

Pesquisas sobre o esboço de curvas na perspectiva da interpretação global das unidades figurais com foco no ensino médio

Bárbara Cristina Pasa^a
Mérciles Thadeu Moretti^b

^a Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, Erechim, RS, Brasil

^b Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Departamento de Matemática e PPGECT, Florianópolis, SC, Brasil

Recebido para publicação em 14 fev. 2019. Aceito, após revisão, em 31 out. 2019

Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

ABSTRACT

A teaching approach based on the global interpretation of figurative properties prioritizes the sketching and understanding of a curve from the conversions between algebraic, graphical and linguistic registers, more precisely the identification of basic units (graphical, symbolic and linguistic) and the verification of how they relate. Raymond Duval presents this approach in a sketch work of the line of the related function using as a resource for the global interpretation the parameters of the algebraic expression $y = ax + b$, emphasizing the relation between these parameters and the graphical visual variables: direction of the inclination, angles of the tracing with the axes and the position of the trace relative to the origin of the vertical axis. Other authors have proposed work in this perspective with a focus on secondary education, among them Moretti (2003), for the quadratic function; Silva (2008), for the exponential, logarithmic and trigonometric functions; Menonciní and Moretti (2017), for the modular function; Martins (2017), for curves whose expressions are in parametric form; Moretti, Ferraz and Ferreira (2008), for more complex functions of university teaching and Pasa (2017), for polynomial functions of the second and third degree. In this article, we present these works, complementing Pasa and Moretti (2016), presenting the resources used in each one of them that allow the verification of the changes that the change of the graph generates in the algebraic expression and vice versa and the identification of the visual variables and units related to the modifications.

Keywords: Curve sketch; Global interpretation of figurative properties; High school.

Pesquisas sobre o esboço de curvas na perspectiva da interpretação global das unidades figurais com foco no ensino médio

RESUMO

Uma abordagem de ensino baseada na interpretação global de propriedades figurais prioriza o esboço e a compreensão de uma curva a partir das conversões entre registros algébrico, gráfico e linguístico, mais precisamente da identificação de unidades básicas (gráficas, simbólicas

e linguísticas) e da verificação de como estas se relacionam. Raymond Duval apresenta esta abordagem em um trabalho de esboço da reta da função afim utilizando como recurso para a interpretação global os parâmetros da expressão algébrica $y = ax + b$, enfatizando a relação entre estes parâmetros e as variáveis visuais gráficas: sentido da inclinação, ângulos do traçado com os eixos e a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical. Outros autores propuseram trabalhos nesta perspectiva com foco no ensino médio, entre eles Moretti (2003), para a função quadrática; Silva (2008), para as funções exponencial, logarítmica e trigonométrica; Menoncini e Moretti (2017), para a função modular; Martins (2017), para curvas cujas expressões estão na forma paramétrica; Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), para funções mais complexas do ensino universitário e Pasa (2017), para funções polinomiais do segundo e terceiro grau. Neste artigo, expomos estes trabalhos, complementando Pasa e Moretti (2016), apresentando os recursos utilizados em cada um deles que possibilitam a verificação das modificações que a mudança do gráfico gera na expressão algébrica e vice e versa e a identificação das variáveis visuais e unidades simbólicas pertinentes relacionadas às modificações.

Palavras-chave: Esboço de curvas; Interpretação global de propriedades figurais; Ensino médio.

INTRODUÇÃO

O esboço e a compreensão de curvas são atividades essenciais para interpretação de gráficos e fenômenos das diversas áreas do conhecimento. Contudo, estas atividades, muito trabalhadas em todos os níveis de ensino, são acompanhadas de inúmeras dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem, impulsionando a realização de trabalhos de pesquisa sobre os motivos destas dificuldades e possibilidades pedagógicas que deem conta destas questões.

Na perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica, preconizada por Raymond Duval, toda a análise de aquisição e construção de conhecimentos matemáticos perpassam três fenômenos estreitamente ligados: a diversificação dos registros de representação semiótica, a diferenciação entre representante e representado ou entre forma e conteúdo de uma representação semiótica e a coordenação (conversão) entre os diferentes registros de representação semiótica. Estes aspectos, vinculados às questões de não congruência¹ entre os registros são, para este autor, as fontes das dificuldades de compreensão da matemática.

No caso da atividade de esboço de curvas, Duval (2011)² afirma que os problemas se encontram na transição entre os registros gráfico e algébrico, mais especificamente, no desconhecimento das regras de correspondência semiótica entre estes registros de representação. No ensino, a abordagem frequentemente utilizada no trabalho com esboço de curvas prioriza e evidencia atividades de passagem da expressão algébrica para a gráfica através de uma abordagem “ponto a ponto” a qual implica em poucas dificuldades. Contudo, no sentido inverso, ou seja, na passagem do gráfico para a expressão algébrica, os

¹ As questões que envolvem congruência e não congruência semântica entre RRS podem ser aprofundados em Duval (2012) e Duval (2004, p.49-61).

² Tradução de Méricles Thadeu Moretti de Duval, R. Graphiques et équations: l'articulation de registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Strasbourg: IREM, 1988.

estudantes apresentam inúmeras dificuldades devido ao fato de as unidades significativas de um gráfico não serem determinadas em relação aos pontos encontrados e sim por valores visuais do gráfico.

Duval (2011) sugere o trabalho com o esboço de curvas a partir de uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Sob a ótica desta abordagem, a compreensão efetiva de uma curva e do que ela representa perpassa o conhecimento dos diversos registros de representação semiótica da função/equação a ser esboçada; a identificação de variáveis visuais e unidades simbólicas significativas e, mais do que isso, a verificação de como modificações nas variáveis visuais influenciam unidades simbólicas significativas e vice e versa. As variáveis visuais se referem ao registro de representação gráfico, enquanto as unidades simbólicas significativas, ao registro de representação algébrico.

Na perspectiva desta abordagem, diversos trabalhos vêm sendo realizados com a finalidade de propor possibilidades variadas de articulação entre as variáveis visuais e unidades simbólicas significativas. Neste artigo, apresentamos os trabalhos de esboço de curvas de funções no âmbito do ensino médio, complementares aos expostos em Pasa e Moretti (2016). Evidenciamos, em cada trabalho, os recursos de articulação utilizados e apresentamos exemplos a fim de esclarecer a abordagem e verificar as modificações que um registro influencia no outro.

PESQUISAS RELACIONADAS AO ESBOÇO DE CURVAS A PARTIR DA ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DAS UNIDADES FIGURAIS

1. Função polinomial do primeiro grau

No artigo intitulado *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*, Duval (2011) expõe a abordagem de interpretação global das propriedades figurais no caso específico do esboço da reta da função polinomial do primeiro grau, utilizando como recurso os coeficientes da função afim $y = ax + b$. A interpretação global ocorre, neste caso, por meio do conhecimento de regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfico e o registro algébrico.

Na perspectiva deste trabalho, a análise da congruência entre os registros algébrico e gráfico perpassa a discriminação das unidades significativas próprias a cada registro e as transformações implícitas exigidas para a mudança de registro. Graficamente, Duval (2011) destaca as variáveis visuais como sendo: *o sentido da inclinação* (podendo assumir dois valores), *os ângulos do traçado com os eixos* (podendo assumir três valores) e a *posição do traçado em relação à origem do eixo vertical* (podendo assumir três valores). Algebricamente, as unidades significativas são os símbolos explícitos e implícitos, como pode ser visualizado na Tabela 1.

Tabela 1

Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano. (Duval, 2011, p.101)

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	Ascendente	Coeficiente > 0	Ausência de sinal
	Descendente	Coeficiente < 0	Presença do sinal -
Ângulos com os eixos	Partição simétrica	Coef. Variável = 1	Coef. não escrito
	Ângulo menor	Coef. Variável < 1	Coef. Escrito
	Ângulo maior	Coef. Variável > 1	Coef. Escrito
Posição sobre o eixo	Corta acima	Acrescenta constante	Sinal +
	Corta abaixo	Subtrai constante	Sinal -
	Corta na origem	Sem correção aditiva	Ausência de sinal

Os valores das variáveis visuais do gráfico, expostos na segunda coluna da Tabela 1, correspondem a uma unidade significativa na expressão algébrica da reta (unidade simbólica correspondente). A partir da compreensão das regras de correspondência entre as unidades significativas de cada registro, diversas análises sobre a função podem ser feitas. Por exemplo, seja a função $y = 3x - 4$, com $a = 3$ e $b = -4$. De acordo com a Tabela 1, o sentido da inclinação desta reta é crescente uma vez que o coeficiente a é maior que zero ($a > 0$) (presença do sinal +). Sendo $a > 1$, o ângulo com eixo x é maior e a constante subtraída ($b = -4$) informa que a reta intercepta eixo y abaixo do eixo x .

2. Função polinomial do segundo grau

Uma maneira de tornar explícita a relação entre variável visual de representação e unidade significativa da escrita algébrica da função quadrática foi apresentada por Moretti (2003), na qual o autor utiliza como recurso a *translação*. Comumente, no trabalho com o ensino médio, a função quadrática é genericamente vista como $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, b e c constantes reais, porém, esta forma algébrica não possui congruência com variáveis visuais gráficas, o que pode levar a dificuldades no esboço do gráfico.

Diante disso, Moretti (2003) sugere esboçar parábolas a partir de uma parábola base posicionada com vértice na origem do plano cartesiano, com foco em $(0, p/2)$ e reta diretriz de equação $y = -p/2$, com $p \neq 0$ e p sendo o a distância entre o foco e a reta diretriz. Esta parábola base possui equação $y = (1/2p)x^2$ que, ao ser relacionada à equação $y = \frac{1}{2p}x^2$ $y = ax^2$, torna possível perceber que o sinal de a depende do sinal de p , ou seja, o coeficiente a informa sobre a concavidade, para cima ou para baixo. Parábolas deste tipo, com vértice na origem, possibilitam ao estudante o reconhecimento das relações entre unidades significativas da expressão e unidades simbólicas gráficas mais facilmente.

Como exemplo, analisemos a parábola de expressão algébrica $y = 2x^2 - 4x - 6$ (expressão 1). A fim de compará-la à função de vértice na origem $y = 2x^2$, é necessário

um tratamento de complementação de quadrados e escrevê-la como $y - (-8) = 2(x - (+1))^2$ (expressão 2). Assim, conclui-se que a curva da função $y = 2x^2 - 4x - 6$ pode ser obtida por dois movimentos de translação de $y = 2x^2$: *horizontal à direita em 1 unidade e vertical para baixo em 8 unidades*. O vértice então passa da origem $(0,0)$ para $(1,0)$ e, em seguida para $(1,-8)$. Este mesmo procedimento é feito para obtenção do foco e da reta diretriz. Os esboços das parábolas $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 - 4x - 6$ são apresentados na Figura 1 a seguir.

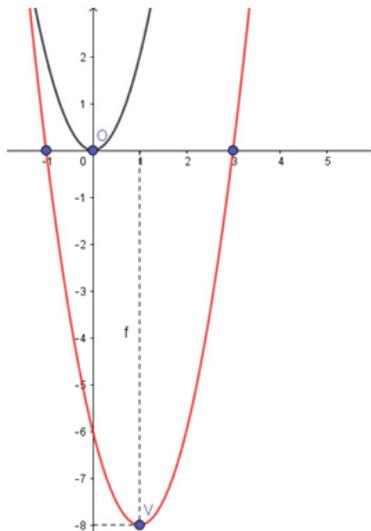


Figura 1. Esboço da parábola a partir de movimentos de translação da parábola $y = 2x^2 - 4x - 6$ a partir de movimentos de translação da parábola $y = 2x^2$.

Segundo Moretti (2003), a expressão (2) tem um maior grau de congruência semântica com as translações descritas a nível gráfico. Isto significa que, para conversões entre registro algébrico e gráfico de funções polinomiais do segundo grau, a transformação por translação pode minimizar os problemas de não congruência. O esboço de parábolas utilizando a translação pode contribuir para que o aluno perceba o conjunto traçado/eixo como uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica percebendo as implicações de variações no registro algébrico, no registro gráfico e vice e versa.

Além disso, este trabalho com a função quadrática se aproxima do trabalho com a parábola enquanto uma curva obtida pelo lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto chamado de foco e de uma reta diretriz. Os livros didáticos pouco relacionam esses dois momentos em que a parábola é estudada, o que faz com que os estudantes tenham dificuldade de relacioná-los e de identificá-los como mesmo objeto.

3. Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

O esboço de curvas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas é discutido profundamente em Silva (2008) a partir de variáveis visuais como *amplitude* e *período*, e recursos como a *translação* e *simetria em paralelo* com as unidades significantes da expressão algébrica. A autora propõe a aplicação da operação cognitiva de tratamento nos registros algébrico e figural de maneira separada e paralela de uma *curva base* com o objetivo de, desta forma, chegar aos registros figural e algébrico da curva a ser esboçada.

No caso da função exponencial, com o objetivo de perceber quais modificações nos coeficientes da expressão algébrica da curva refletem modificações no gráfico, Silva (2008) considera uma *curva exponencial base* $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, e assim conclui:

- a exponencial $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$: obtida por simetria em relação ao eixo y , a partir da curva da exponencial com base inversa;

- a exponencial do tipo $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$: obtida por simetria em relação ao eixo x , a partir de $y = a^x$;

- exponenciais na forma $y = a^{x-(d)}$: obtidas por translação horizontal de d unidades para a esquerda da curva base $y = a^x$.

- exponenciais na forma $y = a^{x+(d)}$: obtidas por translação horizontal de d unidades para a direita da curva base $y = a^x$.

- exponenciais na forma $y - (+b) = ax$: obtidas por translação vertical de b unidades para cima da curva base $y = a^x$.

- exponenciais na forma $y - (-b) = ax$: obtidas por translação vertical de b unidades para baixo da curva base $y = a^x$.

- exponenciais na forma $y - (\pm b) = a^{x-(\pm d)}$: obtidas por translação vertical e horizontal da curva base $y = a^x$, onde o sentido do deslocamento é dado pelo sinal que acompanha os valores de b e d . Sinal positivo indica deslocamento para cima no caso de b e para a direita no caso de d . Já o sinal negativo indica deslocamento para baixo no caso de b e para a esquerda no caso de d .

Tomemos como exemplo o esboço da curva da função $y = 2^{x-3} - 4$. Inicialmente escrevemos $y - (-4) = 2^{x-(+3)}$ que pode ser obtida por translação vertical e horizontal da curva base $y = 2^x$. Neste caso temos translação vertical de 4 unidades para baixo e translação horizontal de 3 unidades para a direita. A Figura 2 a seguir apresenta as curvas.

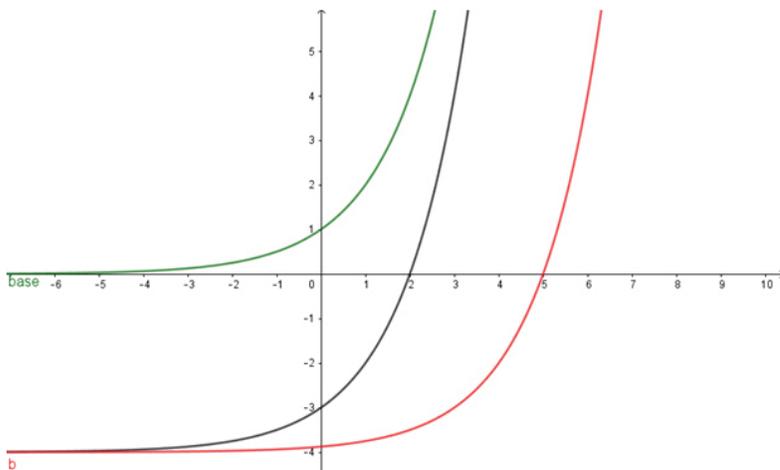


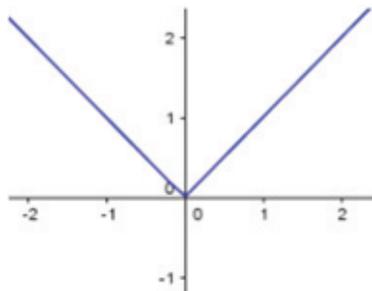
Figura 2. Esboço da curva das funções $y = 2^x$ (base), $y - (-4) = 2^x$ e $y - (-4) = 2^{x-3}$ (b).

A Figura 2 possibilita enxergarmos o esboço da curva (b) a partir da translação vertical de 4 unidades para baixo e horizontal de 3 unidades para a direita da curva base, a qual pode ser obtida sem esforço via abordagem ponto a ponto. Esta mesma análise pode ser realizada para funções trigonométricas e logarítmicas.

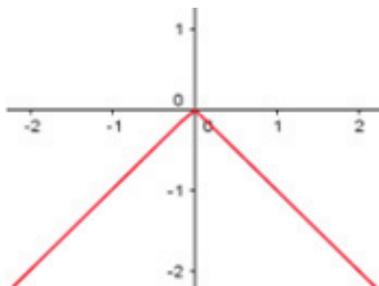
4. Função Modular Linear

Menoncini e Moretti (2017) estudam possibilidades para o trabalho com as funções modulares lineares na perspectiva da interpretação global utilizando os coeficientes da representação algébrica como unidades básicas. Neste estudo, os autores realizaram três etapas de análises. A **primeira etapa** consiste na visualização de esboços de curva de funções modulares lineares e identificação das variáveis visuais e de seus valores, expostas nas Figuras 3a e 3b, a seguir.

1.1 – A

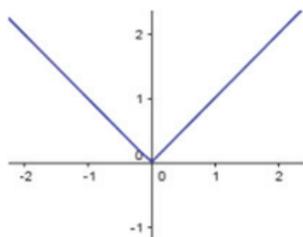


B

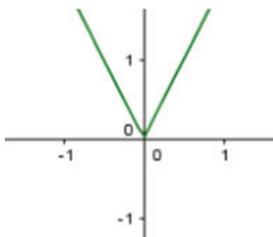


1.1 Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
Sentido do traçado	A- O traçado está voltado para cima B- O traçado está voltado para baixo C-

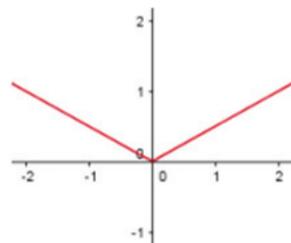
1.2 – A



B



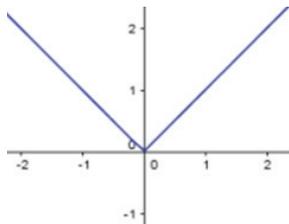
C



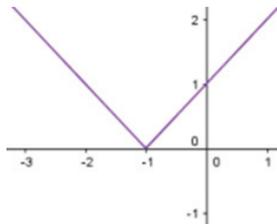
1.2 Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
Ângulos do traçado com os eixos	A- Repartição simétrica dos quadrantes B- O ângulo com o eixo horizontal é maior que o ângulo com o eixo vertical C- O ângulo com o eixo horizontal é menor que o ângulo com o eixo vertical

Figura 3a. Esboços de curvas representativas da função modular linear - Identificação dos valores e variáveis visuais para o traçado da função no plano cartesiano. (Menoncini & Moretti, 2017, p. 129)

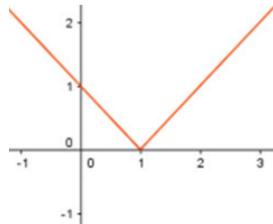
1.3 – A



B

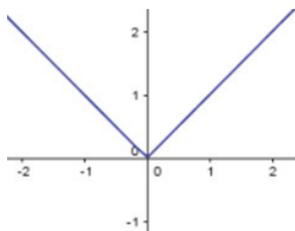


C

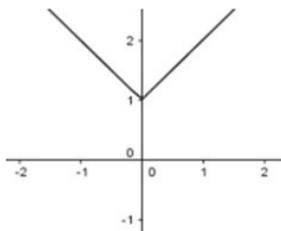


1.3 Variáveis visuais	Visual Variable Values
Posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal	D- O traçado passa pela origem E- O traçado se desloca para a esquerda da origem F- O traçado se desloca para a direita da origem

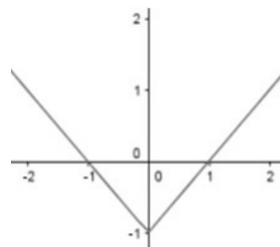
1.4 – A



B



C



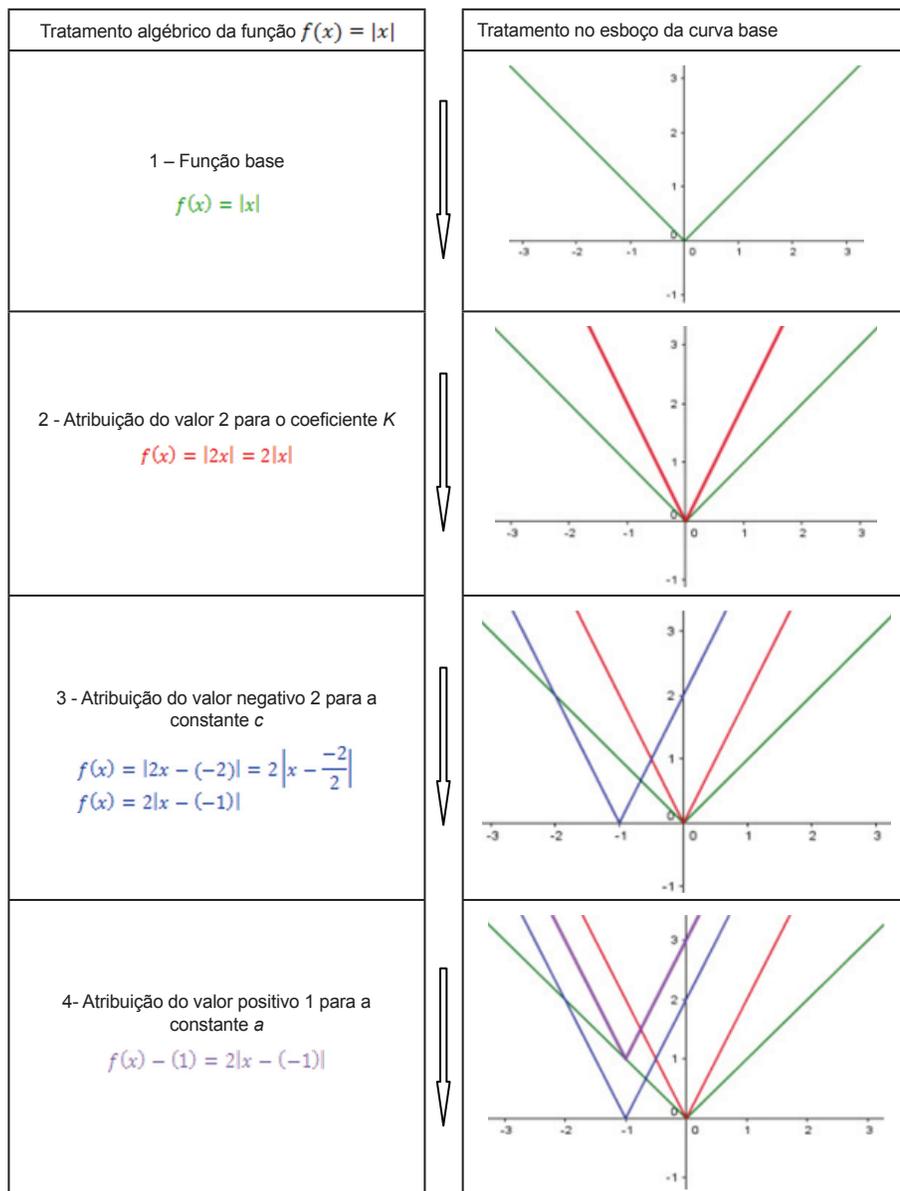
1.4 Variáveis visuais	Visual Variable Values
Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical	D- O traçado passa pela origem E- O traçado se desloca para cima da origem F- O traçado se desloca para baixo da origem

Figura 3b. Esboços de curvas representativas da função modular linear - Identificação dos valores e variáveis visuais para o traçado da função no plano cartesiano. (Menoncin, Moretti, 2017, p. 129)

Na **segunda etapa**, os autores associaram as variáveis visuais das Figuras 3a e 3b às unidades simbólicas considerando que a expressão algébrica da função modular na sua forma canônica é $f(x) - (\pm a) = b \left| x - \frac{(\pm c)}{k} \right|$, com a , b , c e k , constantes reais. Essa associação ocorreu a partir da função base das funções modulares, definida como a função real $f(x) - (\pm a) = b \left| x - \frac{(\pm c)}{k} \right|$, de \mathbb{R} em \mathbb{R}^+ . O esboço dessa função é realizado a partir da construção de semirretas via atribuição de valores à variável x e, em seguida, da união destas, formando o traçado.

Por fim, na **terceira etapa**, ocorreu a descrição geral das características da curva e estabelecimento de correspondências entre as unidades significativas algébricas e as unidades visuais gráficas.

Utilizando o mesmo exemplo utilizado pelos autores, a função $f(x) = 1 + 2|x + 1|$, cuja forma canônica é $f(x) - 1 = 2|x - (-1)|$ (Menoncini & Moretti, 2017, p. 131) com coeficientes $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ e $k = 1$, pode ser esboçada a partir da função base $f(x) = |x|$, a qual origina as demais funções, como mostrado na Figura 4 a seguir.



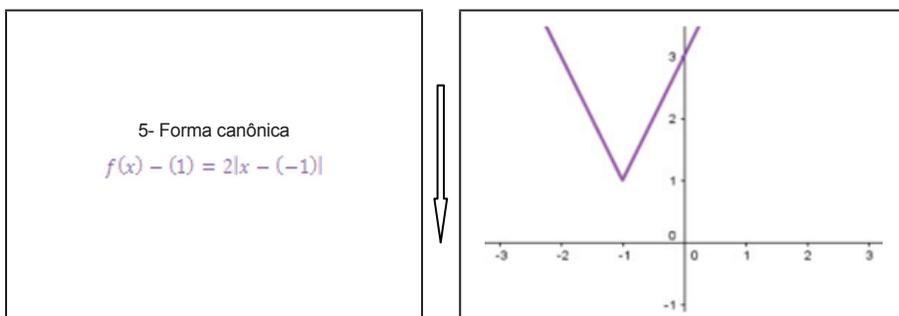


Figura 4. Construção do traçado da curva relativo à função $f(x) - 1 = 2|x - (-1)|$. (Menoncini e Moretti (2017, p. 132))

A Figura 4 apresenta o caminho percorrido para o esboço da curva da função $f(x) - 1 = 2|x - (-1)|$, partindo da função base $f(x) = |x|$. Assim, com $k = 2$, temos um aumento no ângulo do traçado da curva com o eixo horizontal. Atribuindo $c = -2$, sendo $\frac{c}{k} = \frac{-2}{2} = -1$, o traçado da curva é deslocado uma unidade para a esquerda. A seguir, ocorre o deslocamento de uma unidade para cima, pois $a = +1$. Assim, em 5, temos o esboço da curva após as modificações algébricas.

As correspondências entre as unidades algébricas e variáveis visuais das funções modulares lineares do tipo $f(x) - (\pm a) = b|kx - (\pm c)|$ são:

- o coeficiente b indica a concavidade do traçado: voltado para cima, se $b > 0$ ou para baixo, se $b < 0$;

- o coeficiente k indica o ângulo de abertura do traçado: ângulo simétrico, se $k = 1$; ângulo com eixo horizontal maior, se $k > 1$ e ângulo com eixo horizontal menor, se $k < 1$.

- termo constante a indica a translação do traçado no eixo y : o traçado se desloca a unidades para cima, se $a > 0$ ou para baixo, se $a < 0$;

- termo constante c indica a translação no eixo x : o traçado se desloca $\frac{c}{k}$ unidades à direita, se $\frac{c}{k} > 0$ ou à esquerda, se $\frac{c}{k} < 0$;

- o vértice do traçado $v = (x_v, y_v)$ possui coordenadas $x_v = \frac{c}{k}$ e $y_v = \pm a$.

É possível, desta forma, realizar associações biunívocas entre expressão algébrica e variáveis visuais, percebendo que elas se complementam e representam o mesmo objeto matemático.

5. Curvas dadas por equações paramétricas

A reta e a parábola, são estudadas por Martins (2017) enquanto curvas formadas pela trajetória de um ponto móvel no plano, a partir de suas equações paramétricas na perspectiva da interpretação global de unidades figurais. Para este estudo, o autor utiliza

manipulação algébrica nas equações paramétricas e um software que possibilita obter diretamente a representação gráfica da curva e verificar, assim, as propriedades figurais e suas relações com as unidades simbólicas.

Assim, seja a reta r que passa pela origem e pelo ponto $P(x_0, y_0)$, exposta na Figura 5, as equações paramétricas são dadas por $r: \begin{cases} x = x_0 \cdot t \\ y = y_0 \cdot t \end{cases}$. No caso de uma reta qualquer s , paralela a r , que passa pelo ponto $Q(x_1, y_1)$, exposta na Figura 6, as equações paramétricas são dadas por $\begin{cases} x = x_1 + x_0 \cdot t \\ y = y_1 + y_0 \cdot t \end{cases}$.

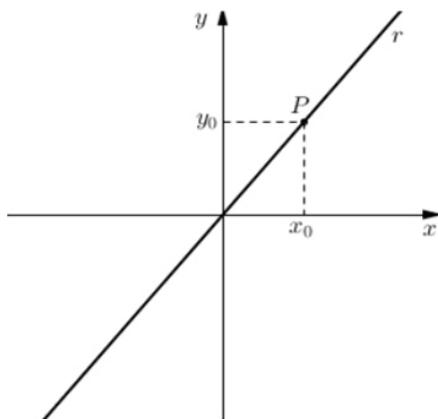


Figura 5. Reta r que passa pela origem e pelo ponto $P(x_0, y_0)$. (Martins, 2017, p. 135)

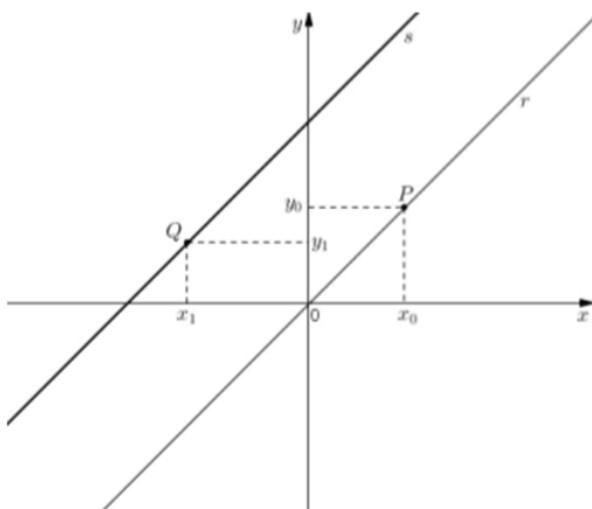


Figura 6. Reta s , paralela a r , que passa pela origem e pelo ponto $Q(x_1, y_1)$. (Martins, 2017, p. 136)

A partir de manipulação algébrica simples chega-se à equação de $s: y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x + \left(y_1 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x_1\right)$, a qual é analisada na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2

Variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes para a reta no plano dada por equações paramétricas. (Martins, 2017, p. 137)

Variáveis Visuais	Unidades simbólicas correspondentes				Valores
	x_0	y_0	x_1	y_1	Características
Casos Particulares	= 0		= 0		Reta coincide com o eixo y
		= 0		= 0	Reta coincide com o eixo x
		= 0		$\neq 0$	Reta paralela ao eixo x
	= 0		$\neq 0$		Reta paralela ao eixo y
				= 0	Reta passa pela origem
Sentido da inclinação	Sinais iguais				Reta Ascendente
	Sinais diferentes				Reta Descendente
Ângulo com os eixos	$ x_0 = y_0 $				Partição Simétrica
	$ x_0 < y_0 $				Ângulo maior (45°)
	$ x_0 > y_0 $				Ângulo menor (45°)
Posição sobre os eixos	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x_1 = 0$				Corta na origem (não tem correção aditiva)
	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x_1 > 0$				Corta acima (acrescenta-se $y_1 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x_1$)
	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x_1 < 0$				Corta abaixo (subtrai-se $y_1 - \frac{y_0}{x_0} \cdot x_1$)

De acordo com a Tabela 2, a reta é analisada a partir da expressão algébrica gerada pelas equações paramétricas. As variáveis visuais são o sentido da inclinação, o ângulo com os eixos e a posição sobre os eixos, enquanto que as unidades simbólicas correspondentes são observadas a partir das coordenadas dos pontos P e Q pelos quais a reta passa.

Para as funções quadráticas, Martins (2017) relaciona as variáveis visuais às unidades simbólicas correspondentes das equações paramétricas desta função. Neste caso, Martins (2017) amplia o estudo de Moretti (2003), a partir da análise dos coeficientes das escritas paramétricas. Assim, inicialmente foram analisadas parábolas de vértice na origem $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt \end{cases}$ (1), com eixo de simetria horizontal e $\begin{cases} x = bt \\ y = at^2 \end{cases}$ (2), cujo eixo de simetria é vertical. Os coeficientes a e b influenciam diretamente a abertura da parábola. A fim de analisar, por exemplo, a abertura da parábola (1), pode-se tomar como referência a parábola dada pelas equações $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$ e, a partir de alguns esboços é possível concluir que a parábola terá abertura maior quando $0 < |a| < 1$ e uma abertura menor se $|a| > 1$. Por outro lado, sendo $|b| > 1$, a abertura será maior e $0 < |b| < 1$, menor. Para as funções do tipo $\begin{cases} x = at^2 + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$ (3), com eixo de simetria paralelo ao eixo x , ou, $\begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + y_0 \end{cases}$ (4), com eixo de simetria paralelo ao eixo y , Martins (2017) sintetiza a análise dos coeficientes na Tabela 3 a seguir.

Tabela 3

Relações entre alguns valores, variáveis visuais e unidades simbólicas significativas da parábola de equações paramétricas (3) e (4). (Martins, 2017, p. 178)

Termo do 2º grau	Eixo de simetria	Unidades simbólicas	Concavidade	Vértice
t^2 na equação de x	Parallel to x axis	$a > 0$	Voltada para a direita	$(0, 0)$
		$x_0 = y_0 = 0$		(x_0, y_0)
		$a > 0$	Voltada para a esquerda	$(0, 0)$
		$x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$		(x_0, y_0)
t^2 na equação de y	Paralelo ao eixo y	$a < 0$	Voltada para cima	$(0, 0)$
		$x_0 = y_0 = 0$		(x_0, y_0)
		$a < 0$	Voltada para baixo	$(0, 0)$
		$x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$		(x_0, y_0)

A Tabela 3 apresenta algumas análises de parábolas relacionando coeficientes das equações (3) e (4) às variáveis visuais, eixo de simetria, concavidade e vértice.

Um exemplo utilizado por Martins (2017, p. 181) é a parábola de equações paramétricas $\begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. A partir de um tratamento é possível escrever $\begin{cases} x - (+2) = -t^2 \\ y - (-1) = -2t \end{cases}$ e, assim, a referência para o esboço é a curva base $\begin{cases} x = -t^2 \\ y = -2t \end{cases}$, a qual possui eixo de simetria no eixo x , concavidade voltada para a esquerda pois $a = -1 < 0$ e vértice $(0,0)$ pois $x_0 = y_0 = 0$; apresentada na Figura 7.

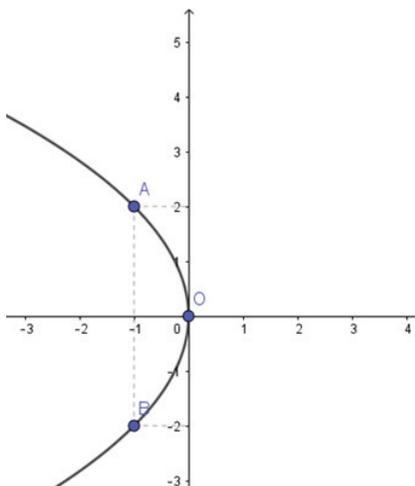


Figura 7. Esboço da curva da equação $\begin{cases} x = -t^2 \\ y = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, com base na tabela 3.

Com base na Figura 7 e escrevendo $\begin{cases} x - (+2) = -t^2 \\ y - (-1) = -2t \end{cases}$, pode-se concluir que a parábola $\begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ possui eixo de simetria eixo x , concavidade voltada para a esquerda e e vértice $V(2, -1)$, ou seja, a curva base é transladada horizontalmente 2 unidades para a direita e verticalmente 1 unidade para baixo, conforme Figura 8.

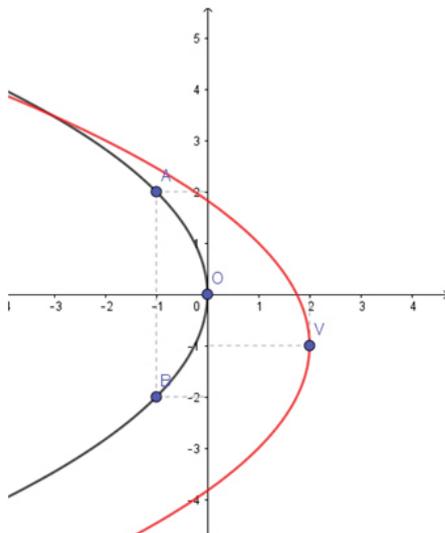


Figura 8. Esboço da curva da função $\begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Uma interpretação das parábolas de equações paramétricas genéricas $\begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + ct + y_0 \end{cases}$ (5) é apresentada por Martins (2017, p. 190). Apresentamos, neste artigo, apenas algumas relações entre variáveis visuais e unidades significativas como forma de exemplificar o raciocínio do autor para essas parábolas. Além disso, a análise das equações do tipo $\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$ (6) é análoga.

Tabela 4

Algumas características visuais e simbólicas das parábolas dadas por equações paramétricas do tipo $\begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + ct + y_0 \end{cases}$, com $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, e $b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. (Adaptada de Martins, 2017, p. 190-195)

Unidades significativas linguísticas	Unidades significativas simbólicas	Variáveis visuais
Termo do 2º grau na equação da coordenada y	$x_0 < 0$	
Eixo de simetria paralelo ao eixo y	$x_0 > 0$	
	$x_0 = 0$	
Concavidade voltada para cima	$a > 0$	
Concavidade voltada para baixo	$a < 0$	
Vértice na origem do sistema de coordenadas	$x_0 = y_0 = 0$ $c = 0$	
Abertura maior	$0 < a < 1$ $ b > 1$ $a > 0$	
Abertura menor	$ a > 1$ $0 < b < 1$ $a < 0$	

Continuação da Tabela 4

<p>Deslocamento vertical (considerando a concavidade voltada para cima)</p> $y = at^2 + ct + y_0$ $y = a\left(t^2 + \frac{c}{a}t\right) + y_0$ $y - \underbrace{\left[y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right]}_{y_V} = a\left(t + \frac{c}{2a}\right)^2$	$y_V < 0$ (para baixo)		
	$[a > 0]$		
	$y_V > 0$ (para cima)	$[a > 0]$	
<p>Deslocamento horizontal (considerando concavidade voltada para cima)</p>	$y_V = 0$ (não há deslocamento vertical)	$[a > 0]$	
	$x_V < 0$ (para esquerda)	$[a > 0]$	
	$x_V > 0$ (para direita)	$[a > 0]$	
	$x_V = 0$ (não há deslocamento horizontal)	$[a > 0]$	

As relações expostas na Tabela 4 oportunizam a verificação de como modificações em variáveis visuais influenciam nas unidades simbólicas e vice-versa, atividade esta, essencial para a compreensão integral de curvas, segundo a abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Outra ideia abordada por Martins (2017), proposta e discutida por Luiz (2010) é a utilização de procedimentos informáticos, neste caso, do software Geogebra, a fim de obter diretamente o esboço da curva parametrizada para, a partir disso, fazer uma análise do conjunto de unidades básicas gráficas, linguísticas ou simbólicas, a fim de conduzir às conversões entre os registros algébricos e gráficos. A utilização do procedimento informático, segundo estes autores, possibilita algumas

vantagens relacionadas à rapidez de visualização da curva e de mudança de escalas e parâmetros.

6. Funções polinomiais a partir da noção de infinitésimos

Visando problematizar o esboço de curvas de funções polinomiais de segundo e de terceiro grau, no ensino médio, Pasa e Moretti (2016) e Pasa (2017) apresentam um caminho alternativo para esta atividade e analisam suas possibilidades e limitações relacionadas ao ensino e à aprendizagem à luz da abordagem de interpretação global das propriedades figurais. Em Pasa (2017), as curvas das funções polinomiais de segundo ($y = ax^2 + bx + c$) e terceiro ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) graus são esboçadas com base nas taxas de variação das funções, compreendidas por meio da noção de infinitésimo, sem a formalização e o rigor requeridos no trabalho com o conceito de limites. Nesta perspectiva, as reflexões suscitadas se basearam no reconhecimento de unidades básicas simbólicas, relativas à variabilidade e de unidades básicas gráficas e, mais do que isso, das conversões entre elas, sem a necessidade de obtenção da expressão algébrica da função.

As taxas de variação, ainda que vastamente utilizadas no ensino médio, são somente trabalhadas com profundidade no ensino superior, mais especificamente em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, e com rigor e formalização inapropriados para o trabalho no ensino médio. Assim, a fim de proporcionar a interpretação global a partir de unidades visuais significativas e possibilitar ao estudante deste nível de ensino a compreensão de variabilidade necessária não só para esboço de curvas, mas para a compreensão de fenômenos e análises de situações, a *noção de infinitésimos* foi utilizada no cálculo das taxas de variação, iniciando pela compreensão de taxa média de variação.

Diante disso, sendo a taxa média de variação - *TMV* de uma função polinomial em um intervalo $[x, x + \Delta x]$, $ARC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, a taxa de variação instantânea, identificada por $TMV_1(x)$ ou, mais precisamente³, taxa de variação instantânea de primeira ordem, identificada por $TMV_1(x)$, por sua vez, é obtida a partir da $TMV(x)$, sendo Δx um infinitesimal.

No caso das funções polinomiais do 2º grau, a $TMV_1(x)$ genérica é uma função polinomial do 1º grau, e uma análise (estudo do sinal) desta função perpassa a compreensão da Tabela 1. Assim, com relação à variável visual *sentido da inclinação* e com base na Tabela 1, a Tabela 5 apresenta dados das variáveis visuais da reta tangente à curva da função polinomial.

³ Pasa (2017) utilizou $TV(x)$ ou $TV_1(x)$ como a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função. O índice “1” é necessário quando se acrescenta às análises a ideia de variação da taxa de variação instantânea, relacionada à concavidade de uma curva e representada por $TV_2(x)$, ou, taxa de variação instantânea de segunda ordem da função. No caso deste trabalho, utilizamos $TV_1(x)$.

Tabela 5

Relação entre as variáveis visuais da reta tangente a uma curva e suas unidades simbólicas. (Modificada de Duval, 2011a, p. 101, Pasa e Moretti, 2016, p. 9 e Pasa, 2017, p. 140)

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da declividade da reta tangente	Ascendente	$TVI_1(x) > 0$
	Descendente	$TVI_1(x) < 0$
	Constante	$TVI_1(x) = 0$

Como o trabalho nesta perspectiva necessita dos conhecimentos do Cálculo, é fundamental utilizarmos unidades básicas referentes a máximos e mínimos relativos apresentados por Moretti, Ferraz e Ferreira (2008). Nas Tabelas 6 e 7 a seguir, Pasa e Moretti (2016) e Pasa (2017) apresentam essas unidades básicas modificadas de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) necessárias para o trabalho com o ensino médio.

Tabela 6

Variáveis visuais e simbólicas de um mínimo relativo. (Modificada de Pasa e Moretti, 2016, p. 9, Pasa, 2017, p. 141 e Moretti, Ferraz e Ferreira, 2008, p. 106)

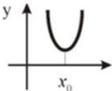
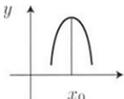
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Mínimo relativo em x_0.</p> <p>Taxa de variação instantânea de primeira ordem de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.</p>	$\begin{cases} TVI_1(x_0) = 0 \\ TVI_1(x_0) < 0, x \in V^-(x_0) \\ TVI_1(x_0) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 7

Variáveis visuais e simbólicas de um máximo relativo. (Modificada de Pasa e Moretti, 2016, p. 9, Pasa, 2017, p. 141 e Moretti, Ferraz e Ferreira, 2008, p. 106)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Máximo relativo em x_0.</p> <p>Taxa de variação instantânea de primeira ordem de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.</p>	$\begin{cases} IRC_1(x_0) = 0 \\ IRC_1(x_0) > 0, x \in C^-(x_0) \\ IRC_1(x_0) < 0, x \in C^+(x_0) \end{cases}$

Nas Tabelas 6 e 7 fica evidente que as variáveis visuais *mínimo relativo* e *máximo relativo*, podem ser analisadas e compreendidas a partir do estudo do sinal da $TVI_1(x)$ da função. No caso da existência de um mínimo relativo, a $TVI_1(x)$ é negativa à esquerda do mínimo (função está decrescendo) e positiva à direita do mínimo (função está crescendo) sendo no ponto onde ocorre o mínimo, $TVI_1(x_0)$. A análise do máximo é análoga.

Outra variável visual importante para o esboço de curvas é a *concavidade de uma curva*, principalmente para funções polinomiais de terceiro grau. A concavidade para cima

e a concavidade para baixo estão relacionadas com o crescimento ou o decrescimento dos coeficientes angulares das retas tangentes, ou melhor, das $TVI_1(x)$ (taxas de variação instantânea de primeira ordem da função). Assim, a função tem *concavidade para cima* em um intervalo aberto I , se a $TVI_1(x)$ é *crescente* neste intervalo e tem *concavidade para baixo* em um intervalo aberto I , se a $TVI_1(x)$ é *decrescente* neste intervalo.

A análise da concavidade, então, se dá por meio da análise da variação da $TVI_1(x)$, denominada taxa de variação instantânea de segunda ordem da função, ou $TVI_2(x)$. De acordo com Pasa (2017):

- a *concavidade da curva é para cima* se a $TVI_2(x) > 0$, ou seja, se a $TVI_1(x)$ é crescente no intervalo.

- a *concavidade da curva é para baixo* se a $TVI_2(x) < 0$, ou seja, se a $TVI_1(x)$ é decrescente no intervalo.

No ponto em que a $TVI_2(x)$ é nula, chamado de *ponto de inflexão*, ocorre a mudança de concavidade. A tabela a seguir, apresenta as unidades básicas gráficas e suas respectivas unidades simbólicas referentes à concavidade de uma curva, relacionado à inclinação da reta tangente, ao crescimento ou decrescimento da função.

Tabela 8

Unidades básicas gráficas e simbólicas da concavidade da curva de uma função. (Pasa, 2017, p. 145, modificado de Moretti, Ferraz e Ferreira, 2008, p. 115)

Unidade Básica Gráfica	Unidade Básica Linguística	Unidade Básica Simbólica
	(1) t é uma tangente Função crescente Concavidade negativa	$t: y = ax + b, a > 0$ $TVI_1 > 0$ $TVI_2 < 0$
	(2) t é uma tangente Função crescente Concavidade positiva	$t: y = ax + b, a > 0$ $TVI_1 > 0$ $TVI_2 > 0$
	(3) t é uma tangente Função decrescente Concavidade negativa	$t: y = ax + b, a < 0$ $TVI_1 < 0$ $TVI_2 < 0$
	(4) t é uma tangente Função decrescente Concavidade positiva	$t: y = ax + b, a < 0$ $TVI_1 < 0$ $TVI_2 > 0$

No caso da unidade básica gráfica (1), da Tabela 8, sendo a reta tangente à curva crescente, ou seja, $TVI_1(x) > 0$, mas a $TVI_2(x) < 0$, tem-se concavidade voltada para baixo. Enquanto que, no caso (2) a reta tangente à curva também é crescente, mas a $TVI_2(x) > 0$, então a concavidade é voltada para cima.

As variáveis visuais apresentadas nas Tabelas 5, 6, 7 e 8, juntamente com a compreensão e análise da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$ oportunizam o esboço das funções

polinomiais do 2º grau genéricas na forma $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, apresentado de forma na Tabela 9. A taxa de variação instantânea de primeira ordem e a de segunda ordem destas funções, em um valor qualquer de x , são $TVI_1(x) = 2ax + b$ e $TVI_2(x) = 2a$. Logo, a $TVI_2(x)$ revela que a concavidade de uma parábola depende do sinal do parâmetro a da função.

Tabela 9

Unidades simbólicas e gráficas de uma função polinomial do segundo grau. (Pasa, 2017, p. 146)

Unidades básicas simbólicas			Unidades básicas gráficas			Esboço curva	
TVI_1	Valor de a	Valor de x	Reta Tangente	Concavidade (TVI_2)	Ponto crítico		
$2ax + b$	$a > 0$	< 0	$x < -b/2a$	Decrescente	Para cima (positiva)	Mínimo absoluto em $x = -b/2a$	
	$= 0$	> 0	$x = -b/2a$	Constante			
	< 0	< 0	$x > -b/2a$	Crescente			
	> 0	> 0	$x > -b/2a$	Crescente	Para baixo (negativa)	Máximo absoluto em $x = -b/2a$	
$a < 0$	< 0	$x = -b/2a$	Constante				
	> 0	> 0	$x < -b/2a$	Decrescente			

Uma parábola voltada para cima, por exemplo, possui um mínimo quando $TVI_1(x) = 0$ e isso ocorre em $x = -b/2a$; é decrescente para valores de $x < -b/2a$, pois a $TVI_1(x) < 0$ e crescente para valores de $x > -b/2a$, onde a $TVI_1(x) > 0$. Além disso, a $TVI_2 > 0$.

No caso de funções polinomiais do terceiro grau $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as taxas de variação instantâneas de primeira e de segunda ordem, calculadas a partir da noção de infinitésimo, são $TVI_1(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $TVI_2(x) = 6ax + 2b$. O esboço da curva, a partir da $TVI_1(x)$ da função é apresentado na Tabela 10. Nesta tabela é possível visualizar as relações entre unidades básicas simbólicas, referentes à variabilidade da função, mais especificamente à $TVI_1(x)$, e as unidades gráficas ou variáveis visuais, referentes à reta tangente, aos pontos críticos que culminam no esboço da curva. A Tabela 11 expõe o esboço da curva a partir da análise da concavidade $TVI_2(x)$.

Tabela 10

Esboço de curvas de funções polinomiais de 3º grau a partir da análise da $TVI_1(x)$. (Pasa, 2017, p. 149).

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas		
TVI_1 Coef. a	NR*	TVI_1	Valores de x	RT**	Esboço curva	Pontos críticos
$3ax^2 + 2bx + c$	2	< 0	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} < x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Decres		Max. e min. relativos ($TVI_1(x) = 0$). Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
		= 0	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Const		
		> 0	$x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ e $x > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Cresc		
	1	= 0	$x = \frac{-b}{3a}$	Const		Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
		> 0	$x < \frac{-b}{3a}$ e $x > \frac{-b}{3a}$	Cresc		
	0	> 0	$x \in R$ Esboço a partir da análise da Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$) - tabela 11.	Cresc		Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
	2	< 0	$x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ e $x > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Decres		Max. e min. relativos Ponto Inflexão ($TVI_1(x) = 0$) Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
		= 0	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Const		
		> 0	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} < x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$	Cresc		
	1	= 0	$x = \frac{-b}{3a}$	Const		Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)
		< 0	$x < \frac{-b}{3a}$ e $x > \frac{-b}{3a}$	Decres		
	0	< 0	$x \in R$ Esboço a partir da análise da Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$) - tabela 11.	Decres		Ponto Inflexão ($TVI_2(x) = 0$)

*NR = Número de Raízes

**RT = Reta Tangente

Tabela 11

Análise da concavidade de curvas de funções polinomiais do 3º grau. (Pasa, 2017, p. 150)

TVI_2	Unidades básicas simbólicas			Unidades básicas gráficas	
	Coef. a	Sinal TVI_2	da Valor de x	Concavidade	Possíveis esboços da curva
$6ax + 2b$	$a > 0$	< 0	$x < -b/3a$	Negativa – para baixo	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		> 0	$x > -b/3a$	Positiva – para cima	
	$a < 0$	> 0	$x < -b/3a$	Positiva – para cima	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		< 0	$x > -b/3a$	Negativa – para baixo	

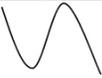
As Tabelas 9, 10 e 11 se constituem em uma referência do caminho alternativo para funções polinomiais do segundo e terceiro graus, apontando elementos essenciais para o esboço na perspectiva da abordagem de interpretação global de propriedades figurais utilizando como recurso para isso, a noção de variabilidade da função.

Tomemos o exemplo da função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$, mesma utilizada por Pasa (2017). O procedimento de esboço desta curva consiste em descobrir uma expressão para a TMV da função para o intervalo $[x, x + \Delta x]$ e, a partir disso, determinar a $TVI_1(x)$ e a variação desta, ou seja, a $TVI_2(x)$, pela noção de infinitésimos. Assim, temos que $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x - 9$ e $TVI_2(x) = -6x - 6$. Neste caso, os valores de x que anulam a $TVI_1(x)$ são $x = -3$ e $x = 1$.

A Tabela 12 apresenta o esboço da curva da função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$ com base no estudo do sinal da $TVI_1(x)$, indicando os pontos críticos da curva.

Tabela 12

Esboço da curva da função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$ a partir da análise da $TVI_2(x)$. (Pasa, 2017, p. 147)

Unidades básicas simbólicas			Unidades básicas gráficas	
Valores de x	$TVI_1(x)$	Reta Tangente	Esboço da curva	Pontos críticos
$x < -3$	< 0	Decrescente		Mínimo relativo em (-3,-21)
$x = -3$	$= 0$	Constante		
$-3 < x < 1$	> 0	Crescente		Máximo relativo em (1,11)
$x = 1$	$= 0$	Constante		
$x > 1$	< 0	Decrescente		

A concavidade, analisada a partir do estudo da $TVI_2(x) = -6x - 6$, é voltada para cima em $x < -1$ e para baixo em $x > -1$, sendo $x = -1$, o ponto de inflexão. Os pontos críticos ocorrem em $x = -3$, um mínimo relativo igual a $y = -21$ e, em $x = 1$, um máximo relativo, igual a $y = 1$.

7. Funções trigonométricas a partir da noção de infinitésimos

Outra possibilidade brevemente discutida por Pasa (2017) é o trabalho com as funções trigonométricas $y = \text{sen } x$ e $y = \text{cos } x$ na perspectiva da compreensão da variabilidade destas, a partir da noção de infinitésimos.

7.1 Análise da função $y = \text{sen } x$

A taxa média de variação da função $y = \text{sen } x$ para um intervalo $[x, x + \Delta x]$ é $TMV = \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}$. Utilizando o seno da adição de dois arcos: $\text{sen}(x + \Delta x) = \text{sen } x \cdot \text{cos } \Delta x + \text{sen } \Delta x \cdot \text{cos } x$, tem-se $TMV = \frac{\text{sen } x \cdot \text{cos } \Delta x + \text{sen } \Delta x \cdot \text{cos } x - \text{sen } x}{\Delta x}$. A análise de $\text{sen } \Delta x$ é feita levando em conta que Δx é um infinitésimo e utilizando a ideia geométrica a partir de um triângulo retângulo com ângulo Δx infinitésimo. Assim, sendo $\text{sen } \Delta x = \frac{\text{cat.oposto}}{\text{hipotenusa}}$, o cateto oposto também será um infinitésimo que, dividido pela hipotenusa, resulta em um infinitésimo, assim, $\text{sen } \Delta x = \frac{\text{cat.oposto}}{\text{hipotenusa}} = \Delta x$.

Logo, a taxa de variação instantânea de primeira ordem da função seno é $TVI_1 = \frac{\text{sen } x + \Delta x \cdot \text{cos } x - \text{sen } x}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \text{cos } x}{\Delta x} \rightarrow TVI_1 = \text{cos } x$. O estudo do sinal da $TVI_1(x)$ e esboço da curva da função estão expostos na Tabela 13.

Tabela 13

Esboço da curva da função $y = \text{sen } x$ no domínio de $[0, 2\pi]$. (Pasa, 2017, p. 152).

Unidades básicas simbólicas			Unidades básicas gráficas	
$TVI_1(x)$	Valor de x	Reta tangente	Ponto crítico	Esboço da curva
> 0	$0 < x < \pi/2$ $3\pi/2 < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto $(3\pi/2, -1)$	
$= 0$	$x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$	Constante	Máximo absoluto $(\pi/2, 1)$	
< 0	$\pi/2 < x < 3\pi/2$	Decrescente		

A Tabela 13 possibilita esboçar a curva da função $y = \text{sen } x$ para o período $[0, 2\pi]$ relacionando os pontos críticos e a inclinação da reta tangente ao estudo do sinal da função $TVI_1 = \text{cos } x$.

7.2 Análise da função

No caso da função $y = \text{cos } x$, o cálculo da $TVI_1(x)$ é análogo ao da função $y = \text{sen } x$: encontra-se a TMV para um intervalo $[x, x + \Delta x]$, $TMV = \frac{\text{cos}(x+\Delta x) - \text{cos } x}{\Delta x}$ e, utilizando o cosseno da soma de dois arcos: $\text{cos}(x + \Delta x) = \text{cos } x \cdot \text{cos } \Delta x - \text{sen } x \cdot \text{sen } \Delta x$, tem-se $TMV = \frac{\text{cos } x \cdot \text{cos } \Delta x - \text{sen } x \cdot \text{sen } \Delta x - \text{cos } x}{\Delta x}$. Sendo $\text{cos } \Delta x = 1$ e $\text{sen } \Delta x = \Delta x$, então a função $y = \text{cos } x$ possui $TVI_1(x) = -\text{sen } x$ e o esboço está apresentado na Tabela 14.

Tabela 14

Esboço da função $y = \cos x$ no domínio de $[0, 2\pi]$. (Pasa, 2017, p. 152).

Unidades básicas simbólicas			Unidades básicas gráficas	
$TVI_1(x)$	Valor de x	Reta tangente	Ponto crítico	Esboço da curva
> 0	$\pi < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(\pi, -1)$	
$= 0$	$x = 0$ e $x = \pi$	Constante	Máximo absoluto em $(0, 1)$ e $(2\pi, 1)$	
< 0	$0 < x < \pi$	Decrescente		

As Tabelas 13 e 14 possibilitam associações entre variáveis visuais e unidades básicas simbólicas relacionadas à taxa de variação de primeira ordem das funções seno e cosseno. A taxa de variação instantânea de segunda ordem ($TVI_2(x)$) não foi abordada por ela não ser necessária no esboço das referidas curvas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diversos trabalhos de pesquisa sobre o esboço de curvas na perspectiva da interpretação global de propriedades figurais estão sendo realizados com o objetivo de propor recursos que possibilitem a articulação entre registro gráfico e algébrico a partir de elementos significativos, o que, conforme Duval (2011) ressalta, é essencial para a aprendizagem. Apresentamos neste artigo os trabalhos com possibilidades de trabalho no âmbito do ensino médio.

No caso da **função afim**, Duval (2011) destaca as relações entre os coeficientes da expressão algébrica $y = ax + b$ e as variáveis visuais do gráfico como o sentido da inclinação, os ângulos do traçado com os eixos e a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical. Utilizando o tratamento de complementação de quadrados na escrita algébrica da **função quadrática** ($y = ax^2 + bx + c$), Moretti (2003) discute sobre como manter a relação entre variável visual de representação e unidades simbólicas, usando como recurso a translação da função. O esboço de curvas de **funções trigonométricas**, **exponenciais** e **logarítmicas** foi proposto por Silva (2008) e Corrêa e Moretti (2014), utilizando como recursos a translação e a simetria em paralelo com as unidades significantes da expressão algébrica representadas pelos coeficientes. Menoncini e Moretti (2017) apresentam possibilidades para o trabalho com as **funções modulares** utilizando os coeficientes da representação algébrica como unidades básicas simbólicas. Martins (2017) estuda as **equações paramétricas da reta** e da **parábola**, sendo elas funções ou não, relacionando as variáveis visuais com os coeficientes das equações paramétricas. No caso das retas, as variáveis visuais em questão são: o sentido da inclinação, os ângulos com os eixos e a posição sobre os eixos. As parábolas são estudadas relacionando as variáveis visuais: concavidade, vértice e eixo de simetria. Além disso, Martins (2017) utiliza o software Geogebra que possibilita obter diretamente a representação gráfica da curva e verificar, assim, as propriedades figurais e suas relações com as unidades simbólicas.

Pasa e Moretti (2016) e Pasa (2017) sugerem um caminho alternativo para o trabalho com **funções polinomiais do segundo grau**, **do terceiro grau** e **funções trigonométricas seno** e **cosseno** baseado no estudo do sinal da taxa de variação instantânea da função,

encontrada a partir da noção de infinitésimo. Para isso, utiliza variáveis visuais como inclinação da reta tangente, mínimo e máximo relativo, concavidade e ponto de inflexão, associadas a unidades simbólicas das taxas de variação.

A compreensão da teoria dos registros de representação semiótica permite ao professor de matemática uma compreensão profunda das atividades cognitivas necessárias para o aprendizado dos objetos matemáticos, o que influencia diretamente suas ações pedagógicas na sala de aula e que propiciarão este aprendizado. No caso do esboço de curvas, a abordagem de interpretação global de propriedades figurais proposta por Duval requer a transição entre os diferentes registros da curva a partir da identificação e da articulação de unidades básicas simbólicas da expressão algébrica e unidades básicas gráficas, ações estas nada triviais e que se tornam mais difíceis devido a não congruência entre os registros. Os trabalhos apresentados são possibilidades pedagógicas que permitem transpor os obstáculos de aprendizagem e aumentar o grau de congruência semântica entre os registros de uma função ou equação.

Segundo Pasa e Moretti (2016), as discussões e reflexões sobre o esboço de curvas são pertinentes, principalmente devido à importância desta atividade nos tempos atuais, como forma de representar fenômenos em todas as áreas do conhecimento e situações cotidianas. Além disso, devido às dificuldades apresentadas pelos estudantes na atividade de esboçar e interpretar curvas, as quais se devem, entre outros fatores, a uma abordagem de ensino que prioriza o traçado de gráficos “ponto a ponto” e a passagem do registro algébrico para o gráfico apenas, não valorizando a compreensão das regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

B.C.P e M.T.M conceberam a ideia do artigo. B.C.P realizou a investigação a respeito dos trabalhos publicados com o tema do artigo, organizou os dados coletados e, juntamente com o autor M.T.M, propuseram o trabalho com infinitesimais no ensino médio a fim de esboçar curvas de funções polinomiais do segundo grau, do terceiro grau e das funções trigonométricas seno e cosseno. B.C.P e M.T.M também discutiram juntos os resultados e contribuíram para a versão final do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

O compartilhamento de dados não é aplicável a este artigo, pois nenhum dado novo foi criado ou analisado neste estudo.

REFERÊNCIAS

Corrêa, M. O. S.; Moretti, M. T. (2014). Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: Brandt, C. F.; Moretti,

- M. T. (Orgs.). *As contribuições da Teoria dos Registros de representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática*. Ijuí: Ed. Unijui.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Colombia. Tradução: Myriam Veja Restrepo, 1999. Edição em castellano.
- Duval, R. (2011). Gráficos e equações: A articulação de dois registros. Trad. Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, 6(2), 91-112.
- Duval, R. (2012). Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, 7(1), 97-117.
- Luiz, L. S. (2010). *Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias*. (142 f.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Martins, M.H.S. (2017). *A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas*. (220f.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Menoncini, L.; Moretti, M.T. (2017). A interpretação global figurial como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. *Educação Matemática em Revista – RS*, 18(1), 126-134.
- Moretti, M.T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: Machado, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, p. 149-160.
- Moretti, M.T.; Ferraz, A.G.; Ferreira, V.G.G. (2008). Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa, XVII(2).
- Pasa, B.C.; Moretti, M.T. (2016). Panorama de pesquisas sobre o esboço de curvas a partir da interpretação global das unidades figurais. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM*, São Paulo.
- Pasa, B.C. (2017). *A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais*. (311 f.). Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica* (143 f.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.