com cálculos de lápis e papel – está também ressaltando a importância de aprender novas e flexíveis maneiras de pensar matematicamente. (Hiebert et al., 1997, p.1, tradução nossa)

Em outras palavras, acredita-se que ao promover uma prática de ensino baseada na Resolução de Problemas, o professor estimula os estudantes a investigarem situações novas, às quais não dispõem de métodos mecânicos de resolução, estimulando a elaborarem novas estratégias de pensamento, questionando e aplicando seus conhecimentos e habilidades em novas situações para um ambiente coletivo de aprendizagem (Vila & Callejo, 2006).

Nesse contexto, esse trabalho propõe discussões que possibilitam ao professor novas reflexões acerca de práticas pedagógicas que tenham como mote o *Making Sense*, que se refere à aprender Matemática com compreensão, com sentido. De acordo com Van de Walle (2009) para que a Matemática tenha sentido para o estudante é necessário que ele avance além do saber, de conhecer informações, é mais do que ser capaz de seguir um procedimento ou utilizar um algoritmo. Uma marca da compreensão matemática é a de que o estudante tenha a capacidade de justificar por que uma resposta é correta ou por que uma regra matemática faz sentido.

Com base nessa perspectiva de ensino por compreensão, o objeto matemático que foi utilizado nessa pesquisa refere-se ao ensino de funções, visto que esse é um conteúdo que tem um papel de destaque dentro da Matemática, pela necessidade de se relacionar diferentes tipos de grandezas. Contudo, alguns autores (Willoughby (2000), Candeias (2010), Siqueira (2013)) constataram que os estudantes costumam apresentar dificuldades em compreender alguns aspectos desse componente curricular, seja na passagem de suas diversas representações (algébrica, gráfica, tabular, etc.), seja no entendimento do conceito de função que costuma ser abordado de maneira estritamente algébrico, ou ainda, pela ausência da utilização de recursos tecnológicos, o que dificulta a visualização instantânea das alterações dos parâmetros da função em sua representação gráfica.

Dentre os diversos tipos de funções que são estudadas no Ensino Médio, talvez, a exponencial é a que esteja presente na mais variada gama de situações, inclusive, exterior a própria Matemática. Essas relações, das funções exponenciais com o mundo físico, são enfatizadas por Oliveira (2014, p.15):

> Esta conexão com outras áreas do currículo e com a própria matemática faz com que o ensino e a aprendizagem ganhem mais e melhor sentido, pois cria a oportunidade na qual o aluno percebe a importância do conteúdo a ser trabalhado, o que faz da contextualização uma importante ferramenta de ensino para resolver problemas reais.

Assim, o problema que define essa pesquisa é "Quais as implicações de uma abordagem de ensino baseada nos pressupostos do *Making Sense,* a partir da perspectiva da Resolução de Problemas, para uma prática investigativa de função exponencial?". Esse estudo ocorreu com base na análise dos resultados de uma atividade baseada no método citado, cuja aplicação aconteceu em uma turma de 1º ano do Ensino Médio.

AS DIMENSÕES DO *MAKING SENSE*

Como já especificado, quando se propõe o ensino da Matemática a partir de uma premissa voltada ao *Making Sense*, espera-se, acima de tudo, que aquilo que o estudante aprenda faça sentido e que ele possa utilizar esse conhecimento não apenas para uma atividade específica, mas também para uma série de novas situações que possam servir como fonte de investigação. Aprender por *Making Sense* possibilita que o conhecimento construído em sala também seja útil fora dela. Significa compreender o porquê e para quê.

Ao apresentar os aspectos principais que tornam o aprender Matemática por compreensão como crucial, Hiebert et al. (1997) aponta três premissas. A primeira, segundo o autor, é que quando os conteúdos são aprendidos por compreensão, eles são flexíveis, podendo ser adaptados para novas situações e para a aprendizagem de novos conceitos. A segunda é que aprender Matemática deixa de ser uma prática voltada à memorização e aplicação de algoritmos, para se tornar uma ciência investigativa, possibilitando ao estudante enxergar como as coisas funcionam, como se relacionam com outros tópicos e porquê são assim. E, por fim, aprender por compreensão é uma experiência intelectualmente satisfatória que propicia confiança e envolvimento aos estudantes.

Van de Walle (2009) exemplifica essa mudança de abordagem no ensino da Matemática a partir das próprias atividades desenvolvidas em sala de aula. Na visão do autor, no ensino tradicional costumam prevalecer os verbos do tipo *escutar*, *copiar*, *memorizar*, *fazer exercícios*. Contudo, quando se almeja propiciar a compreensão, novos verbos devem ocupar esse lugar, verbos de ação que incitem o envolvimento e a exposição de ideias. O autor cita como alguns exemplos: *explorar*, *investigar*, *verificar*, *justificar, construir*, dentre outros. Assim, em sua visão, quando confrontados com esse tipo de situação, é praticamente impossível que os estudantes se comportem de maneira passiva.

> O papel do professor é criar este espírito de pesquisa, de confiança e de expectativa. Neste ambiente, os estudantes são convidados a fazer matemática. Os problemas são apresentados e os estudantes buscam soluções por eles mesmos. O foco está nos estudantes ativamente compreenderem as coisas, testarem ideias e fazerem conjecturas, desenvolverem raciocínios e apresentarem explicações. Os estudantes trabalham em grupos, em duplas ou individualmente, mas eles estão sempre compartilhando e discutindo suas ideias. (Van de Walle, 2009, p.33)

Nesse sentido, Hiebert et al. (1997, p.2, tradução nossa) propõem que seja necessária uma mudança na própria organização das aulas de modo a proporcionar esse ambiente: "Acreditamos que a compreensão dos estudantes é tão importante que vale a pena repensar como as aulas podem ser projetadas para apoiá-la". Face a essa situação, os autores propõem que as aulas de Matemática sejam organizadas levando em consideração cinco diferentes dimensões que permeiam todo o processo de ensino e aprendizagem. Tais dimensões estão resumidas na Figura 1 abaixo:

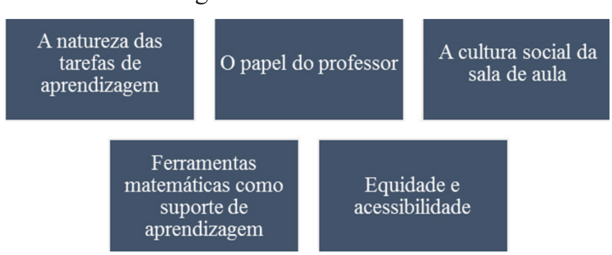


Figura 1. As Dimensões do *Making Sense* (Hiebert et al., 1997).

A primeira dimensão a ser considerada compete à natureza das tarefas de aprendizagem. Hiebert et al. (1997) acreditam que o tipo de atividade matemática que é proposto aos estudantes é o que define o sistema de aprendizagem. Assim, para que um sistema seja construído tendo como base a reflexão e a comunicação, é necessário que existam verdadeiros problemas matemáticos. "Estas são tarefas para as quais os alunos não têm regras memorizadas, nem para as quais percebem que existe um método de solução correto. Em vez disso, as tarefas são vistas como oportunidades para explorar a matemática e propor métodos plausíveis de solução" (Hiebert et al., 1997, p.8, tradução nossa).

Infelizmente, esse tipo de problema não é facilmente encontrado na literatura matemática, nem em livros didáticos. Na maioria das vezes, é necessário que o próprio professor os desenvolva. Contudo, Van de Walle (2009) estabelece três princípios que podem guiar o trabalho do professor:

a) O problema deve começar onde os alunos estão;

b) O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender;

c) A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos.

No tocante ao primeiro princípio, Van de Walle (2009) aponta que o problema deve levar em consideração o atual estágio de compreensão dos estudantes. De nada adianta propor um problema que requer caminhos de solução cuja complexidade não pode ser atingida pelo estudante, assim como também não faz sentido propor atividades que eles já tenham totais conhecimentos de como resolvê-las, pois assim não haverá novo conhecimento a ser construído, nem incentivará a reflexão. "Eles devem ter as ideias apropriadas para se envolver e resolver o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante. Os estudantes devem considerar a tarefa algo que faça sentido" (Van de Walle, 2009, p.57).

No segundo princípio, Van de Walle (2009) enfatiza que os problemas devem ter como intuito propiciar a compreensão de novos conhecimentos, não podendo essa ser prejudicada em favor de outros elementos que tirem o foco da atividade, tais como cortar, colar, colorir, entre outros. Por mais que esses aspectos também tenham a sua importância, o objetivo principal do problema é desenvolver a compreensão do tópico matemático em questão.

E por fim, no terceiro princípio, o autor especifica que o problema pode permitir diferentes caminhos de resolução, mas a justificativa do percurso escolhido e do porquê de uma resposta estar ou não correta é responsabilidade dos estudantes. O professor, por sua vez, tem a sua responsabilidade direcionada para outros momentos da aprendizagem.

Assim, a segunda dimensão a ser considerada na visão de Hiebert et al. (1997) é o papel do professor durante a resolução desses problemas. O autor aponta que, tradicionalmente, no ensino da Matemática, o professor sente-se responsável por explicar todas as informações detalhadamente aos estudantes e, depois, propõe uma série de questões para que eles possam praticar aquilo que foi visto. Entretanto, quando se almeja um ensino por compreensão o professor muda seu papel na sala de aula.

> Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. (Onuchic, 1999, p.216)

Nesse contexto, o professor não explica diretamente todo o conteúdo, o entendimento deve resultar do contexto do problema e das discussões conjuntas dos estudantes. Durante essa etapa, o professor tem a oportunidade de incentivar o raciocínio dos estudantes sem, contudo, oferecer respostas diretas a seus questionamentos, que inibam a construção da aprendizagem. "Cuidadosamente, ofereça sugestões adequadas – mas apenas sugestões baseadas nas ideias dos estudantes e nos seus modos de pensamento" (Van de Walle, 2009, p.64). O professor precisa ter em mente, que o ponto de partida da aprendizagem matemática não deve ser a definição, mas o problema. Desse modo, a Resolução de Problemas não deve ser uma atividade a ser desenvolvida em paralelo a outras tarefas, mas sim, como uma orientação para a aprendizagem (Onuchic, 1999).

A terceira dimensão proposta por Hiebert et al. (1997) enfatiza o estabelecimento de uma cultura social de aprendizagem em sala de aula. De um modo geral, o autor propõe que, para desenvolver uma comunidade de aprendizes, quatro características principais fundamentam a organização das aulas.

A primeira é a socialização das ideias, que na visão de Hierbert et al. (1997), devem permear todo o ambiente escolar. Assim, de modo a obter comunidades de aprendizagem, sugere-se que o trabalho aconteça em equipes, onde cada integrante tem a oportunidade de sugerir e ouvir novas opiniões ou métodos de solução. A partir disso, as trocas de ideias e as discussões são incentivadas e formam a base das interações sociais daquela comunidade (equipe).

Na sequência, Hiebert et al. (1997) apontam que os estudantes devem estabelecer seus próprios métodos de solução e compartilhá-los com os demais, ajudando-os também no entendimento do raciocínio utilizado. Essa prática, quando não implementada espontaneamente, precisa ser incentivada pelo professor. Saber justificar os processos e os caminhos de solução é relevante nas aulas de Matemática, conforme afirma Cândido (2001, p.17):

> Quando se trata de matemática, sempre que pedimos a uma criança ou a um grupo para dizer o que fizeram e por que o fizeram, ou quando solicitamos que verbalizem os procedimentos que adotaram, justificando-os, ou comentem o que escreveram, representaram ou esquematizaram, relatando as etapas de sua pesquisa, estamos

> permitindo que modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as idéias matemáticas. Dessa forma, simultaneamente, os alunos refletem sobre os conceitos e os procedimentos envolvidos na atividade proposta, apropriam-se deles, revisam o que não entenderam, ampliam o que compreenderam e, ainda, explicam duas dúvidas e dificuldades.

Isso evidencia que a justificativa de uma resolução não acarreta benefícios apenas aos demais estudantes que participam da discussão, mas também para quem está argumentando em favor de suas ideias. Essa ação propicia um ambiente único para exploração e investigação matemática.

A terceira característica, em favor de uma cultura social de sala de aula baseada no *Making Sense*, é concernente à prerrogativa de que os erros cometidos pelos estudantes devem ser tratados não apenas para avaliação do professor, mas principalmente como oportunidades de avançar ainda mais em direção à compreensão do assunto em questão. Nesse contexto, faz-se um alerta ao professor que, tradicionalmente, costuma apontar os caminhos de resolução de modo que a probabilidade da existência de erros seja menor: "Assim que tentamos evitar que os alunos cometam erros, começamos a especificar os métodos que eles devem usar. Isso elimina a natureza problemática da tarefa – os fundamentos do sistema" (Hiebert et al., 1997, p.48, tradução nossa).

De mesmo modo, Van de Walle (2009, p.50) também ressalta os benefícios de uma cultura de sala de aula que não penaliza os erros, mas que os utiliza como oportunidades de crescimento:

> Uma confiança coletiva deve ser estabelecida com a compreensão de que é certo cometer erros. Os estudantes têm de perceber que os erros são uma oportunidade para crescimento quando são descobertos e explicados. Todos os estudantes devem confiar que suas ideias serão recebidas com o mesmo nível de respeito, independente de estarem corretas ou erradas. Sem essa confiança coletiva, muitas ideias nunca serão compartilhadas.

Ainda nesse contexto, Hiebert et al. (1997) também estabelecem a quarta característica para o desenvolvimento de uma cultura: a correção deve ser determinada a partir da lógica matemática utilizada pelos próprios estudantes. Precisa-se desenvolver uma confiança coletiva de modo a engajar os estudantes como avaliadores de seus próprios métodos e soluções obtidas, retirando do professor o papel de autoridade máxima em sala de aula no que diz respeito a detenção das respostas. "O professor também deve ajudar os alunos a perceberem que podem, com o tempo e coletivamente, determinar a correção, confiando em seus próprios argumentos" (Hiebert et al., 1997, p.49, tradução nossa).

De mesmo modo, Van de Walle (2009) também defende a ideia de que a correção deve residir na própria Matemática. E quanto ao papel do professor, o autor sugere que ele não precisa fornecer respostas a todos os questionamentos dos estudantes e também faz um alerta que, quando o professor fornece respostas do tipo "Sim, isso está correto" ou "Não, isso está errado", os estudantes deixam de atribuir sentido as ideias envolvidas, prejudicando assim a discussão e aprendizagem em sala de aula.

De um modo geral, Onuchic e Allevato (2011, p.81, grifo do autor) descrevem o funcionamento dessa prática:

> O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu *pensar matemático*, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Assim, acredita-se que, gradativamente, ao serem observadas essas quatro características no desenvolvimento das práticas de ensino, começa-se a desenvolver um ambiente fértil para a investigação matemática. Os estudantes deixam de ser agentes passivos de sua aprendizagem para agirem ativamente diante dela. Contudo, é notório que essas práticas podem ocasionar certos questionamentos iniciais, mas espera-se que conforme as aulas se encaminhem nesse formato, os estudantes passem a demonstrar confiança em seus próprios conhecimentos e habilidades, desejando prosseguir nesse modelo de aprendizagem.

A quarta dimensão, intitulada de “Ferramentas matemáticas como suporte de aprendizagem” discorre a respeito dos benefícios da utilização de recursos diferenciados para auxiliar no processo de desenvolvimento da compreensão. Essas ferramentas podem ser tanto, símbolos, palavras, esquemas, *softwares*, calculadoras, quanto cartazes ou outros meios que possibilitem não apenas a compreensão, mas também a comunicação de ideias. Entretanto, Hiebert et al. (1997) apontam que as ferramentas por si só não proporcionam compreensão, esta é desenvolvida a partir da interação do estudante com essas ferramentas, das ideias que são desenvolvidas a partir da manipulação das diversas representações que um mesmo conceito pode assumir. Desse modo, apenas disponibilizar aos estudantes recursos diferenciados e esperar que, a partir deles, instantaneamente, novos conceitos serão construídos, dificilmente apresentará bons resultados.

Nesse sentido, o professor precisa analisar qual objetivo que deseja atingir e de que modo um determinado recurso pode auxiliar nesse processo de desenvolvimento de novas compreensões.

> Permitir que os estudantes usem ferramentas não garante que todos desenvolvam os mesmos significados. Os alunos que usam ferramentas como auxílio para obter respostas provavelmente desenvolvem significados diferentes dos que os utilizam para explorar métodos alternativos ou refletir sobre as razões pelas quais os métodos funcionam. (Hiebert et al., 1997, p.55, tradução nossa)

Em síntese, os recursos podem se constituir como importantes ferramentas matemáticas com vistas a auxiliar o processo de aprendizagem, mas não devem ser utilizados isoladamente, ou serem considerados os únicos responsáveis pelo desenvolvimento da compreensão. Esses recursos não substituem o papel de professor e não podem reprimir a comunicação e criatividade em sala de aula, mas podem ser utilizados de modo a propiciar à todos, oportunidades iguais de aprendizagem e é sob esse olhar que se desenvolve a última dimensão do *Making Sense*.

Por fim, a quinta dimensão refere-se a "Equidade e Acessibilidade" nas aulas de Matemática. Essa dimensão relaciona-se diretamente com a participação de todos os estudantes no processo de ensino e aprendizagem. Dificilmente é possível que um único método de ensino seja capaz de garantir a aprendizagem de toda a turma e, devido a uma série de motivos, que perpassam pelo tempo, currículo, despreparo ou até mesmo a ausência de novas metodologias, o professor segue a diante com os conteúdos programáticos, mesmo sabendo que nem todos os alunos adquiriram os conhecimentos pretendidos.

Um ensino por compreensão tem como premissa que todos os estudantes têm a capacidade de desenvolver quaisquer conceitos matemáticos, desde que essa abordagem seja realizada em um nível adequado e que possam lhes despertar a vontade de aprender. Por mais que esse discurso seja mais fácil de se implantar na teoria do que na prática, o professor tem a sua disposição alguns artifícios que podem prover uma aprendizagem acessível para todos os estudantes.

Em direção a isso, Hiebert et al. (1997) apontam que a equidade é construída na medida em que o professor acredita que cada estudante pode e deve aprender matemática com compreensão. Desse modo, os autores sustentam a prerrogativa de que quando presentes em um grupo de aprendizagem, ou comunidade de aprendizes, os estudantes que nem sempre conseguem de imediato absorver um conceito ou elaborar uma estratégia de resolução têm a possibilidade de, a partir da troca de ideias com os demais, conseguir construir suas próprias pontes em direção a aprendizagem. Contudo, tais interações partem do princípio de que as tarefas devem ser acessíveis para todos e que cada estudante possa ser ouvido durante esse processo. Isso significa que todas as ideias devem ser compartilhadas e que possibilitem campos de discussão na busca de um consenso.

> É importante que todos os alunos compartilhem essa responsabilidade porque todas as ideias e métodos são possíveis locais de aprendizagem. Métodos corretos são objetos apropriados de discussão, assim como os métodos incorretos. Uma variedade de ideias é essencial para alimentar discussões ricas. A probabilidade de que a turma, como um grupo, tenha uma variedade de ideias sobre a mesa para discussão e análise, aumenta à medida que mais estudantes encontram maneiras de participar. O grupo, provavelmente fará maior progresso quando todos os alunos participarem e oferecerem ideias e métodos para discussão. (Hiebert et al., 1997, p.67, tradução nossa)

Assim, parte-se do princípio que para uma aprendizagem ser acessível é necessário que todos sejam ouvidos e que possam participar no processo de construção do conhecimento. Contudo, para os estudantes que não estão acostumados a trabalharem nessa metodologia é necessário que o professor incentive a participação, de modo a amenizar a insegurança e a possibilitar que todas ideias sejam ouvidas e discutidas.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO E OS SUJEITOS DA PESQUISA

Nesse percurso investigativo, no que diz respeito a natureza da pesquisa, ela classificou-se como qualitativa e, em relação aos procedimentos, optou-se pela modalidade investigação-ação.

Para constituir uma pesquisa qualitativa, Kauark, Manhães e Medeiros (2010) afirmam que, do ponto de vista da abordagem do problema, é necessário haver uma relação indissociável entre o mundo real e o sujeito que deseja realizar a investigação. Para tanto, o pesquisador fundamenta sua análise a partir da interpretação dos fenômenos, atribuindo significados aos seus questionamentos.

De modo a possibilitar essa abordagem, foi escolhida a investigação-ação como modalidade de pesquisa. Tripp (2005) define essa modalidade como sendo um ciclo na qual o pesquisador busca aprimorar sua prática a partir de sua própria investigação. "Planeja-se, implementa-se, descreve-se e avalia-se uma mudança para a melhora de sua prática, aprendendo mais, no correr do processo, tanto a respeito da prática quanto da própria investigação" (Tripp, 2005, p.446).

De modo a organizar metodologicamente o processo de investigação-ação, o autor aponta como primeiro passo a identificação de um problema. Na sequência, planeja-se uma solução que possibilite sua implementação junto ao coletivo envolvido, no qual monitora-se e descrevem-se os efeitos dessa ação para, por fim, avaliar a sua eficácia.

No contexto dessa pesquisa, reitera-se o problema que originou o percurso investigativo desse trabalho: "Quais as implicações de uma abordagem de ensino baseada nos pressupostos do *Making Sense,* a partir da perspectiva da Resolução de Problemas, para uma prática investigativa de função exponencial?". Deste modo, a fim de possibilitar a melhoria esperada no processo de ensino e aprendizagem, desenvolveu-se um problema matemático a partir dos pressupostos teóricos-metodológicos estudados e que foi aplicado em uma turma de 36 estudantes do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Blumenau (SC). Ressalta-se que essa pesquisa foi submetida e aprovada pelo Comitê de Ética na Pesquisa em Seres Humanos – CEPH[1] da Universidade Regional de Blumenau.

Os métodos de coleta de dados se constituíram a partir do registro de áudio e imagem dos estudantes, a observação do professor e as digitalizações das atividades desenvolvidas.

APLICAÇÃO E ANÁLISE

Para execução dessa atividade a turma foi dividida em grupos de quatro alunos e o tempo necessário para realização foi de cinco aulas de quarenta e cinco minutos cada. Inicialmente foi entregue um problema para a turma cujo objetivo era relacionar as representações tabular, algébrica e gráfica da função exponencial validando os resultados com uma prática experimental. Essa prática foi construída a partir da lei de resfriamento de Newton que afirma que a temperatura de um objeto muda à uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia (Boyce & DiPrima, 2001).

[1] Parecer número 2.338.640.

Foi questionado aos estudantes quanto tempo era necessário para que um líquido aquecido ou resfriado se aproximasse da temperatura ambiente e, para tanto, cada equipe recebeu um copo com água quente ou gelada e um termômetro para realizar o experimento, promovendo uma prática investigativa, que dê sentido à matemática, conforme indica Hiebert et al. (1997) na dimensão referente à natureza das tarefas de aprendizagem.

Assim, os grupos mediram a temperatura ambiente da sala de aula naquele momento e, num período correspondente a duas aulas (90 minutos), ficaram responsáveis por efetuar medições da temperatura do líquido em intervalos de tempo iguais. Os instrumentos utilizados para medição foram termômetros culinários, onde as equipes fizeram revezamento de modo que cada uma pudesse utilizar o termômetro no momento indicado para medir a temperatura. Para cronometrar o tempo, os estudantes utilizaram aplicativos de seus celulares, conforme aponta a Figura 2.

Figura 2. Medição da temperatura do líquido pelos estudantes.

As equipes tiveram que construir uma tabela e anotar as temperaturas do líquido a cada intervalo de tempo. Os dados coletados por um dos grupos que acompanhou o aquecimento do líquido podem ser vistos na Figura 3.

• 00:00	3,9°C	• 00:33	13,7°C
• 00:03	4,9°C	• 00:36	14,1°C
• 00:06	6,0°C	• 00:39	14,5°C
• 00:09	7,8°C	• 00:42	15,1°C
• 00:12	8,4°C	• 00:45	15,4°C
• 00:15	9,1°C	• 00:48	15,9°C
• 00:18	9,8°C	• 00:51	16,6°C
• 00:21	10,7°C	• 00:54	17,0°C
• 00:24	11,4°C	• 00:57	17,3°C
• 00:27	12,1°C	• 01:00	17,5°C
• 00:30	13,1°C		

Figura 3. Registro das medições coletadas pelos estudantes.

Nessa primeira etapa, os estudantes compreenderam o que deveria ser feito. A utilização do termômetro ou do cronometro não gerou dúvidas. Entretanto, na etapa seguinte, algumas dificuldades foram registradas, pois os grupos deveriam determinar uma função, seguindo o modelo proposto por Newton: $T = (T_0 - T_a) \cdot e^{k \cdot t} + T_a$ que se ajustasse aos valores coletados. Inicialmente, perguntava-se se os valores coletados aumentavam ou diminuíam de forma constante em cada intervalo de tempo. Todos os grupos constataram que a diferença de temperatura não era constante, havendo intervalos que ele diminuía/aumentava mais rapidamente do que em outros, evidenciando que um modelo linear não descreveria o fenômeno.

Na etapa seguinte, que aconteceu durante duas aulas de 45 minutos cada, os estudantes deveriam substituir na função o valor referente a temperatura inicial do líquido (T_0) e a temperatura do ambiente em que estavam (T_a). Contudo perceberam que ainda restava uma constante (k) a ser determinada. Nesse momento os grupos tiveram dificuldades em prosseguir com a questão e foi necessária a intervenção do professor/pesquisador com o intuito de levá-los a compreender a necessidade de substituir um valor referente a temperatura coletada por eles (T) e seu respectivo instante de tempo (t) para determinar o valor dessa constante. Pôde-se constatar que essa dificuldade foi resultado da não compreensão dos conceitos de variável e de função em que não se entende a expressão algébrica como forma de associar duas grandezas variáveis e com relação de dependência. Ou seja, os conhecimentos prévios necessários para construção do conteúdo que se pretendia discutir possuíam fragilidades que precisaram ser superadas. Van de Walle (2009, p.45) no estudo de diversos autores, destaca que a compreensão é a "medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma ideia tem com as já existentes. Compreender nunca é uma proposição 'ou tudo ou nada'. Ela depende da existência de ideias apropriadas e da criação de novas conexões".

De modo a fazê-los compreender essa etapa, foram realizadas perguntas que instigassem a utilização dos dados coletados, tais como: *"Será que só vamos usar a temperatura inicial do líquido para determinar a lei da função?", "Os outros dados coletados não podem ser utilizados para determinar o valor da constante?"*. Essa prática, de fato, é apontada por Van de Walle (2009, p.64) como uma recomendação à postura do professor durante a resolução do problema: "Cuidadosamente, ofereça sugestões adequadas – mas apenas sugestões baseadas nas ideias dos estudantes e nos seus modos de pensamento". Dessa forma, os estudantes relembraram que um procedimento semelhante a esse já havia sido realizado em uma outra atividade e conseguiram continuar com a resolução.

Após alguns cálculos com o intuito de isolar a incógnita, novamente os grupos necessitaram de suporte, pois não lembravam mais que era necessária a utilização dos logaritmos para determinação dessa incógnita. Assim, em conjunto com toda a turma foi realizada uma explanação de modo a relembrar as propriedades dos logaritmos que permitem a resolução de uma equação que apresenta uma incógnita no expoente. Essa perspectiva vai ao encontro do que discute Hiebert et al. (1997, p.36, tradução nossa) ao indicar que a "informação pode e deve ser compartilhada sem resolver o problema [e] não eliminando a necessidade de os alunos refletirem sobre a situação e desenvolver métodos de resolução que eles compreendam".

A Figura 4 apresenta os cálculos executados por uma equipe, bem como o gráfico correspondente construído com o auxílio do aplicativo GeoGebra.

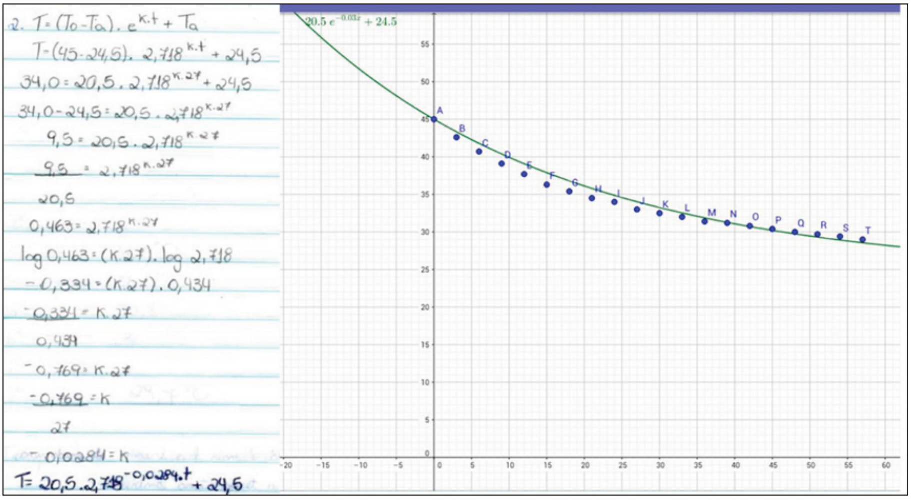


Figura 4. Determinação da lei da função e gráfico do resfriamento de um líquido.

Nem todas as equipes conseguiram encontrar um valor correto para a constante k e isso pôde ser constatado quando os estudantes construíram o gráfico da função e o mesmo não se ajustou aos pontos medidos por eles. Ao final, durante a apresentação da resolução junto com os demais colegas, os próprios estudantes dos grupos perceberam que a lei da função encontrada por eles não se ajustava aos valores medidos e assim constataram que alguma etapa da resolução não foi realizada de maneira correta. Ao analisar os cálculos efetuados pelos grupos cujas curvas não corresponderam as temperaturas aferidas, constatou-se que as principais causas dos erros envolviam passagens algébricas, manipulação dos logaritmos ou erros de sinais, conforme a Figura 5.

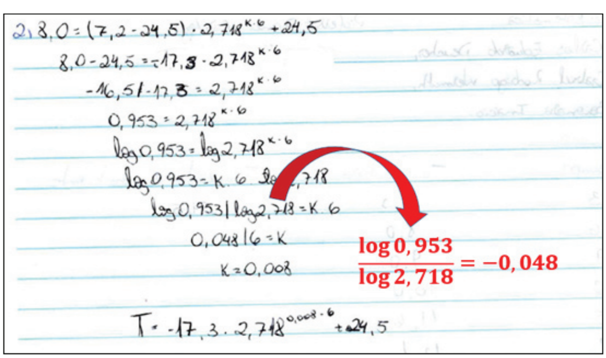


Figura 5. Erro de cálculo da constante da Lei de Resfriamento/Aquecimento de Newton.

Diante das discussões com o grande grupo, as equipes perceberam os erros de cálculos e tiveram a oportunidade de refazer a atividade em busca de uma solução mais adequada para cada situação. A seguir, tem-se a Figura 6 que apresenta alguns gráficos resultantes a partir dessa etapa do problema.

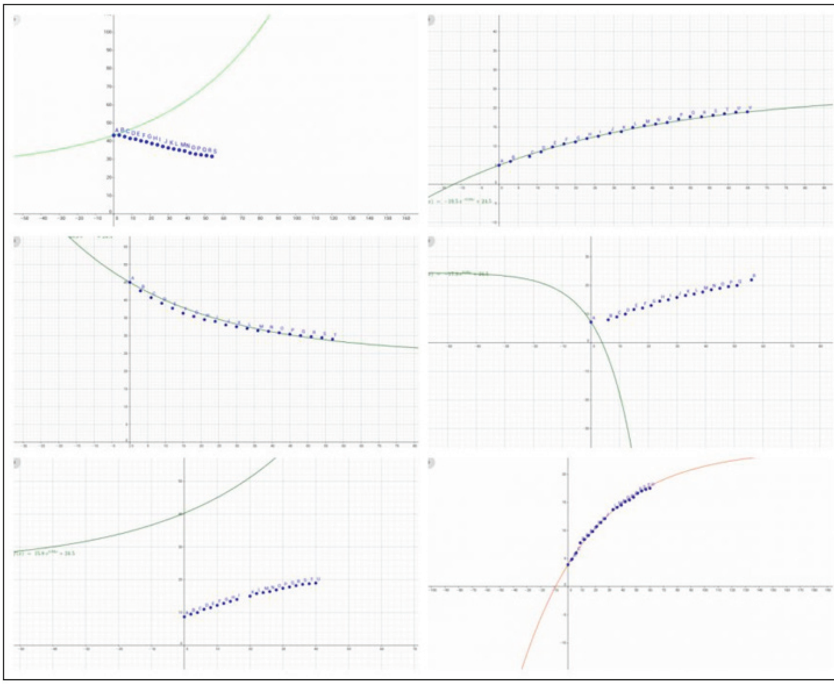
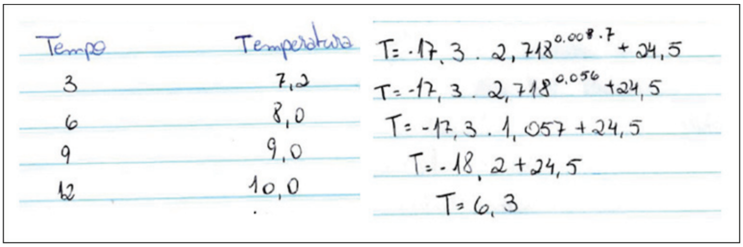


Figura 6. Gráficos desenvolvidos pelos grupos, referente a Lei de Resfriamento/Aquecimento de Newton.

Verificou-se que das nove equipes que executaram essa atividade, seis grupos conseguiram encontrar uma função exponencial cujo gráfico se ajustava aproximadamente aos valores obtidos experimentalmente. As demais, por apresentarem passagens algébricas incorretas, não obtiveram um ajuste adequado e tiveram a oportunidade de refazer.

A pergunta seguinte questionava aos estudantes qual a temperatura do líquido aos 7 minutos, visto que para esse instante de tempo não havia sido feita a aferição da temperatura. Todos os grupos responderam essa questão realizando a substituição desse tempo na lei da função encontrada e efetuando o cálculo para determinar a temperatura. Os grupos, cuja curva não havia se ajustado aos pontos, foram questionados quanto à veracidade desse valor dentro do contexto da questão, visto que se o gráfico da função não estava correto, de mesma maneira a resposta encontrada também não faria sentido. De modo a fazê-los compreenderem essa ideia, foi solicitado para eles verificarem qual era a temperatura do líquido aos 6 e aos 9 minutos na tabela construída e compararem esse valor com o resultante da função. Assim as equipes constataram que o cálculo da temperatura aos 7 minutos estava correto para a função encontrada, contudo a lei da função não estava adequada aos pontos medidos.

Como exemplo, apresenta-se na Figura 7 as temperaturas coletadas por um grupo para os instantes 6 e 9 minutos, cujos valores eram respectivamente 8ºC e 9ºC. Entretanto, no cálculo da temperatura para o instante 7 minutos o valor resultante a partir da função foi de 6,3ºC. Isso evidenciou que, conforme já pôde ser percebido a partir da análise do comportamento da função através de seu gráfico, a lei da função encontrada não estava adequada para a situação analisada.



Tempo	Temperatura
3	7,2
6	8,0
9	9,0
12	10,0

$T = -17,3 \cdot 2,718^{0,008 \cdot 7} + 24,5$

$T = -17,3 \cdot 2,718^{0,056} + 24,5$

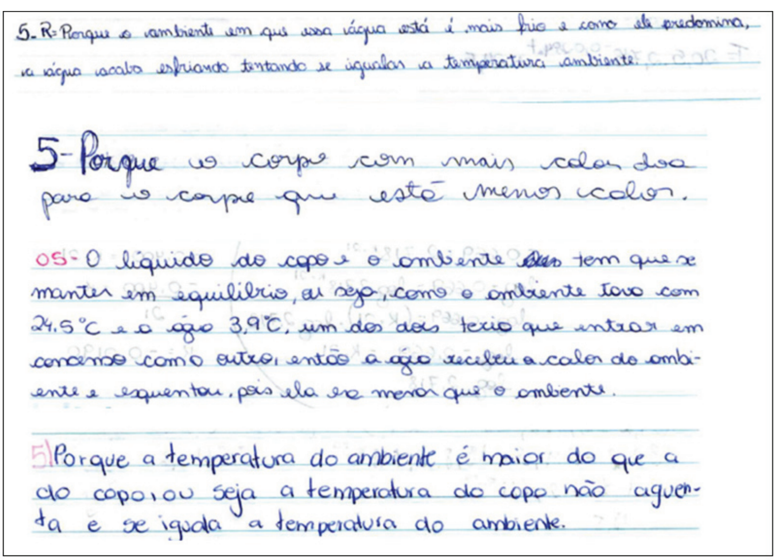
$T = -17,3 \cdot 1,057 + 24,5$

$T = -18,2 + 24,5$

$T = 6,3$

Figura 7. Comparação entre cálculo de temperatura com valores coletados experimentalmente

Na sequência, a seguinte pergunta foi realizada aos estudantes: “Em sua opinião, por qual motivo a temperatura do líquido se aproxima com a do ambiente?”. Essa perguntava tinha por objetivo fazer com que se questionassem por qual razão efetivamente a temperatura do líquido aumentava ou diminuía de modo a se aproximar com a temperatura ambiente. Visto que essa questão necessitava de conhecimentos relacionados à disciplina de Física, os grupos puderam consultar seus celulares, bem como livros didáticos em busca de soluções para essa questão. Algumas das respostas podem ser vistas na Figura 8:



5- R: Porque o ambiente em que essa água está é mais frio e como ele predomina, a água acaba esfriando tentando se igualar a temperatura ambiente.

5- Porque o corpo com mais calor doa para o corpo que está menos calor.

05- O líquido do copo e o ambiente ~~eles~~ tem que se manter em equilíbrio, ou seja, como o ambiente tava com 24.5 °C e a água 3,9 °C, um dos dois tenia que entrar em consenso com o outro, então a água recebeu o calor do ambiente e esquentou, pois ela era menor que o ambiente.

5) Porque a temperatura do ambiente é maior do que a do copo, ou seja a temperatura do copo não aguenta e se iguala a temperatura do ambiente.

Figura 8. Respostas dos grupos quanto a razão da temperatura do líquido se aproximar a do ambiente.

Ao final, após a leitura das soluções apresentadas pelas equipes, percebeu-se que a maioria conseguiu estabelecer as causas do fenômeno físico constatado por eles com o estudo da transferência de calor da Física, sendo suas respostas construídas a partir das leituras e discussões efetuadas por eles, constatando assim que a atividade, além de possibilitar a aplicação de conteúdos matemáticos a uma situação real, também permitiu a contextualização dessa situação com outras áreas do conhecimento, nesse caso a Física.

É válido salientar que o processo de modelagem da função que foi utilizado é compatível com as habilidades e conteúdos pertinentes à uma turma de Ensino Médio, no entanto não é a mais adequada. O método dos mínimos quadrados, que utiliza conceitos de derivação, permitiria uma aproximação mais significativa dos dados com a função modelada.

Contudo, reitera-se que essa atividade também rendeu alguns contratempos aos quais está sujeito qualquer professor que planeja uma aula na qual o protagonismo é atribuído ao estudante. Uma dessas situações aconteceu quando algumas equipes derramaram os líquidos que estavam utilizando, o que levou a necessidade de recomeçar a atividade. Além disso, é válido sugerir ao professor que deseja efetuar essa atividade em um outro momento, fazer apenas a situação em que acontece o aquecimento do líquido, pois essa atividade envolve apenas água gelada diminuindo os riscos de algum estudante acabar derramando água quente e ocasionar acidentes na sala de aula. Felizmente, nenhuma das equipes das quais aconteceram este incidente utilizavam o líquido aquecido, mas tal situação poderia ter gerado problemas mais sérios e desagradáveis. Deste modo, sugere-se ao professor não efetuar a atividade que envolve o resfriamento do líquido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O experimento utilizado, bem como a problematização discutida a partir dos questionamentos presentes na atividade permitiu verificar as implicações de uma abordagem de ensino baseada nos pressupostos do *Making Sense* para uma prática investigativa de função exponencial. Inicialmente, logo se percebeu um interesse maior dos estudantes em realizar a atividade e isso se justificou devido a possibilidade deles próprios executarem uma coleta de dados, diferentemente do que costuma tradicionalmente ocorrer nas aulas de Matemática, onde eles já recebem todas as informações que irão precisar para resolver a atividade.

Quanto a natureza das tarefas de aprendizagem, constatou-se que esse problema atingiu o objetivo pretendido que era de possibilitar uma matemática problematizadora e conectá-la com o contexto dos estudantes, além de permitir a construção de novos conceitos, o que vai ao encontro com a dimensão referente a natureza das atividades de aprendizagem indicada por Hiebert et al. (1997).

No que se refere ao papel do professor durante a resolução da atividade, esse teve uma função diferenciada do que rotineiramente acontece durante as aulas. Em diversos momentos os estudantes efetuaram questionamentos e buscavam receber respostas diretas para eles. Contudo, o professor/pesquisador não forneceu soluções prontas, mas os instigou, seja a partir de novos questionamentos ou pela sugestão de outros caminhos de pensamento, a buscarem dentro do seu próprio coletivo os caminhos que lhes permitissem obter soluções para o problema. Gradativamente, foi sendo construída uma cultura social de sala de aula na qual as ideias e os métodos dos estudantes eram valorizados, em que a comunicação acontecia a todo momento, instigando a participação de todos os integrantes. Mas acima de tudo, a partir de uma forma de trabalho em que os erros não eram penalizados, os estudantes passaram a não terem medo de errar o que, por sua vez, permitiu obter os conhecimentos pretendidos. Reitera-se que essa cultura de sala de aula não foi apenas construída nessa atividade, mas já vinha sendo colocada em prática a partir de uma série de outras atividades que o professor/pesquisador já vinha executando em sala de aula, nessa mesma perspectiva de abordagem. Nessa perspectiva, Van de Walle (2009, p.50) enfatiza que a aprendizagem "ocorre e é ampliada quando os estudantes se envolvem e se engajam na cultura social de uma comunidade de aprendizes de matemática".

Quanto às ferramentas de apoio à aprendizagem, especialmente os recursos tecnológicos utilizados, constatou-se que os estudantes não tiveram muitas dificuldades em utilizá-los e ambos foram primordiais não apenas para evidenciar que fazer Matemática vai muito além do lápis papel, mas também propiciou mais dinamicidade à aprendizagem, visto que de outra forma, a construção de hipóteses e sua validação instantânea não seria possível, evidenciando o caráter investigativo das aulas de Matemática.

Além disso, outro fator positivo averiguado foi que a maioria dos estudantes conseguiu compreender a necessidade das funções exponenciais para representar situações da natureza, bem como a importância de manuseá-las corretamente em busca uma interpretação quando uma solução faz ou não sentido para um problema matemático, favorecendo uma atuação investigativa ancorada com a utilização dos conhecimentos prévios e com as experiências que cada estudante traz consigo para a sala de aula.

Por fim, quanto a equidade e acessibilidade da atividade – também previstas nas dimensões do *Making Sense* – Hiebert et al. (1997) – verificou-se que ela foi acessível para toda a turma e mesmo com algumas dificuldades de interpretação, após algumas intervenções do professor/pesquisador os estudantes conseguiram obter uma solução para o problema. Durante a etapa de resolução e apresentação dos resultados foi instigado o envolvimento de todos os estudantes, contudo, tal participação não foi plenamente obtida com toda a turma. Acredita-se que, conforme se avança com esse tipo de metodologia, os estudantes passarão a se sentir cada vez mais engajados e seguros diante de problemas matemáticos.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DO AUTOR

D.C. desenvolveu o referencial teórico, realizou as atividades, coletou e registrou os dados. J.P.P. supervisionou o projeto, guiou a coleta de dados e revisou o referencial teórico. Ambos os autores analisaram os dados, discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, D.C., mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. (2001). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC.

Candeias, A. F. F. (2010) *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra*. Dissertação de mestrado em Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em matemática. In Smole, K S. & Diniz, M. I. (orgs). *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth: Heinemann.

Kauark, F. da S., Manhães, F. C., & Medeiros, C. H. (2010). *Metodologia da Pesquisa: um guia prático*. Itabuna: Via Litterarum.

Oliveira, M. N. A. de. (2014) *Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio.* Dissertação de mestrado em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

Onuchic, L. de la R. (1999). Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In Bicudo, M. A. V. (org). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora Unesp.

Onuchic, L. de la R. & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema (online)*, *25*(41), 73-98.

Siqueira, D. de M. (2013) *Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio*. Dissertação de mestrado em Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Tripp, D. (2005). Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. *Revista Educação e Pesquisa (Online)*, *31*(3), 443-466.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicações em Sala de Aula*. Porto Alegre: Artmed.

Vila, A. & Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Willoughby, S. (2000) *Function from kindergarten through sixth grade: Teaching Children Mathematics*. 2000.