

Conocimientos que Evidencian los Futuros Profesores cuando Realizan una Tarea que Involucra Geometría, Enseñanza y Uso de Tecnologías

Yuri Morales-López¹ 

¹ Universidad Nacional de Costa Rica, Heredia, Escuela de Matemática, Heredia, Heredia, Costa Rica

Recibido para publicación el 28 feb. 2019. Aceptado, tras su revisión, el 22 de marzo 2019..

RESUMEN

Los tipos de conocimientos que los futuros profesores de matemática emplean cuando se enfrentan a tareas que involucran tecnología son de interés pues pueden ser utilizados como bases para analizar la pertinencia de una actividad de esta naturaleza. El objetivo de esta investigación es identificar los conocimientos que evidencian estos profesores cuando realizan una actividad que integra geometría, tecnología y pedagogía. Para esto, se diseñó una tarea que fue aplicada a 65 profesores en formación y para su análisis se utilizó el modelo de *conocimiento tecnológico pedagógico del contenido*. Los resultados muestran que los futuros profesores logran poner en evidencia conocimientos en todos los dominios y casi todos los subdominios del modelo confirmando que el tipo de actividad induce a la activación de estos conocimientos.

Palabras claves: Educación matemática; TIC; TPACK; profesores en formación; geometría; pedagogía.

Knowledge Evidenced by Future Teachers when They Perform a Task Involving Geometry, Teaching and the Use of Technologies

ABSTRACT

The types of knowledge that future mathematics teachers use when faced with tasks involving technology are of interest because this knowledge can be used as a basis for analyzing the relevance of an activity of this nature. The aim of this research is to determine the knowledge evidenced by these teachers when they carry out an activity that integrates geometry, technology and pedagogy. For this, a task was designed that was applied to 65 teachers in training and for its analysis the model of pedagogical technological knowledge of the content was used. The results show that future teachers can highlight knowledge in all domains and almost all sub-domains of the model by confirming that the type of activity induces the activation of this knowledge.

Keywords: Mathematics education; ICT; TPACK; prospective teachers; geometry; pedagogy.

Corresponding author: Yuri Morales-López. E-mail: ymorales@una.ac.cr

Acta Scientiae	Canoas	v.21	n.2	p.75-92	mar./abr. 2019
----------------	--------	------	-----	---------	----------------

INTRODUCCIÓN

La incorporación de la tecnología en las clases de matemática es un tema de investigación relevante, principalmente por la imperiosa necesidad de acercar a los estudiantes a experiencias que activen procesos como explorar, conjeturar, argumentar, entre otros. Tareas que involucran el uso de recursos tecnológicos pueden permitir al estudiante también alfabetizarse tecnológicamente y desarrollar habilidades necesarias para su futuro laboral y vida diaria.

Diseñar actividades que integren las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) de forma adecuada es una de las capacidades esenciales en los futuros profesores de matemáticas. Para que los docentes en formación desarrollen esta habilidad es necesario, entre otras cosas, poder identificar los conocimientos cuando se trata de relacionar la matemática, su enseñanza y los recursos tecnológicos. Se requiere generar en los futuros profesores de matemática la capacidad de crear y valorar tareas que involucran las TIC.

Respecto a esto, el *conocimiento tecnológico pedagógico del contenido* (TPACK) (Mishra & Koehler, 2006) es un sistema de organización de los conocimientos donde se estudian las relaciones entre el contenido, la pedagogía y la tecnología, y donde es posible estudiar la forma en que estas relaciones crean, de manera sinérgica, un conocimiento integral y valioso para la incorporación de los recursos tecnológicos. Este sistema puede ser útil para comprender los conocimientos del profesor de matemáticas.

De esta manera, en esta investigación interesa conocer qué tipos de conocimientos ponen en evidencia los futuros profesores de matemática cuando realizan una tarea que involucra la geometría, la enseñanza y el uso de tecnologías. En especial, se propuso una tarea que integra las tres áreas y se aplicó a 65 profesores de matemáticas de secundaria en formación (PMSF). En el artículo se analizan distintas situaciones que muestran algunos de los conocimientos considerados en el TPACK.

MARCO TEÓRICO

A continuación, se desarrollan algunas ideas generales sobre el uso de tecnologías y sobre distintos sistemas de organización del conocimiento en el que expone con más detalle el TPACK.

El Uso de Recursos Tecnológicos

La tecnología es parte de la vida cotidiana. Cada vez más estudiantes tienen acceso a instrumentos tecnológicos y dispositivos digitales que incluyen microprocesadores como los teléfonos móviles inteligentes, computadoras personales, tabletas, entre otros, y la manera en que usan los dispositivos no necesariamente inicia de forma amistosa. Para algunas TIC particulares se requiere un tiempo para aprender a manipularlas y, para dispositivos avanzados, incluso se requiere soporte o instrucción de otras personas.

La dinámica es un poco confusa cuando los dispositivos y recursos informáticos como software son incluidos formalmente en el aula. Utilizar la computadora o el teléfono móvil en un aula no hace que la clase mejore, ni que los estudiantes sean alfabetizados digitalmente, ni que construyan el contenido que se pretende. En general, incluir dispositivos como pizarras inteligentes, proyectores digitales, tabletas, teléfonos, entre otros, no supone una verdadera integración de tecnologías en el proceso educativo. De igual manera ocurre con el software: incluir, por ejemplo, GeoGebra exclusivamente con el fin de enseñar a usar los botones y hacer circunferencias, controlar desplazadores, llenar tablas, hacer gráficas sin sentido y sin reflexión no se acerca a lo que realmente se busca con la integración de tecnologías en la educación matemática.

En este orden de ideas, el manejo técnico de un software no es suficiente para suponer la construcción de un conocimiento matemático real. Por ejemplo, en un *Software de geometría dinámica* (SGD) se pueden crear una infinidad de objetos sin tener una noción correcta de estos mismos. Ocurre igual con las distintas representaciones; las representaciones, como figuras o gráficos, tablas, simbolismos, pueden ser manipuladas en un software sin realmente comprender sus características (o sus invariantes). Tal vez, es necesario enfocar más los procesos matemáticos que ocurren cuando se usa tecnología y cuáles de estos procesos podrían permitir un uso adecuado de las TIC.

Varios autores ya han apelado a que los recursos tecnológicos pueden favorecer ciertos procesos inherentes a la matemática que se hace en el aula. Soldano, Luz, Arzarello y Yerushalmy (2018) señalan que, específicamente en geometría, los SGD pueden apoyar la investigación, exploración, generalización, verificación y refutación, pero estos procesos son propios de la actividad matemática y no propios del *software*. Esto se puede extender a toda la matemática escolar y los *softwares* que podrían ser utilizados. Estos autores ya indican una cantidad importante de investigaciones que soportan esta hipótesis. Particularmente, en trabajos como los de Morales (2010), Morales (2011), Morales (2014), Morales-López (2017), Morales-López y Font (2017) y Morales-López y Font (2019) ya se ha abordado esta temática.

Otros temas que pueden estar vinculados al uso de TIC son las concepciones y creencias de los PMSF sobre papel de las tecnologías en el contexto educativo. Por ejemplo, ¿qué tipo de integración se espera de un docente que está convencido de que las tecnologías no ayudan a comprender las matemáticas? Las creencias y su impacto son temas de investigación relevantes actualmente en educación.

En el caso de la educación matemática, tal y como afirma Goos (2014), mucha de la investigación en el impacto de la tecnología se ha basado en “*cómo los estudiantes aprenden matemáticas con la tecnología y se ha prestado menos atención a las prácticas de los profesores en el aula mediadas por la tecnología y al papel del profesor en la integración de la tecnología*” (p.140). Este trabajo se enfoca en los conocimientos del profesor de matemática, quien es el responsable de determinar las mejores rutas hacia el cumplimiento de los objetivos del proceso educativo y debe tomar decisiones coherentes durante todo el proceso.

Respecto a la planificación, integrar tecnología es un proceso que no es posible estudiar de forma aislada al quehacer de la educación matemática. Nadie puede emitir un criterio sobre el uso adecuado o no de la tecnología, si no se ha planteado a mayor escala lo que se espera del currículo y cómo el uso de recursos se integra a otros factores esenciales de la actividad en la clase de matemática.

Aunque esta investigación versa sobre el conocimiento del futuro profesor de matemáticas y los recursos tecnológicos, se mantiene el razonamiento de que tales conocimientos son útiles en la medida en que puedan ser integrados manteniendo equilibrio idóneo de los factores más relevantes.

Algunos Sistemas de Organización de los Conocimientos

Existen múltiples modelos que tratan de dar explicación a los distintos conocimientos asociados al profesor. Shulman (1986, 1987) expone que hay un *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) más allá del *conocimiento del contenido* (CK) que debe tener cualquier profesor. Este es importante porque:

Representa la mezcla entre contenido y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. (Shulman, 1987, p.8)

Estos trabajos de Shulman han sido los detonantes de varios sistemas de representación del conocimiento en diferentes temáticas o apoyo en el desarrollo del estudio del PCK. Sin ser exhaustivos, a continuación, se mencionan brevemente algunos de los más importantes.

Los sistemas de organización de los conocimientos vinculados al conocimiento del profesor de matemáticas

- El *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT) definido y desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008) y Hill, Ball y Schilling (2008) y posteriores trabajos. Este modelo distingue dos dominios de conocimiento: *el conocimiento del contenido* (SMK) y el *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK).
- El *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK) desarrollado por Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán (2013). En este caso se utilizan los mismos dominios que en el MTK (SMK y PCK), aunque renombra el SMK como *conocimiento matemático* (MK) y distingue seis subdominios vinculados al entorno de educación matemática. Además, agregan las creencias como una categoría transversal a estos seis subdominios: creencias sobre las matemáticas desde el estudio del MK y creencias en el aprendizaje y enseñanza de estas desde el estudio del PCK.

- Los conocimientos del profesor de matemáticas derivados del modelo de *Conocimientos y competencias del profesor de matemáticas* (DMKC) (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) fundamentado en el *enfoque ontosemiótico* (OSA) (Godino, Batanero, y Font, 2007) que, aunque no se deriva directamente del trabajo del Shulman (1986, 1987), este modelo aprovecha hallazgos de la investigación sobre el PCK, así como de otros modelos y teorías (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). El DMKC se basa en una organización en tres dimensiones: *matemática*, que refiere al conocimiento matemático común y ampliado; *didáctica* que se desarrolla en el concepto de *conocimiento didáctico matemático* (DMK) (Godino, 2009) y aparecen seis subcategorías del conocimiento del profesor (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica); y por último, la dimensión *metadidáctica* se basa en el conocimiento para reflexionar sobre su práctica docente (Font, Breda, Giacomone, y Godino, 2018).

Los sistemas de organización de los conocimientos vinculados directamente al conocimiento sobre la integración de tecnología

El modelo de *conocimiento tecnológico pedagógico del contenido* fue conocido originalmente como TPCK (Mishra & Koehler, 2006) y luego redefinido como TPACK (Koehler & Mishra, 2009). Se basa en tres cuerpos principales: el contenido, la pedagogía y la tecnología, y los sistemas emergen de la interacción entre cada uno. Así, los dominios generales son: el *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK), el *conocimiento tecnológico del contenido* (TCK) y el *conocimiento tecnológico pedagógico* (TPK). El PCK considerado en este modelo coincide con el establecido con Shulman y las otras parejas aparecen al analizar la relación entre cada cuerpo dos a dos, y finalmente, la triada TPACK (Mishra & Koehler, 2006). Esta investigación se centra en este sistema.

Los sistemas de organización de los conocimientos vinculados directamente al conocimiento del profesor de matemáticas y su vínculo con tecnología

- El modelo de *conocimiento tecnológico y pedagógico-matemático especializado* (STAMPK) de Getenet (2017) es un derivado del MTK y lo vincula con el TPACK cuyos dominios principales son el *conocimiento tecnológico* (TK), el SMK y el *conocimiento pedagógico especializado* (SPK) que, aunque el modelo de Ball y otros (2008) no lo definen de esa manera, sería el conocimiento especializado vinculado al PCK.
- El uso modelo TPACK directamente sobre la educación matemática ha generado un acrónimo que sustituye contenido directamente por la matemática, cuyo resultado es el TPMK. Trabajos como los de Lim, Ang y Koh (2016), Ozgun-Koca, Meagher y Edwards (2010) y Koh (2018) ya acuñan este término.

Dominios y subdominios del TPACK

Del apartado anterior es evidente que existen muchas formas de interpretar y organizar los conocimientos. Dado que el interés de esta investigación radica evidenciar los conocimientos que muestran los profesores al interactuar con tecnología continuación se describen los dominios y subdominios del TPACK (Mishra & Koehler, 2006).

1. *Conocimiento del contenido (CK)* (dominio). Refiere al tema y conceptos que el profesor debe enseñar y que son derivados de las indicaciones de cada currículo. De esta manera, el profesor de matemática debe conocer las múltiples representaciones de un objeto o saber, así como los fundamentos vinculados a definiciones y teoría que sustentan los temas que debe enseñar.

2. *Conocimiento de la pedagogía (PK)* (dominio). Este se basa en el estudio y comprensión sobre cómo las personas aprenden y las distintas teorías de aprendizaje. Es un conocimiento amplio sobre lo que son la educación, la pedagogía y la didáctica general.

3. *Conocimiento pedagógico del contenido (PCK)* (subdominio). Este conocimiento es a grandes rasgos el que Shulman (1986, 1987) define en sus trabajos y refiere a la pedagogía ligada a la enseñanza de un contenido. Este responde a la necesidad de reformular el discurso propio de cada contenido para hacerlo sensible a ser enseñado. Aquí también merece estudio la forma en que se organizan los distintos contenidos y se entablan distintas estrategias de aprendizaje.

4. *Conocimiento tecnológico (TK)* (dominio). Refiere al conocimiento de tecnologías en entornos comunes y especializados. Aquí aparece el conocimiento de las funciones de los instrumentos que se utilizan. Este conocimiento es parte del entorno y se liga a las distintas actividades humanas, de tal manera que se conoce al objeto (herramienta o instrumento) y sus distintos usos (libros, pizarras, cuadernos, lápices, computadoras, softwares específicos, entre otros). Si se centra en tecnologías digitales, sería el conocimiento ligado a uso de dispositivos electrónicos básicos y software para crear documentos, hojas de cálculo, uso de foros, uso técnico de entornos de aprendizajes virtuales, entre otros, aunque tal vez no de forma especializada.

5. *Conocimiento tecnológico del contenido (TCK)* (subdominio). Este refiere a la relación que tiene la tecnología que se usa con el contenido estudiado. Se basa en las distintas representaciones de los objetos a través de los recursos tecnológicos usados. En el caso de matemáticas, por ejemplo, refiere al conocimiento sobre la capacidad del recurso para permitir representaciones de los objetos matemáticos, ya sea por medio de gráficas, de bosquejos o dibujos, de construcciones, de tablas, representaciones simbólicas y al conocimiento de los conceptos matemáticos que están en juego en dichas construcciones y representaciones como, por ejemplo, las definiciones, preservación de invariantes de los objetos, tipos de sistemas (como geometría euclídea o no euclídeas) y entre otros, en el entorno tecnológico.

6. *Conocimiento tecnológico pedagógico (TPK)* (subdominio). Este conocimiento refiere al uso de los recursos tecnológicos empleados con fines educativos. Aquí, por ejemplo, ya no solo involucra el saber cómo interactuar en una Wiki o un foro, sino la teoría o teorías que respaldan el tipo de aprendizaje que se puede llevar a cabo. Junto a estas teorías, también están los distintos usos genéricos que ciertos dispositivos pueden tener y la idoneidad de su uso en ciertos procesos educativos.

7. *Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK)* (subdominio). Este subdominio representa el corazón del conocimiento del profesor que interpreta el contenido e integra la tecnología en los procesos educativos. En este conocimiento se vinculan todos los dominios y subdominios. La pertinencia de integración de tecnología podría ser, en parte, fundamentada a través del estudio de la relación de los tres dominios principales y los subdominios. Así, el uso de la tecnología tiene sentido en la medida que pertenezca a un entretreído junto con el estudio del contenido y la pedagogía.

METODOLOGÍA

Esta investigación se desarrolla en un marco cualitativo desde un enfoque descriptivo donde se pretende identificar, concretamente, los conocimientos evidenciados por los futuros docentes cuando realizan una actividad que involucra geometría, enseñanza y tecnología.

Participantes, Lugar y Tiempo

En este estudio participaron 65 profesores de matemática de secundaria en formación (PMSF) (30 mujeres) del curso de Recursos Informáticos MAC 404 de la carrera de Bachillerato y Licenciatura de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica (BLEM-2017); el curso corresponde al tercer semestre de la carrera y está dentro del área denominada: Pedagogía, didácticas específicas y tecnología.

Los 65 PMSF estaban divididos en tres grupos con distintos horarios y todos se impartieron en la misma sede de la Universidad. El estudio se realizó durante el primer semestre del 2018. La actividad se llevó a cabo entre la última semana de febrero y la primera de marzo, por lo cual, el estudiante ya ha tenido dos semanas de instrucción técnica sobre el uso de SGD.

† No se solicitó permiso al Sistema CEP/CONEP, pues la investigación se realiza en Costa Rica donde la normativa no rige de forma obligatoria. Se utilizó el consentimiento informado. Se exime de cualquier consecuencia de esta misma, incluyendo la plena asistencia y posible compensación por cualquier daño resultante a cualquiera de los participantes de la investigación, de acuerdo con la Resolución N.º 510, del 7 de abril de 2016, del Consejo Nacional de Salud.

Instrumento

Se diseñó una actividad donde se pudiera exhibir la existencia de ciertos conocimientos de los PMSF. La tarea está vinculada con la construcción de una figura geométrica con el uso de GeoGebra y donde debían realizar una serie de instrucciones con el fin de explicar a estudiantes de secundaria la forma correcta de realizar una construcción. Así, en el Cuadro 1 se muestra la secuencia diseñada.

Cuadro 1

Instrucciones de la actividad.

Actividad

1. Observe el siguiente video en YouTube sobre la construcción de un rombo <https://www.youtube.com/watch?v=v0oaBu3VnA4>

- a) Enuncie una posible definición de rombo basado en la construcción anterior
- b) Construya un rombo con el software GeoGebra cuyas diagonales midan 6cm y 10cm (no utilice el botón de mediatriz o punto medio)

2. Observe el siguiente video en YouTube <https://www.youtube.com/watch?v=qnR2IbM7bJU>

- a) Construya un rombo cuyo lado mida 3cm y una diagonal mida 4cm con el software GeoGebra y basado en la construcción mostrada en el video.
- b) Construya un rombo cuyo lado mida 8cm y una diagonal mida 6cm con el software GeoGebra y basado en la construcción mostrada en el video.
- c) Construya un rombo cuyo lado mida 2cm y una diagonal de 10cm con el software GeoGebra y basado en la construcción mostrada en el video.

3. Observe el siguiente video <https://www.youtube.com/watch?v=X9rRuGYdzmo>

- a) Enuncie una posible definición de trapecio basado en la construcción anterior
- b) Basado en el video y el punto 3.a, realice las instrucciones para lograr que un estudiante construya un trapecio en GeoGebra.

4. Comparta en el foro de Moodle las instrucciones.

5. Una vez en el foro:

- a) El profesor le asignará las instrucciones de otro compañero.
- b) Realice la construcción propuesta por su compañero en GeoGebra.
- c) Justifique la pertinencia de las instrucciones. Debe ser claro y puede utilizar distintos recursos para valorar las instrucciones y ofrecer mejoras.
- d) Se debe realizar una segunda versión de las instrucciones, basados en las recomendaciones del compañero y justificar los cambios.

Protocolo

Los estudiantes deben trabajar en el laboratorio de cómputo de forma individual. En la primera parte se les solicita observar un video sobre la construcción de un rombo al estilo regla-compás. Luego, escriben una definición del objeto geométrico basados

en tal construcción, y posteriormente, deben construyen un rombo con unas medidas predefinidas utilizando el software GeoGebra.

En la segunda parte, se les solicita a los PMSF observar un video donde se explica la manera de construir un rombo basados en las medidas de las diagonales. Se indica a los estudiantes realizar cuatro ejercicios (2a, 2b, 2c, y 2d) donde observan características sobre la posible construcción dadas ciertas medidas.

En la tercera parte deben observar un video sobre la construcción de un trapecio al estilo regla-compás. Igualmente, se les solicita que traten de crear una definición basados en lo que observan. Es en esta etapa donde se generan los insumos para el análisis que se realiza en esta investigación. En este caso se les solicita crear las instrucciones para que un estudiante de secundaria logre realizar esta construcción en el software GeoGebra (**primera versión de las instrucciones para construir un trapecio**).

En la cuarta etapa de la actividad, los PMSF deben colocar sus instrucciones en un foro de Moodle, de tal manera que el profesor asigna a otro compañero del mismo curso para que las lea y trate de hacer la construcción. Luego, este estudiante debe dar retroalimentación a quien diseñó las instrucciones, de tal manera que las mejore (**segunda versión de las instrucciones para construir un trapecio**). Esta etapa ocurre durante el transcurso de una semana de manera asincrónica en el Moodle.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

A continuación, se describen, de forma general, los conocimientos manifestados por los PMSF cuando realizaron esta actividad. Como se indicó en el marco teórico, se utilizan los dominios y subdominios del TPACK y el análisis se basa en la actividad del trapecio. Cabe indicar que cada uno de estos conocimientos plantean por sí mismo amplias agendas de investigación, por lo que se hace una revisión general de los aspectos que pueden crear interés en cada uno, sin pretender ser exhaustivos.

1. *Conocimiento del contenido (CK)* (dominio).

Uno de los elementos que surge con frecuencia dentro del análisis que realizan los PMSF sobre las construcciones de sus compañeros es que se usa el concepto de medida para ubicar puntos. Por ejemplo, se menciona ubicar el punto que está a la mitad de la medida de un segmento (Cuadro 2).

Cuadro 2
Comparación entre las instrucciones creadas por PMSF.

Instrucciones de la primera versión	Sugerencia o comentario del otro PMSF
Medimos hasta el punto medio de dicho segmento y lo llamamos V.	Construir el punto medio del segmento TU. (No hay medida exacta en el segmento, pues la idea era no basarse en medidas)

Claro está que esto ocurre también con aspectos propios de la geometría euclídea que están conociendo y el lenguaje empleado dentro del software. Así, por ejemplo, *construir*, *crear*, *colocar* son palabras que repetidamente usan sin cuestionarse la relación entre la matemática que conocen y la que el software les permite realizar.

Igualmente, parte del lenguaje matemático también es expuesto en las sugerencias (Cuadro 3).

Cuadro 3

Sugerencias de parte de algunos PMSF.

- Utilizar los términos correctos; es decir, en vez de usar las palabras como *darse*, *poner*, *unir*, es mejor utilizar palabras de lenguaje más matemático como, por ejemplo, *trazar un segmento*, *construir*, entre otros.
- Le hago la recomendación de evitar las palabras como *izquierda* o *derecha* cuando se habla de construcciones geométricas.

Otro punto que es obviado por los PMSF y que no logran comprender es el concepto de paralelismo. Por ejemplo, se pide en las instrucciones crear una paralela a un segmento sin indicar que esta paralela tenía que pasar por un punto que antes había sido establecido. Asimismo, hay múltiples errores al instruir sobre crear una circunferencia dado un segmento, pues se omite mencionar si este es el radio o diámetro.

2. *Conocimiento de la pedagogía (PK) (dominio)*

Respecto a este tipo de conocimiento, todos los estudiantes trataron de crear las instrucciones de la manera en que ellos lo hicieron en la etapa uno: a través de pasos continuos ordenados de forma jerárquica y utilizando una mezcla entre representaciones simbólicas y lenguaje común.

Ninguno de los estudiantes consultó o se atrevió a realizar las instrucciones basados en otros apoyos visuales o distintas presentaciones. Esto evidencia una tendencia bastante instruccional o secuencial.

3. *Conocimiento pedagógico del contenido (PCK) (subdominio)*

Se reflejó en esta categoría la dificultad de poder ordenar las ideas para hacerlas accesibles a los estudiantes. Incluso, tal como se mencionó, todos asumieron que hacer una secuencia de instrucción era la mejor opción para mostrar la construcción indicada. En el Cuadro 4 se muestra la opinión de uno de los PMSF respecto a la dificultad de entender la forma en que se expresan las ideas.

Cuadro 4

Sugerencia de parte de un PMSF.

Fue muy complicado el solo realizar el paso 1, más que todo porque el lenguaje utilizado no permite un seguimiento a la creación del trapecio. Hay que analizar mucho cada paso, tal vez fue pensado para personas que manejan el lenguaje matemático, pero a nivel didáctico y para estudiantes de secundaria que apenas se están relacionando con el programa GeoGebra, esta serie de pasos pueden llegar a ser frustrantes.

En este caso, el PMSF que redactó las instrucciones le indica a su compañero en el foro del Moodle que ha determinado una forma más sencilla y la califica de: *más corta y menos compleja*, para poder realizar dicha construcción y le comparte el esquema de construcción de GeoGebra como justificación de la sencillez de la construcción (Cuadro 5).

Cuadro 5

Protocolo de construcción propuesto por un PMSF en respuesta a las sugerencias de su compañero.

N.º	Nombre	Descripción
1	<i>Punto A</i>	
2	<i>Punto B</i>	
3	<i>Segmento f</i>	<i>Segmento [A, B]</i>
4	<i>Punto C</i>	<i>Punto sobre f</i>
5	<i>Punto D</i>	<i>Punto sobre f</i>
6	<i>Recta g</i>	<i>Recta que pasa por C perpendicular a f</i>
7	<i>Recta h</i>	<i>Recta que pasa por D perpendicular a f</i>
8	<i>Punto E</i>	
9	<i>Recta i</i>	<i>Recta paralela a f por E</i>
10	<i>Punto F</i>	<i>Intersección de i, g</i>
11	<i>Punto G</i>	<i>Intersección de h, i</i>
12	<i>Segmento j</i>	<i>Segmento [A, F]</i>
13	<i>Segmento k</i>	<i>Segmento [F, G]</i>
14	<i>Segmento l</i>	<i>Segmento [G, B]</i>

4. Conocimiento tecnológico (TK) (dominio)

Durante la primera semana de inicio del curso se aplicó un instrumento de diagnóstico general a dos de los grupos con el fin de conocer algunos elementos básicos sobre sus conocimientos previos sobre la computadora y su uso. Los indicadores fueron: computadora y sus partes, uso de internet y conocimiento de algunos *softwares*.

Al menos el 60 % utiliza la computadora más de dos veces por semana. Respecto a las partes de la computadora, más del 97 % reconoce fácilmente un monitor, teclado, ratón, CPU, puertos de USB y el interruptor de encendido. Menos de un tercio logra reconocer que es un disco duro o la memoria RAM. Respecto al uso, 98 % indica que el principal uso que se le da es para navegar en internet (revisar correo electrónico, visitar redes sociales, buscar información, ver vídeos, etc.). Respecto a los *softwares*, más del 95 % indica que conoce Microsoft Excel y el 40 % ha visto utilizar o conoce GeoGebra.

5. Conocimiento tecnológico del contenido (TCK) (subdominio)

Se deriva de las instrucciones analizadas que algunos PMSF utilizan simbología matemática adecuada, mientras que otros han utilizado una mezcla no adecuada entre la simbología y lenguaje del software, lo que deriva en explicaciones poco consistentes.

Lo anterior es significativo de analizar pues algunos estudiantes lograron crear una nueva representación de los objetos matemáticos construidos en el lenguaje propio del *software* y pudieron moverse entre las presentaciones a conveniencia e, incluso, usarlas como justificación (conversiones entre sistemas) (Figura 1).

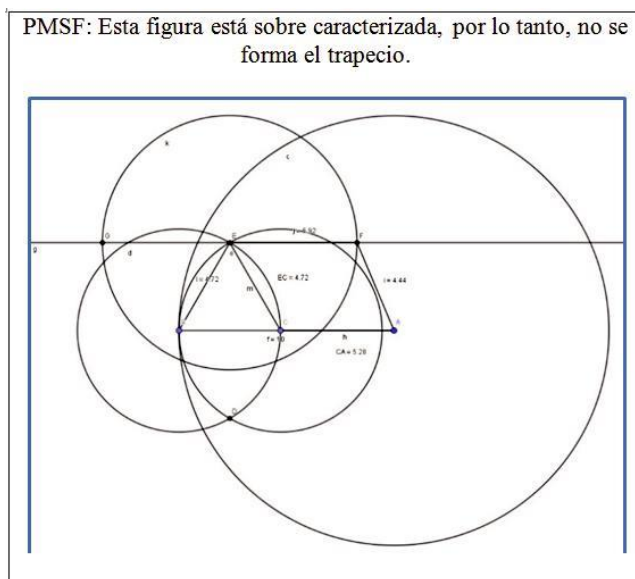


Figura 1. Justificación gráfica de un PMSF sobre errores en las instrucciones de un compañero.

Como se mostró en las categorías anteriores, los mismos PMSF empezaron de forma intuitiva a comunicarse con distintas representaciones utilizando, principalmente, la parte gráfica y el protocolo de construcción que general el software (tal como el Cuadro 5).

En algunos casos, cuando los PMSF valoraron las instrucciones, determinaron que no coincidían con los alcances del software (paso por paso). Por ejemplo, se solicita en

las instrucciones crear un segmento paralelo a otro, pero esto solo se lograría a través de la construcción de, al menos, un segmento y la construcción de recta paralela por un punto externo, para luego delimitar un segmento.

6. *Conocimiento tecnológico pedagógico (TPK)* (subdominio)

Respecto al aprendizaje alrededor del uso de este tipo de recursos tecnológicos, no es posible inferir si los PMSF están asumiendo o adoptando alguna teoría de aprendizaje que justifique que los estudiantes comprenderán adecuadamente el contenido trabajado. Aun así, los PMSF evidenciaron la necesidad de prever errores y también, posibles interpretaciones que los estudiantes podrían realizar al leer las instrucciones.

Surgen de las retroalimentaciones sugerencias vinculadas con el aprendizaje del uso del software para una tarea matemática. Por ejemplo, en un supuesto de que los estudiantes de secundaria no tengan otro apoyo, se recomendó utilizar las imágenes de los botones y definir inclusive los nombres etiquetar y poder hacer referencia a esta etiqueta cuando se mencione al objeto.

7. *Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK)* (subdominio)

Como se indicó en el marco teórico de este trabajo, este es tipo de conocimiento que se pretende encontrar en la integración adecuada de las tecnologías con la enseñanza de un contenido.

Algunos PMSF incluyeron elementos fundamentales dentro de sus retroalimentaciones. La necesidad de reconstruir las instrucciones no solo se ven desde el punto de vista técnico, sino también, desde la creación correcta del objeto matemático que permita comprender su construcción.

En esta línea, se encuentran en las retroalimentaciones una combinación adecuada de sugerencias que involucran tres aristas: a) la forma de construir el trapecio con el uso de GeoGebra, b) la construcción correcta del trapecio y, c) la forma de apoyar al estudiante para que realice una construcción correcta de manera que pueda entender que es lo que construye.

DISCUSIÓN

A continuación, se ejemplifican estas tres aristas

1) *El PMSF reconstruyó sus instrucciones en términos de hacer más accesible el lenguaje.* Originalmente un PMSF utilizó lenguaje matemático de nivel universitario para estudiantes de secundaria y que, al menos en el currículo preuniversitario de Costa Rica, no es el mismo. Por ejemplo, aunque el PMSF estaba en lo correcto al utilizar expresiones como: “*Utilizar la herramienta compas y trazar una circunferencia $C(A,d(E,D))$* ”, a partir de las retroalimentaciones redefinió las instrucciones para utilizar menos lenguaje simbólico. En ningún momento se puso en duda por parte de los PMSF la importancia de

conocer y usar términos, notaciones y simbología, pero lo más notable fue que el PMSF decidió volver a redactarlo para simplificarlo.

2) El PMSF reconstruyó los pasos en el software para hacer menos de los que el video original planteaba. En este caso, evitó el uso de circunferencias para dejar solamente los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. Es decir, utiliza menos instrucciones y herramientas del software (aun cuando incluso se puede reducir un paso) (Cuadro 6).

Cuadro 6

Comparación entre la redacción original propuesta por un PMSF y la reconstrucción luego de las recomendaciones.

Redacción original	Reconstrucción de las instrucciones luego de la retro alimentación
<p>Consideraciones: Segmentos AB, CD, ED, FG $d(F,G) < d(E,D) < d(C,D) < d(A,B)$ $C(r,O)$: Circunferencia centro O y radio r <i>Pasos para seguir:</i> 1) Trazar un segmento de igual medida que el lado de mayor longitud. Llamémoslo AB 2) Utilizar la herramienta compas y trazar una circunferencia $C(A,d(E,D))$. 3) Utilizar el botón de intersección y buscar el punto donde se corta la circunferencia creada en anterior paso y el segmento AB. Llamémoslo X 4) Al igual que en el paso 2), utilizar herramienta compas y construir $C(B,d(F,G))$ 5) Construir otra circunferencia utilizando herramienta compas de tal forma que $C(X,d(F,G))$ 6) Usar el botón de intersección y señalar el punto de corte entre las circunferencias de los dos puntos anteriores. Llamémoslo Y. 7) Tracemos el segmento entre el punto X y Y, análogamente el B y Y. 8) Usar el botón de paralela y construir la paralela a AB y que contenga a Y. 9) Análogo al paso anterior, trazar la recta paralela a XY y que contenga a A. 10) Usar el botón de intersección, para determinar el corte entre las paralelas construidas en el paso 8) y 9).</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) Construya el segmento AB. 2) Con la herramienta <i>Punto</i> construya los puntos C y D sobre el segmento AB. (Preferiblemente que estén alineados en el siguiente orden A, C, D, B) 3) Construya la recta g, de tal forma que sea perpendicular a AB y que contenga el punto C. 4) Construya la recta h, de tal forma que sea perpendicular a AB y que contenga el punto D. 5) Construya la recta i, de tal forma que sea paralela a AB. (Esta recta i, generará un punto E, colóquelo en cualquier parte, excepto dentro de las rectas g y h). 6) Con la herramienta intersección, marque el punto de intersección F de la recta i con la recta g. 7) Con la herramienta intersección, marque el punto de intersección G de la recta i con la recta h. 8) Oculte las rectas g, h, i. 9) Construya los segmentos AF, FG, GB <p>Observemos que el cuadrilátero AFGB es un trapecio.</p> <p>Nota: El punto E generado en el paso 5), controla la longitud del segmento interno de la altura.</p>

3) *El PMSF intentó concebir una visión distinta del objeto matemático para hacerlo más simple.* El punto anterior también está vinculado al objeto matemático, pues, aunque efectivamente la figura construida tiene forma de trapecio, tiene un problema importante que aparece al arrastrarlo por la pantalla. Por ejemplo, si se toma como punto de arrastre a A o B, el resultado es una ampliación o contracción del objeto. Tal como señala el PMSF en la nota final que realiza, crea una dependencia con un punto E, externo que no es parte del objeto matemático (Figura 2).

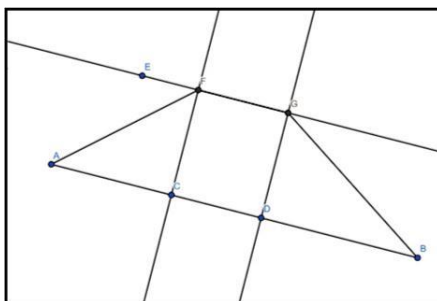


Figura 2. Imagen de la construcción del trapecio propuesta por el PMSF en la segunda versión de las instrucciones.

Es necesario aclarar que no es el objetivo de la actividad ni del modelo TPACK la búsqueda de nuevas definiciones para los conceptos matemáticos, sino más bien evidenciar que el PMSF entra en contacto tanto en el uso de la tecnología, la enseñanza y con el contenido de una manera integral, poniendo en juego cada conocimiento y tratando de equilibrarlo en esta actividad.

RESULTADOS Y CONSIDERACIONES FINALES

Los PMSF mostraron distintos tipos de conocimientos cuando realizaron esta actividad. En distintas formas aparecen reflejados: CK, PK, PCK, TK, TCK, TPACK. Del único que no se tiene evidencia clara es del conocimiento tecnológico pedagógico. Si bien para algunos PMSF el software es familiar, no estaban preparados para diseñar una instrucción para enseñar una construcción geométrica. Asimismo, muchos muestran un sentido espacial correcto al poder describir las características y los invariantes en las retroalimentaciones y para ofrecer sugerencias.

Varios elementos aparecen de forma transversal, tal como el lenguaje que tiene múltiples aristas: el lenguaje matemático, el lenguaje sobre el uso de un cierto recurso tecnológico como el GeoGebra y el lenguaje que se utiliza cuando se trata de explicar a otros una secuencia de pasos para que haya un aprendizaje.

Ciertos conocimientos también son expuestos cuando se les solicita valorar o son valorados por sus pares. Aunque las retroalimentaciones muchas veces no son escritas de manera formal (pues se comunican como pares), sirven como catalizadores para efectuar

sus propias correcciones en las instrucciones y les permiten tomar en cuenta factores que no consideraron en la primera versión de sus instrucciones. Si bien es una actividad corta, esta permite la discusión y colaboración.

El lenguaje, la simbología utilizada y la forma de explicar cómo trabajar en el software fueron los elementos que más se repitieron, sin embargo, como se mostró, aparecieron reflexiones sobre el objeto matemático y la forma en que se pretende explicar a un estudiante cómo construirlo.

En la mayoría, la segunda versión de las instrucciones se centró en mejorar el lenguaje para hacerlo más accesible, corregir errores como la sobre caracterización del objeto o vincular mejor los pasos descritos a las herramientas y botones que posee GeoGebra. Esto es primordial en el diseño de secuencias de tareas.

Finalmente, es claro que, si un profesor de matemáticas no se cuestiona de manera auténtica la forma en que debe orientar las tareas que involucran TIC, el lenguaje que debe ser utilizado y el concepto matemático que está interviniendo, no podrá integrar la tecnología pertinentemente en el aula de matemática.

Parte de este trabajo puede ser la base para definir actividades que eviten el uso indiscriminado de tecnología y permitan valorar las implicaciones que se prevén en estas y la coherencia de las tareas que son propuestas a los futuros profesores de matemáticas.

En lo referente al uso de tecnología es muy posible que mucho dependa de la planificación con la que se incorporan estos recursos. Este trabajo ejemplifica la necesidad de incluir en esta planificación la comprensión de los conocimientos que son requeridos con el fin de generar tareas que enriquezcan la educación matemática.

RECONOCIMIENTO

Esta investigación se produce como uno de los resultados del convenio de cooperación internacional Cod018133 entre la Universidad Nacional (Costa Rica) y la Universitat de Barcelona (España), 2018-2022.

REFERENCIAS

- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp.2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

- Font, V., Breda, A., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García & A. Bruno (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII* (pp.23-38). Gijón: SEIEM.
- Getenet, S. T. (2017). Adapting technological pedagogical content knowledge framework to teach mathematics. *Education and Information Technologies*, 22(5), 2629-2644. doi: 10.1007/s10639-016-9566-x.
- Godino, J. D. (2009) . Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. doi: 10.1590/1980-4415v31n57a05.
- Godino, J.D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp.288-297). Málaga: SEIEM.
- Goos, M. (2014). Technology Integration in Secondary School Mathematics: The Development of Teachers' Professional Identities. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, N. Sinclair (Eds), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. Mathematics Education in the Digital Era* (vol 2). Springer: Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-007-4638-1_7.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teacher's Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400. Recuperado de http://www.nctm.org/Publications/journal-for-research-in-mathematics-education/2008/Vol39/Issue4/Unpacking-Pedagogical-Content-Knowledge_-Conceptualizing-and-Measuring-Teachers_-Topic-Specific-Knowledge-of-Students/
- Koehler, M. & Mishra, P. (2009). What is Technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60–70.
- Koh, J. H. L. (2018). Articulating Teachers' Creation of Technological Pedagogical Mathematical Knowledge (TPMK) for Supporting Mathematical Inquiry with Authentic Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*. doi: 10.1007/ s10763-018-9914-y.
- Lim, W. P., Ang, P. L., & Koh, J. H. L. (2016). Developing teachers' technological pedagogical mathematics knowledge (TPMK) to build students' capacity to think and communicate in mathematics classrooms. In C. S. Chai, C. P. Lim, & C. M. Tan (Eds.), *Future learning in primary schools – a Singapore perspective* (pp.129–146). Singapore: Springer. doi: 10.1007/978-981-287-579-2_9.
- Mishra, P. & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. doi: 10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x.

- Morales, Y. (2010). En búsqueda de las competencias tecnológicas en la formación de formadores en matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5(6) . 63-80. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6923>.
- Morales, Y. (2011). Inputs for the incorporation of the UNESCO guidelines on ICT competency standards for teachers: the training of teachers of mathematics in Central America. *Revista Aula Abierta*, 39(1). 3-12. Descargado de http://www.uniovi.net/ICE/publicaciones/Aula_Abierta/numeros_anteriores_hasta_2013/i15/03_AulaAbierta_vol39_n1_enero_2011.
- Morales, Y. (2014). Propuesta de aprendizaje bimodal para mejorar los primeros cursos de matemática en la universidad. La situación de la Universidad Nacional. *Tecnología en Marcha*. 27(2), 114-123. Descargado de http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/servicios/ojs/index.php/tec_marcha/article/download/1931/1758.
- Morales-López, Y. & Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, 19(1), 122-137. Descargado de <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2975>.
- Morales-López, Y. & Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa*, 45, 1-19. e189468. doi: 10.1590/S1678-4634201945189468.
- Morales-López, Y. (2017). *Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers*. In A. Ruiz (Ed.), *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean: The Cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela* (pp.39–56). Cham: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-44177-1_3.
- Ozgun-Koca, S. A., Meagher, M., & Edwards, M. T. (2010). Preservice teachers' emerging TPACK in a technology-rich methods class. *The Mathematics Educator*, 19(2), 10–20.
- Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. doi: 10.3102/0013189X015002004.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411.
- Soldano, C., Luz, Y., Arzarello, F., & Yerushalmy, M. (2018). Technology-based inquiry in geometry: semantic games through the lens of variation. *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 7–23. doi: 10.1007/s10649-018-9841-4.