ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5030

Uma Trajetória de Aprendizagem para Compreensão do Conceito de Comprimento de Curva

Etiane B. Rodrigues[a]
Eleni Bisognin[b]
Vanilde Bisognin[b]

[a] Universidade Franciscana (UFN), Área de Ciências Tecnológicas, Santa Maria, RS, Brasil.
[b] Universidade Franciscana (UFN), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS, Brasil.

Recebido para publicação em 2 fev. 2019. Aceito, após revisão, em 21 maio 2019.
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

RESUMO

Neste artigo apresentamos resultados de uma investigação tendo como foco a análise de uma trajetória hipotética de aprendizagem realizada com alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática que tem como objetivo analisar a compreensão dos alunos sobre o conceito de comprimento de curva. A pesquisa de cunho qualitativo foi realizada com nove estudantes matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma Universidade Particular em que esse conteúdo foi abordado. Os dados foram obtidos por meio dos registros das resoluções dos alunos, das observações anotadas no diário de campo da professora e das gravações realizadas durante o desenvolvimento das aulas. Da análise dos resultados pode-se inferir que os alunos apresentam lacunas quanto aos conhecimentos prévios e dificuldades de como utilizar esses conhecimentos na construção de novos conceitos, porém, observaram-se evidências de que a trajetória hipotética de aprendizagem planejada facilitou, em parte, a compreensão do conceito de comprimento de curva.

Palavras-chave: Comprimento de Curva. Imagem de Conceito. Definição de Conceito. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

A Learning Trajectory to Understanding the Curve Length Concept

ABSTRACT

In this article, we present results of research study results of an investigation focusing on the analysis of a hypothetical learning trajectory carried out with students taking a mathematics teaching degree. The aim of this study was to examine students' understanding of the concept of curve length. The qualitative research was carried out with nine students participating in a course on Differential and Integral Calculus discipline of a private university in which that content was approached. The data were obtained through records of the students' worked out solutions, notes from observation recorded in the teacher's field diary and audio recordings made during the course

Autor correspondente: Eleni Bisognin. E-mail: eleni.bisognin@gmail.com

development. From the analysis of the results, it can be inferred that the students showed gaps in their previous knowledge and difficulties on how to use that knowledge in the construction of new concepts; however, evidence was observed that the planned hypothetical learning trajectory facilitated, in part, the understanding of the concept of curve length.

Keywords: Curve Length. Concept image. Concept Definition. Hypothetical Trajectory of Learning.

INTRODUÇÃO

A História da Matemática tem nos mostrado que a definição de alguns conceitos como apresentados nos livros textos utilizados pelos alunos, tem passado por reformulações ao longo do tempo e muitos matemáticos deram suas contribuições para que as definições tivessem o rigor e a clareza de escrita como formuladas atualmente. O conceito de comprimento de curva plana necessita, para sua compreensão, da noção de limite que, de acordo com Cornu (1991), é um dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral necessário para o desenvolvimento de um pensamento matemático avançado. Para o autor, o conceito de limite é complexo e apresenta muitos obstáculos para sua compreensão pelos estudantes. Possivelmente um dos obstáculos está na forma como este conceito é apresentado aos estudantes em sala de aula. O mesmo autor destaca que a intuição é um fator que favorece a compreensão do conceito e isso não se dá somente com a apresentação formal da sua definição matemática.

Sobre a construção de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, vários pesquisadores têm realizado suas pesquisas com esse enfoque. Em sua pesquisa, Rezende (2003) se refere à forma como os conceitos são trabalhados pelos professores e salienta que, “a algebrização exacerbada da operação de limites caracteriza bem o que queremos dizer com a ‘prevalência da técnica’ sobre o significado”. O modo como o conceito é construído em sala de aula, juntamente com a grande quantidade de novos conceitos que o aluno necessita compreender nas disciplinas de Cálculo, podem ser obstáculos para o desenvolvimento de um pensamento matemático avançado.

Ao analisar as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2015) para os cursos de licenciatura, tem-se a recomendação para que os conceitos matemáticos sejam trabalhados contemplando os aspectos analíticos, gráficos e suas múltiplas aplicações. O que se observa atualmente é que, em relação aos conceitos básicos do Cálculo, há ainda uma valorização dos procedimentos técnicos em detrimento da exploração da capacidade intuitiva e da representação gráfica. Resultados de pesquisas como em Vinner (1989), Tall (1994), Meyer e Igliori (2003), Bossé e Bahr (2008), Nasser (2009), Cury (2009), Karatas, Guven e Cekmez (2011), Silva (2011), Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014), entre outros, apontam para as dificuldades no ensino de Cálculo e os obstáculos para compreensão dos conceitos e indicam que os estudantes têm melhor desempenho quando realizam atividades em que predominam questões que enfocam os aspectos operatórios e técnicos.

Nesse trabalho, nosso propósito é analisar a compreensão dos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática do conceito de comprimento de curva plana. Esse é um conceito que envolve três ideias básicas, a noção de limite, a noção de medida e a noção de soma de Riemann, por isso sua complexidade. O referencial teórico fundamenta-se na teoria de Tall e Vinner (1981) sobre imagem de conceito e definição de conceito e nas ideias de Star e Stylianides (2013) sobre conhecimento conceitual e conhecimento procedimental. Buscamos compreender como os estudantes constroem o conceito de comprimento de curva plana a partir da vivência de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (Simon 1995; Clements e Sarama 2004) e nesse contexto são analisadas as imagens de conceito construídas pelos estudantes.

REFERENCIAL TEÓRICO

A discussão em torno da compreensão conceitual, em Matemática, e do equilíbrio desejável entre esta e o conhecimento procedimental, tem ocupado os pesquisadores e os educadores matemáticos desde há vários anos (NCTM, 2000; Rittle-Johnson, Schneider, & Star 2015; Sierpinska 1994; Star & Stylianides 2013). A natureza multifacetada da grande parte dos conceitos matemáticos que os estudantes encontram no seu percurso acadêmico tem igualmente levado a uma atenção redobrada sobre os sistemas de representação matemática e sobre as conexões matemáticas e extra matemáticas que fazem parte do tecido conceitual, designadamente em tópicos de Cálculo (Bossé & Bahr, 2008).

Ao tratar do ensino e aprendizagem da Matemática é fundamental a compreensão do significado dos termos “conhecimento conceitual” e “conhecimento procedimental” porque a falta de equilíbrio entre os mesmos pode levar a lacunas na formação de alunos. Bossé e Bahr (2008) destacam os seguintes aspectos: a matemática, incluindo matemática escolar, é uma teia de conceitos e procedimentos inter-relacionados; o conhecimento de como aplicar procedimentos matemáticos não necessariamente acompanha a compreensão dos conceitos subjacentes; o conhecimento de conceitos matemáticos contribui de forma mais eficaz para a compreensão da matemática do que o conhecimento procedimental; se os alunos aprendem conceitos matemáticos antes de aprender procedimentos, eles conseguem compreender de forma mais eficaz os procedimentos quando solicitados; entretanto, quando aprendem os procedimentos primeiramente é menos provável que aprendam os conceitos.

A partir dessas considerações a pergunta que surge é: como se processa a aquisição de conhecimentos matemáticos? Ao tentar responder a questão, Tall e Vinner (1981), desenvolveram uma teoria com base nas noções de “imagem de conceito” e “definição de conceito”. Para os autores a imagem de conceito

> [...] descreve a estrutura cognitiva que está associada ao conceito que inclui todas as figuras mentais e propriedades associadas. Ela é desenvolvida ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (Tall & Vinner, 1981, p.2)

Segundo os autores os conceitos podem somente ser memorizados mecanicamente pelos estudantes ou, em vez disso, podem ser construídos e compreendidos de modo significativo, à medida que tenham oportunidades de criar diferentes imagens referentes ao conceito matemático.

A definição de conceito é descrita por Tall e Vinner (1981), como sendo o conjunto de palavras utilizadas pelos estudantes para explicar suas ideias, tendo como referência as imagens de conceito por eles construídas. A definição de conceito não é algo estático, mas se modifica a medida que o estudante modifica suas imagens de conceito sobre determinado conteúdo e pode coincidir com a linguagem utilizada pelos textos acadêmicos ou pode ser explicitada com suas próprias palavras.

Segundo Tall (1994), há uma inter-relação entre o sucesso dos estudantes em Matemática e a criação de imagens de conceito. De acordo com o autor, o ensino centrado apenas em algoritmos e regras, dando ênfase aos aspectos técnicos e analíticos, ou seja, valorizando o conhecimento procedimental e não valorizando o raciocínio e o uso da representação visual, pode ser uma das razões do insucesso em Matemática.

Essa visão de como trabalhar os conceitos matemáticos valorizando somente os procedimentos, é um obstáculo para sua compreensão principalmente quanto aos aspectos gráficos e pode contribuir para a criação de imagens de conceito restritas. Para que a compreensão de um determinado conceito ocorra é necessário que, antes de tudo, imagens de conceito, ricas de significados sejam construídas pelos estudantes.

Na pesquisa de Bossé e Bahar (2008), quando tratam do ensino e da aprendizagem da Matemática, os autores afirmam que os dois tipos de conhecimentos, conceitual e procedimental, são fundamentais e ambos devem ser valorizados e vistos como complementares, embora cada um possua o seu foco. Segundo os autores, é necessário entender que para aprender novos conceitos e adquirir novas habilidades em Matemática é necessário estabelecer uma ligação entre os conceitos. O conhecimento procedimental, assim como a imagem de conceito, é entendido como elemento que faz parte do processo de aprendizagem e não é o ponto de partida para o estudo de um novo conteúdo.

Nesse trabalho é analisada a compreensão do conceito de comprimento de curva plana, desenvolvida por estudantes de um curso de Licenciatura. Como pressuposto do estudo, foi posta em prática uma trajetória hipotética de aprendizagem no decurso das aulas de Cálculo Diferencial e Integral. É nossa intenção buscar evidências de compreensão do conceito através de dados empíricos como os obtidos na resolução das atividades desenvolvidas pelos estudantes, pois admitimos que a compreensão é possível de ser manifestada em suas resoluções bem como em suas manifestações orais.

De acordo com Simon (1995), uma trajetória hipotética de aprendizagem compreende três aspectos: os objetivos de aprendizagem; as tarefas utilizadas para promover a aprendizagem dos estudantes e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem referente ao conceito matemático em estudo. Brunheira (2017, p.34), com base nos estudos de Clements e Sarama (2004), destaca que “uma trajetória de aprendizagem compreende um objetivo de aprendizagem, uma perspectiva teórica (ou modelo) sobre a progressão do pensamento e aprendizagem dos estudantes num determinado domínio e uma sequência de tarefas".

De acordo com os autores Simon e Tzur (2004, p.93), as seguintes suposições estão subjacentes numa trajetória hipotética de aprendizagem:

- A construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem se baseia na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos;

- Uma trajetória hipotética de aprendizagem é um veículo para planejamento da aprendizagem de conceitos matemáticos específicos;

- As tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem de conceitos matemáticos específicos e, portanto, são parte fundamental do processo de ensino;

- Por causa da natureza hipotética e da inerente incerteza do processo, o professor deve revisar sistematicamente cada aspecto da trajetória hipotética de aprendizagem.

Embora todos os pesquisadores reconheçam os três elementos constituintes de uma trajetória hipotética de aprendizagem, cada um utiliza e interpreta a noção com objetivos e modos distintos.

Ivars, Buforn e Llinares (2016) destacam que há diferentes concepções sobre trajetória de aprendizagem, mas, segundo os autores,

> [...] uma característica comum é que ela fornece um modelo de progressão da aprendizagem de conceitos matemáticos particulares (níveis de progressão do pensamento matemático cada vez mais sofisticado) ligado a um objetivo de aprendizagem obtido a partir de resultados de investigações prévias e um conjunto de possíveis atividades que pode apoiar esta progressão da aprendizagem.

Nesse trabalho será utilizada a concepção de trajetória hipotética de aprendizagem apresentada por Brunheira (2017), com base nos estudos de Clements e Sarama (2004). Consideram-se, pois, as três componentes: o objetivo de aprendizagem, que nesta pesquisa é a compreensão do conceito de comprimento de curva plana; o referencial teórico, que, neste estudo, é a teoria que tem por base a imagem de conceito e a definição de conceito descritas por Tall e Vinner (1981) e as ideias de Star e Stylianides (2013) e Bahr e Bossé (2008), sobre conhecimento conceitual e conhecimento procedimental; uma sequência de atividades , elaboradas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes e as diferentes representações matemáticas do conceito de comprimento de curva plana.

Acredita-se que a identificação desses elementos e o estabelecimento de relações entre eles, por meio de distintas imagens de conceito construídas em uma trajetória de aprendizagem, é uma maneira de caracterizar se houve uma "progressão na compreensão" do conceito em estudo.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e apoia-se na construção e desenvolvimento de uma trajetória de aprendizagem. O estudo segue um design de experiência de ensino (Brown, 1992; Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer & Achauble, 2003) que se desenrola no cenário natural da sala de aula tendo como sujeitos os alunos que frequentam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os dados são produzidos no contexto de sala de aula e no decurso da realização das atividades propostas pelo professor.

Os participantes desta pesquisa foram nove estudantes que nessa investigação são denominados por E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 e E9. Os estudantes formaram três duplas e um grupo foi constituído por três estudantes. Os grupos foram designados por G1, G2, G3 e G4. Todos os estudantes aceitaram participar da pesquisa e, para tanto, assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido.[1]

O levantamento de dados foi realizado por meio da coleta dos registros dos estudantes, feitos em seus diários de campo, das resoluções das atividades, das anotações no diário de campo da professora e das gravações em áudio. Foi distribuído um gravador para cada grupo e foram transcritas as falas dos alunos bem como seus comentários sobre suas resoluções.

A trajetória de aprendizagem, que teve como foco o comprimento de curvas planas, foi estruturada em três etapas detalhadas mais adiante e desenvolvida pela primeira autora, totalizando nove aulas no primeiro semestre de 2018.

Primeiramente elaborou-se uma conjectura que orientou o trabalho desenvolvido. Essa conjectura teve o seguinte enunciado: *Um trabalho com base numa sequência de atividades que privilegia os aspectos sobre medida de segmentos de reta, somas de Riemann e a noção de limite de uma soma, pode propiciar a criação de imagens de conceito sobre o comprimento de curvas planas e pode propiciar a compreensão dos estudantes sobre este conteúdo matemático à medida que constroem significados compartilhados em sala de aula*.

Para inferir se houve uma compreensão pelos estudantes do conceito de comprimento de curva plana, foram analisadas as imagens de conceito construídas pelos estudantes no desenvolvimento das atividades de ensino. Domingos (2003) classifica níveis de complexidade estabelecidos a partir de determinadas tarefas matemáticas realizadas com os estudantes a fim de caracterizar a forma como eles compreendem os conceitos ensinados. O autor identificou três níveis diferentes de imagem de conceito: imagem de conceito incipiente, imagem de conceito instrumental e imagem de conceito relacional. Segundo Domingos (2003),

> O objectivo principal ao estabelecer estes níveis foi o de distinguir diferentes tipos de conceitos imagem que podem coexistir na mente do aluno. Perante o ensino de um dado conceito, alguns alunos manifestam conceitos imagem mais próximos

[1] Esse projeto não possui registro no Comitê de Ética.

> dos característicos da matemática elementar (conceitos imagem incipientes) enquanto que outros apresentam concepções mais próximas das que caracterizam a matemática avançada (conceitos imagem relacionais). (Domingos, 2003, p.129)

Para análise dos resultados, as imagens de conceito construídas pelos estudantes foram classificadas de acordo com os três níveis definidos por Domingos (2003).

Foram consideradas imagens de conceito incipientes as respostas dadas pelos estudantes utilizando somente conhecimentos elementares e poucas relações entre os conceitos matemáticos envolvidos; foram consideradas imagens de conceito instrumentais quando o aluno é capaz de realizar procedimentos mas não estabelece ligação entre os conceitos ou as ligações são tênues. Foram consideradas imagens de conceito relacional aquelas respostas em que o estudante descreveu com linguagem matemática precisa as diferentes etapas do cálculo do comprimento de curva, não apresentou erros de cálculo e soube relacionar os conceitos matemáticos. Nessa última categoria ocorrem as relações entre várias representações como a algébrica e a gráfica e os processos matemáticos são mais complexos. Portanto, nesse nível, ocorre a passagem do conceito elementar ao avançado, modificando então a estrutura cognitiva do estudante.

Para avaliar se houve um progresso na aprendizagem foram levados em consideração os seguintes níveis de raciocínio:

a) Do conhecimento intuitivo de aproximar o comprimento de uma curva por segmentos de reta à representação do comprimento da curva.

b) Construção do significado dos procedimentos de cálculo.

Para analisar o primeiro nível foram consideradas as imagens de conceito construídas a partir da representação gráfica da aproximação da curva por segmentos de reta com o auxílio do Geogebra, a utilização das somas de Riemann e a passagem ao limite para obter o comprimento de uma curva.

No caso da construção de significados dos procedimentos, foi analisado se os estudantes efetuaram os cálculos corretamente, souberam justificar graficamente e se eles compreenderam como funciona o algoritmo para o cálculo do comprimento da curva, explicando com clareza seu funcionamento.

ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Apresentamos, a seguir, a análise dos resultados referentes às atividades desenvolvidas. Para tanto, é feita uma descrição de como foram desenvolvidas as aulas, como os estudantes resolveram as questões e analisou-se como se deu a compreensão do conceito de comprimento de curva plana pelos estudantes e se as atividades que compõe a trajetória de ensino facilitaram essa compreensão. A trajetória de aprendizagem foi estruturada da seguinte forma:

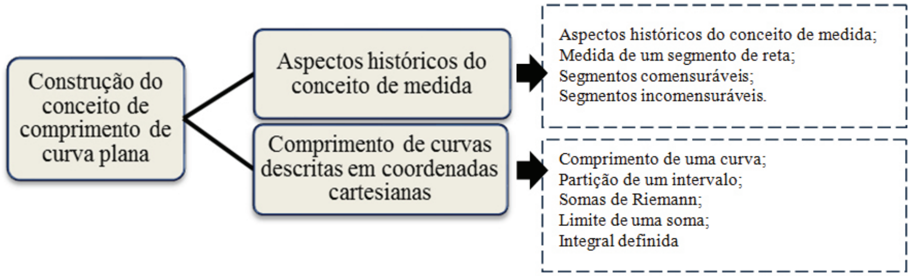

Figura 1. Estrutura da trajetória de aprendizagem.

A primeira etapa da trajetória de aprendizagem teve como propósito recuperar os aspectos históricos do conceito de medida, de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis além de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a noção de medida de comprimento.

Na segunda etapa, o propósito foi construir o conceito de medida de uma curva quando esta não é constituída somente por segmentos de reta e/ou é representativa do gráfico de uma função contínua e derivável definida num determinado intervalo.

Nesse trabalho são apresentadas as atividades desenvolvidas e as respostas elaboradas pelos estudantes para mostrar como foi construído o conceito.

Atividade 1 – Foi distribuída aos estudantes uma folha de papel quadriculado e foi solicitado o seguinte:

Desenhar três possíveis caminhos para ir de uma cidade A para uma cidade B.

Essa foi uma atividade em que os grupos conversaram entre si representaram possíveis caminhos para ir de uma cidade a outra.

Na Figura 2, a seguir, são mostradas as possibilidades desenhadas pelos quatro Grupos.

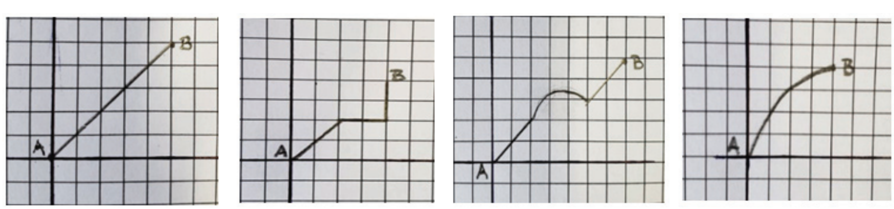

Figura 2. Caminhos da cidade A para cidade B desenhada pelos grupos G3, G2, G1 e G4, respectivamente.

Observamos que todos os grupos localizaram a cidade A na origem do sistema cartesiano. Os estudantes do grupo G3 colocaram que a linha reta era o caminho mais fácil, e o grupo G2 desenhou um caminho formado somente por segmentos de reta. Indagados sobre esse fato os estudantes responderam que "*essas são as formas mais* *fáceis de representar*". Observamos que ao construir o caminho os estudantes do grupo G3 pensaram na menor distância entre as duas cidades. Consideramos que esses estudantes possuem um conhecimento prévio importante: o de que esse caminho tem comprimento mínimo. Os estudantes do grupo G2 desenharam caminhos representados por segmentos de retas, o grupo G3 desenhou um caminho constituído por segmentos de reta e uma curva e o grupo G4 representou o caminho por meio de uma curva.

Recolhidas todas as representações dos grupos a professora indagou:

– *É possível medir o comprimento de cada um desses caminhos*?

Todos os estudantes tentaram calcular o comprimento das curvas. No caso dos dois primeiros desenhos os estudantes não sentiram dificuldades. Como estavam trabalhando com papel quadriculado, utilizaram o lado do quadrado como unidade de medida para efetuarem a contagem. Nos dois casos seguintes apareceu o primeiro obstáculo. Os estudantes comentaram:

E5 – *No caso de serem só segmentos ficou fácil mas com a curva.....*

E2 – *O difícil é medir o pedaço em curva...se fosse uma circunferência a gente saberia... (*Possivelmente o aluno se referiu à circunferência, pois sabiam calcular seu comprimento).

E4 – *Tenho uma ideia...a gente pode tentar "endireitar" essa curva...vamos calcular como se fosse uma reta...*

Professora – *Como você pode aproximar por uma reta? Tentem representar no desenho...*

Dois grupos uniram por um segmento de reta e excluíram a curva do desenho, mas os grupos G1 e G4 discutiram entre si as possibilidades e aproximaram a curva por dois segmentos como mostrado no desenho da Figura 3.

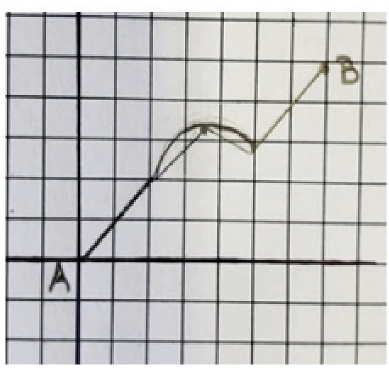

Figura 3 – Representação elaborada pelos grupos G1 e G4.

Como estavam trabalhando com papel quadriculado os estudantes utilizaram o lado do quadrado como unidade de medida para obter o comprimento dos segmentos. A professora indagou:

– Podemos utilizar essa ideia dos colegas para calcular o comprimento da curva do caminho descrito pelo grupo G4?

E8 – *Vamos tentar......acho que é fácil.....*

A Figura 4 mostra o desenho feito pelo grupo G4.

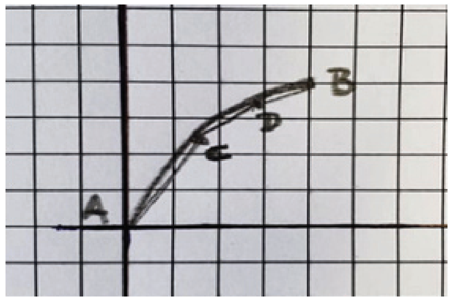

Figura 4. Representação elaborada pelo grupo G4.

Os estudantes escreveram que o comprimento da curva podia ser aproximado pela soma dos comprimentos dos segmentos AC, CD e DB. Podemos concluir, nesse caso, que os estudantes entenderam que quanto mais segmentos eles inseriam, mais se aproximavam do comprimento da curva. Das falas e do desenho elaborado pelos grupos G1 e G4 há indícios de que esses estudantes construíram imagens de conceito classificadas em nível instrumental, pois, foram capazes de aproximar a curva graficamente por segmentos de reta e utilizar o procedimento de calcular o comprimento de cada segmento e somá-los. Os demais grupos foram capazes de fazer as aproximações da curva por segmentos de reta, porém sempre esperavam a explicação da professora para efetuarem os cálculos. Podemos inferir que esses estudantes ainda construíram imagens incipientes a respeito do conceito de comprimento de uma curva.

A segunda parte da atividade foi construída com o auxílio do Geogebra.

Os estudantes fizeram uma aproximação da curva, considerando uma partição do intervalo constituída por quaro pontos, e calcularam o comprimento dos segmentos.

Na Figura 5, a seguir, é mostrada a construção do grupo G1.

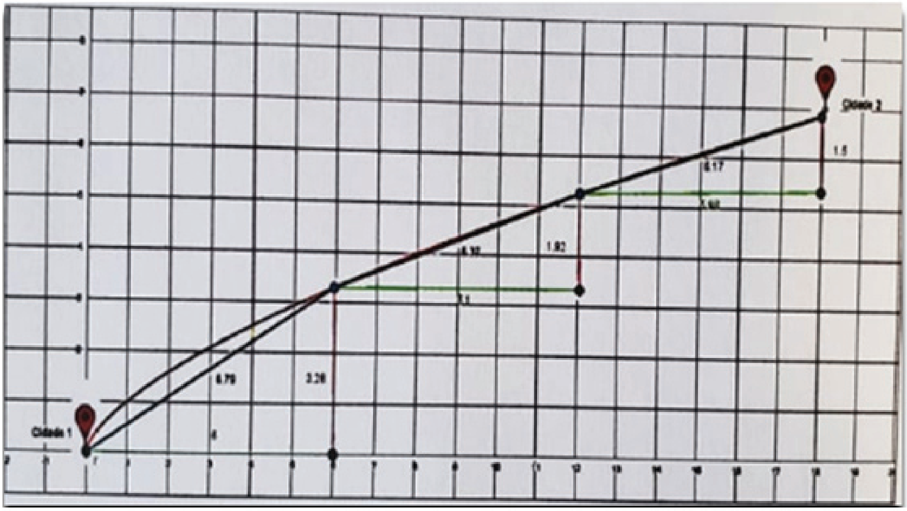

Figura 5. Construção elaborada pelo grupo G1.

Os segmentos de reta foram designados por L1, L2 e L3 e os estudantes calcularam a soma de seus comprimentos obtendo:

$$\sum_{k=1}^{3} L_k = L_1 + L_2 + L_3 \cong 6{,}79 + 6{,}3 + 6{,}1 \cong 19{,}19.$$

Refinando a partição e considerando a partição constituída por sete pontos os estudantes do grupo G2 representaram a aproximação da curva por segmentos de reta como mostrada na Figura 6.

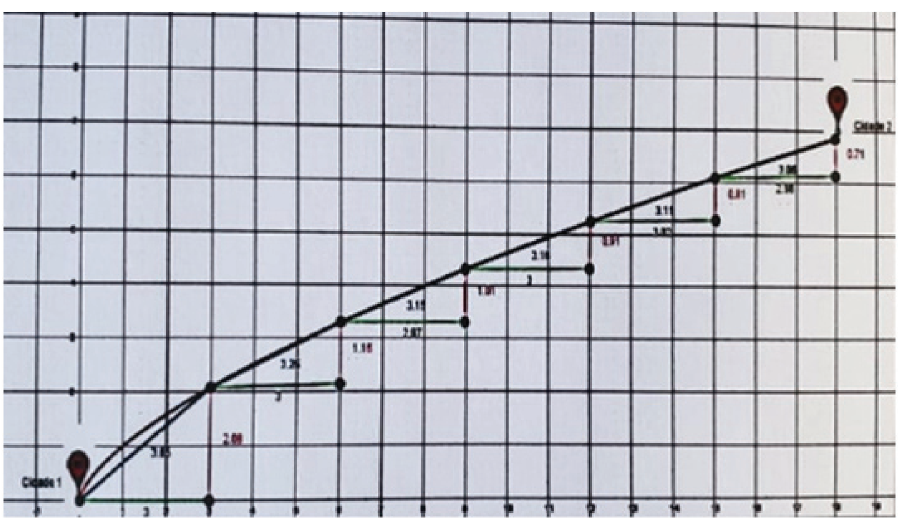

Figura 6. Construção elaborada pelo grupo G2.

A soma dos comprimentos dos segmentos obtida foi:

$$\sum_{k=1}^{6} L_k = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 \cong 19{,}38.$$

Refinando mais uma vez, considerando agora uma partição com 13 pontos o grupo G2 representou a aproximação conforme mostrada na Figura 7, a seguir.

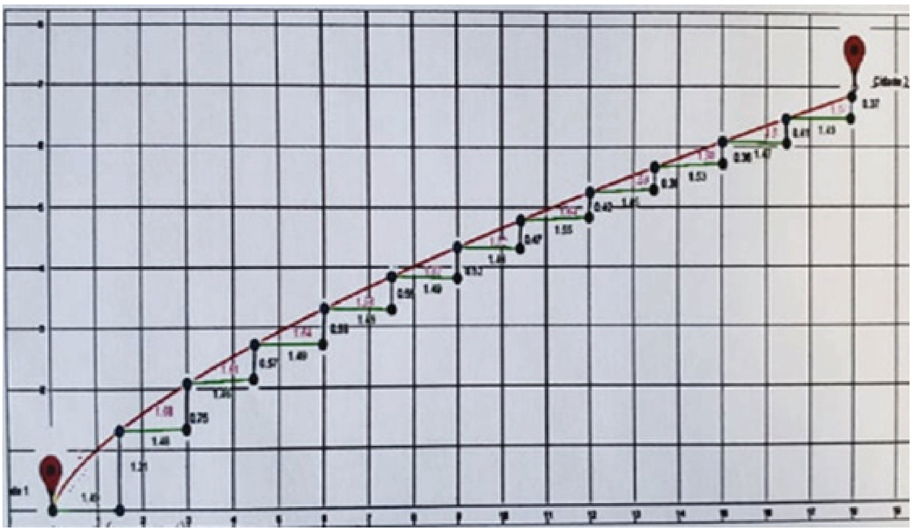

Figura 7. Construção elaborada pelo grupo G2.

Nesse caso a soma dos comprimentos dos segmentos foi:

$$\sum_{k=1}^{12} L_k = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 + L_{10} + L_{11} + L_{12} \cong 19{,}41.$$

Os estudantes observaram que os valores das somas ficavam muito próximos e comentaram:

Estudantes*: achamos que à medida que fragmentamos a curva em mais segmentos de reta, a soma dessas medidas aproxima-se cada vez mais da curva..... vamos fragmentando a curva até encontrarmos o comprimento....*

Observamos que nesse caso houve compreensão dos estudantes do processo de aproximar o comprimento da curva pela soma dos comprimentos dos segmentos de reta e que o refinamento da partição propiciava uma melhor aproximação. Podemos concluir que, mesmo os estudantes que tinham mais dificuldades, conseguiram desenvolver essa atividade e que o Geogebra auxiliou-os nessa resolução. Assim podemos inferir que as imagens de conceito construídas podem ser classificadas no nível instrumental, tendo evidências também, pela fala dos alunos, que alguns alunos construíram imagens de conceito em nível relacional.

Atividade 2 – Desenhe no Geogebra, o gráfico da função $f(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}-1$ no intervalo $0 \leq x \leq 5$ e calcule o valor aproximado da curva, inserindo (refinando a partição) dois pontos; oito pontos e doze pontos, respectivamente.

Essa tarefa foi feita por todos os grupos pois não apresentava muitas dificuldades e os estudantes sabiam trabalhar com o Geogebra. Na Figura 8 temos a construção da primeira aproximação do comprimento, inserindo dois pontos na partição e obtendo três segmentos de reta. Para essa primeira aproximação os estudantes obtiveram o valor L1=8,98 como comprimento aproximado. Na segunda etapa inseriram oito pontos obtendo um valor aproximado de L2=9,02 e, por último, inserindo doze pontos obtiveram um valor de L3=9,01 para o comprimento da curva.

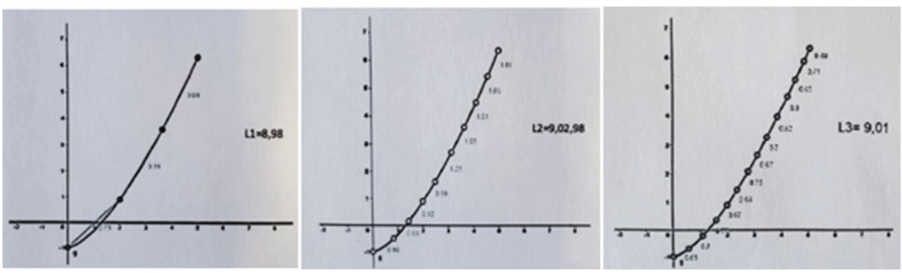

Figura 8. Aproximações do comprimento da curva elaboradas pelos alunos no Geogebra.

Ao desenvolverem essa atividade os estudantes perceberam que, como no caso anterior, quantos mais pontos inseriam na partição melhor era a aproximação. Podemos inferir essa percepção a partir do diálogo entre eles.

E5 – *Na segunda aproximação o valor aumentou mas, na terceira, quando colocamos doze pontos o valor ficou um pouco menor. Não deveria aumentar? Ou será que o comprimento dela é menor?*

Essa observação despertou a curiosidade de todos os colegas.

Professora – *Podemos descobrir se esse valor vai aumentar ou diminuir?*

E6 – *Podemos tentar calcular inserindo mais pontos....e calcular...*

Professora – *Essa é uma possibilidade, mas, e se não conhecemos a lei da função? Vamos tentar calcular o comprimento de uma curva num caso geral?*

Estudantes – *Num caso geral quer dizer para qualquer função?*

Professora – *Sim, vamos tomar uma função que seja contínua e definida num intervalo limitado, por exemplo, no intervalo [a,b] da reta. Vocês são capazes de desenhar gráficos de funções contínuas?*

Os estudantes desenharam diferentes curvas. Observamos que eles tinham imagens de conceito referentes a funções contínuas de modo claro. Nenhum deles desenhou curvas com pontos de descontinuidade e, embora a professora não tenha falado sobre derivabilidade da função, todos desenharam funções contínuas “sem bicos”, as curvas desenhadas eram suaves.

Professora – *Vamos tomar o caminho ligando a cidade A até a cidade B, desenhado pelo grupo G4. Nós não sabemos qual função deu origem a esse gráfico. Como podemos calcular o comprimento dessa curva?*

Os estudantes dos grupos G1 e G4 começaram logo a fazer os desenhos e os cálculos. Eles representaram os pontos por $(x_0,f(x_0))$; $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$,...,$(x_b,f(x_b))$. Para calcular o comprimento L da curva era necessário efetuar a soma dos comprimentos dos segmentos. A professora indagou: *como se calcula a distância entre dois pontos?*

Os estudantes discutiram entre si, pois era necessário lembrar de conceitos prévios já estudados e necessários para responder a essa pergunta. Eles tentaram lembrar o processo calculando a distância entre dois pontos com coordenadas numéricas e tentaram transferir para o caso geral. Essa foi uma capacidade desenvolvida pelos estudantes, associar as imagens de conceito já construídas em disciplinas anteriores e transferi-las para esse novo contexto. Vinner (1989) coloca que a definição de um conceito pode permanecer inativa, mas as imagens de conceito sempre podem ser evocadas para resolver outros problemas.

Evocando os conhecimentos prévios, no caso geral, o comprimento do k-ésimo segmento foi escrito na forma:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

Somando os comprimentos dos segmentos de reta, os estudantes obtiveram uma aproximação do comprimento L da curva:

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

Nesse momento a professora observou que faria uso do Teorema do Valor Médio, portanto era necessário que a função fosse derivável para garantir a existência de um ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k tal que a seguinte igualdade fosse verdadeira:

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = f'(x_k^*) \text{ ou } f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x_k \text{ .}$$

Essa explicação foi conduzida pela professora até obter uma representação do comprimento da curva por meio de uma soma,

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k.$$

A passagem ao limite quando n cresce, isto é, as extensões dos subintervalos tendendo a zero, e a obtenção da integral que define o comprimento da curva, também foi um processo conduzido pela professora.

$$L = \lim_{\Delta x_{k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Foi necessário solicitar aos estudantes a evocação de imagens referentes ao cálculo de limites e as somas de Riemann, imagens essas construídas no estudo da integral definida, para compreenderem o significado da expressão do comprimento de uma curva por meio de uma integral definida. Essa etapa, da passagem de conhecimentos elementares para um pensamento matemático avançado foi uma das tarefas que apresentou maior dificuldade. Somente os estudantes dos grupos G1 e G4 conseguiram construir imagens do conceito classificadas em nível instrumental, pois a utilização de uma linguagem matemática precisa e a utilização de conceitos já trabalhados no Cálculo foram aspectos que apresentaram dificuldades. Alguns estudantes também tiveram dificuldades na resolução de integrais, eles apresentaram poucas habilidades para utilizar os métodos de resolução. De acordo com Bahr e Bossé (2008), os conhecimentos conceituais e procedimentais devem ser complementares para que ocorra a aprendizagem. Também, a pouca habilidade para efetuar os cálculos pode ter como uma das causas a construção de imagens de conceito restritas sobre conteúdos necessários para resolução das questões. Das categorias elencadas nenhum grupo construiu imagens de conceito relacionais embora alguns alunos tenham evocado de modo significativo conhecimentos prévios necessários para resolução dos problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos, neste artigo, resultados parciais de uma pesquisa que teve como propósito analisar a compreensão do conceito de comprimento de curva por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática e, para tanto, foi elaborada uma trajetória hipotética de aprendizagem. Para averiguar se houve compreensão do conceito pelos estudantes foram analisadas as imagens de conceito construídas ao representarem graficamente as aproximações das curvas por segmentos de reta, pelo processo de construção das somas de Riemann e a passagem ao limite para obtenção da integral definida. Observamos que esses últimos itens apresentaram muitas dificuldades de compreensão e só foi possível realizar esse processo com o auxílio da professora. Podemos inferir, da análise das resoluções e dos diálogos estabelecidos pelos estudantes entre si e com a professora, que pelo menos os participantes dos grupos G1 e G4, construíram imagens do conceito em nível instrumental e, em alguns momentos, imagens em nível relacional pois conseguiram estabelecer algumas ligações entre os conceitos. Nesse caso podemos inferir que predominou um conhecimento procedimental mas, foram evidentes também, características do conhecimento conceitual. Os demais grupos conseguiram, com as explicações da professora, representar graficamente aproximações de curvas por meio de segmentos de reta utilizando o Geogebra. Observamos que a utilização de um recurso tecnológico contribuiu para a compreensão do processo de obtenção do comprimento de curvas planas. Esses grupos criaram imagens de conceito que ficaram entre os níveis incipiente e instrumental. Observamos, também, que a trajetória hipotética de aprendizagem permitiu uma progressão na aprendizagem dos estudantes mas, nem todos criaram imagens de conceito em nível instrumental e poucos em nível relacional. Os resultados obtidos nessa pesquisa nos levam a refletir sobre a potencialidade da utilização de trajetórias hipotéticas de aprendizagem para o ensino de Cálculo; mostram também, a necessidade de redesenhar essa trajetória, quando necessário, para favorecer a aprendizagem dos estudantes.

AGRADECIMENTO

As autoras agradecem à Profª Drª Susana Carreira da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, Portugal, pela leitura cuidadosa do texto e pelas suas valiosas sugestões.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Este artigo foi concebido pelas três autoras, sendo a teoria desenvolvida por E.B e V.B. E.B.R adaptou a metodologia, executou as atividades e coletou os dados. E.B.R. e E.B. analisaram os dados. Todas as autoras discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

REFERÊNCIAS

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Bossé, M. J. & Bahr, D.L. (2008). The state of balance between procedural knowledge and conceptual understanding in mathematics teacher education. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, p.11-25.

Brasil (2015). *Diretrizes Curriculares–Cursos de Graduação*. Disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192.Acesso em 20 nov. 2018.

Brown, A. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Changes Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Brunheira, L. (2017). Uma trajetória de aprendizagem para a classificação e definição de quadriláteros. *Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa*, *145*, 33-37. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Uma_trajetoria_5a786c9608c12.pdf>. Acesso em 30 abr. 2018.

Clements, D.H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. O. (org.) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres. Kluwer Academic Publisher, p.153-166.
Cury, H. N. (2009). Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In Frota, M. C. R.; Nasser, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.* Recife: SBEM. p.223-238.
Domingos, A. D. M. (2003). *Compreensão dos conceitos matemáticos avançados – a Matemática no início do superior*. 2003. 387 f. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) – Universidade de Nova Lisboa, Lisboa.
Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2016).Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de uns trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae*, *18*(4), 48-66.
Karatas, I., Guven B., & Cekmez, E. (2011). A Cross-Age Study of Student's Understanding of Limit and Continuity Concepts. *Bolema*, *24*(38), 235-264.
Meyer, C. & Igliori, S. B. C. (2003). Um estudo sobre a interpretação geométrica do conceito de derivada por estudantes universitários. In *Anais do II SIPEM*, Santos.
Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M. C. R.; Nasser, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior:* pesquisas e debates. Recife: SBEM. p.43-56.
NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*
Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, Berlin, *46*(4), 507-515.
Resende, W. M.; (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo.
Rittle-Johnson, B; Schneider, & M; Star, J.R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educ Psychol Ver, 27*(4), 587-597.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. British Library.
Silva, B. A. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo (SP), *13*(3), 393-413.
Simon, M, A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.
Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of Mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning. 6*(2), 91-104.
Star, J. R. & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and Conceptual Knowledge: Exploring the Gap between Knowledge Type and Knowledge Quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13*(2), 169–181.
Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.
Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In: Bichler, R. et al (Ed.) *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Kluwer. p.189-199.
Vinner, S. (1989). The avoidance of visual consideration in Calculus Students. In: Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (Eds.). *Focus on learning problems in mathematics*. *2*(11), 149-156.