ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5265

Conhecimentos para o Ensino de Argumentações e Provas de Futuros Professores de Matemática

Marta Élid Amorim[a]
Ruy César Pietropaolo[b]
Arthur Belford Powell[c]

[a] Universidade Federal de Sergipe (UFS), Departamento de Matemática – *Campus* Professor Alberto Carvalho, Itabaiana, SE, Brasil.
[b] Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN/SP), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, São Paulo, SP, Brasil.
[c] Rutgers University–Newark, Department of Urban Education, Newark, NJ, USA.

Recebido para publicação em 16 jun. 2019. Aceito, após revisão, em 31 jul. 2019.
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

RESUMO

Este artigo apresenta parte das discussões e resultados de uma pesquisa de doutoramento cujo objetivo foi refletir sobre questões relacionadas à formação inicial de futuros professores de Matemática, no que se refere à seleção, organização e elaboração de situações que favoreçam a aprendizagem de alunos da Educação Básica sobre ideias fundamentais relativas às argumentações e provas. Trata-se de um estudo que envolveu um grupo de dez estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de um campus da Universidade Federal de Sergipe. A primeira fase da coleta de dados constituiu-se pela aplicação de instrumentos de caráter diagnóstico. A segunda fase, denominada de Formação, foi realizada segundo princípios da metodologia *Design Experiments* e teve a finalidade de investigar se sequências de atividades que explorem conhecimentos sobre provas sob o ponto de vista didático e curricular podem favorecer a ressignificação do processo de ensino de conceitos e atitudes concernentes a esse tema por futuros professores. Em relação à fundamentação teórica, no que diz respeito aos conhecimentos que devem ser de domínio do professor de Matemática, foram consideradas as categorias estabelecidas por Ball, Thames e Phelps. As respostas dos licenciandos aos instrumentos diagnósticos revelaram certa cautela a respeito da inclusão de provas nos currículos da Educação Básica. As discussões e reflexões sobre as sequências, propostas durante essa fase, ampliaram a base de conhecimentos necessários ao professor de Matemática para exercer a docência e a ressignificação do trabalho com provas.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores de Matemática; Conhecimentos para o Ensino; Argumentações e Provas.

Autor correspondente: Marta Élid Amorim. E-mail: martaelid@gmail.com

Knowledge for Teaching of Justifications and Proofs of Future Mathematics Teachers

ABSTRACT

This article presents part of the discussions and results of a doctoral research project that analyzed issues related to the initial education of future math teachers, concerning the selection, organization, and preparation of situations that promote students' academic learning of fundamental ideas related to justifications and proofs. This study involves a group of ten pre-service teachers who attend the Federal University of Sergipe. The first phase of data collection involved the application of diagnostic instruments. The second phase, named the 'training process', was carried out following principles of the Design Experiments methodology and aimed to investigate how activity sequences exploring knowledge about proofs, from a didactic and curricular perspective, foster new meanings for learning concepts and attitudes. To consider theoretically the knowledge that a mathematics teacher should possess, we considered the categories by Ball, Thames and Phelps. The answers by future teachers to the diagnostic instruments revealed a certain cautiousness regarding the inclusion of proofs in school curricula. Discussions and reflections on learning situations, proposed during this phase, broadened the knowledge base necessary for mathematics teachers and gave new meaning to working with proofs.

Keywords: Initial Education for Mathematics Teachers; Knowledge for Teaching; Justifications and Proofs.

INTRODUÇÃO

Este artigo refere-se a um recorte de pesquisa de doutoramento cujo objetivo foi investigar os conhecimentos necessários ao professor sob os pontos de vista do conteúdo, didático e curricular para ensinar noções e procedimentos concernentes às provas na Educação Básica.

Convém, inicialmente, assinalar que o significado de provas nesse trabalho tem maior amplitude: incluir desde as primeiras argumentações, experimentações e verificações empíricas até as demonstrações – essas seriam provas rigorosas ou formais.

Julgamos que essa pesquisa seja relevante, sobretudo porque a inclusão de um trabalho inicial com argumentações e provas já a partir do Ensino Fundamental está indicado por alguns currículos brasileiros, como os de São Paulo (2010) e Pernambuco (2013), da mesma forma que em outros países como Inglaterra e França.

> Há uma tendência que vem ganhando força em alguns currículos: a inclusão de um trabalho com argumentações e provas já a partir do Ensino Fundamental. Apesar de não haver um absoluto consenso a esse respeito, pois as concepções sobre os significados desse trabalho não são exatamente as mesmas, tais recomendações estão razoavelmente explícitas nos currículos de alguns países. (Pietropaolo, 2005, p.98)

A Base Nacional Comum Curricular indica, por exemplo, a prova do Teorema de Pitágoras no 9º ano do Ensino Fundamental, como mostra a habilidade 13: Provar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos (Brasil, 2017, p.317)

Por outro lado, a implementação de novos currículos prescritos, exige, segundo pesquisadores, mudanças nos processos de formação inicial e continuada de professores de Matemática. Pietropaolo (1999) considera, por exemplo, que os processos de implantação de propostas curriculares de Matemática, como a da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo em 1988, mostraram-se ineficazes, pois encontraram a falta de conhecimento da área por parte de muitos professores, além de concepções, crenças e valores muito arraigados, programas inadequados de formação de professores, livros que não incorporam novas possibilidades de trabalho. Tudo isso torna o processo lento, com avanços quase imperceptíveis e mesmo com distorções na aplicação de novas ideias, trazendo, muitas vezes, prejuízos ao processo de ensino e de aprendizagem.

Convém, também, destacar que a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em relação à licenciatura, já em 2003, elaborou um documento que ainda hoje é bastante atual, por considerar que, na prática, não há a superação de problemas já identificados por educadores e pesquisadores da formação de professores de Matemática, como os que seguem.

> - O perfil de professor de Matemática exigido hoje: deve ser um profissional com grande competência para formular questões que estimulem a reflexão de seus alunos, além de ser criativo para criar ambientes e situações de aprendizagem matematicamente ricos.
>
> - A construção da identidade própria dos cursos: a identidade dos cursos deve ser construída com base em elementos constitutivos do processo de construção do conhecimento profissional como: vinculação da formação acadêmica com a prática profissional, ênfase no conhecimento didático-pedagógico da matemática a ser ensinada e promover, durante a licenciatura, práticas investigativas que promovam a articulação entre teoria e prática.
>
> - A seleção de conteúdos e sua abordagem: os cursos de licenciatura devem adotar uma perspectiva que inclui a preparação para a docência, o que compreende o tratamento especial aos conteúdos matemáticos da educação básica, além de conteúdos ampliadores do conhecimento matemático, como: os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, da Análise Matemática, da Álgebra, da Geometria, da Estatística, da Análise Combinatória, da Probabilidade etc., que devem ser selecionados de forma a possibilitar, ao professor em formação, conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática. (SBEM, 2003, p.4-10)

Consideramos que essas discussões apresentadas pela SBEM (2003) concebem os cursos de Licenciatura em Matemática na perspectiva de rompimento da dicotomia entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos específicos, configurando a não dissociabilidade entre teoria e prática. Ou seja, os professores seriam formados em uma perspectiva da Educação Matemática. Essa proposta da SBEM considera que os estudantes, futuros professores, precisariam experimentar, discutir e modelar situações semelhantes àquelas que os seus futuros educandos deveriam vivenciar.

Para viabilizar o desenvolvimento da nossa pesquisa, escolhemos como espaço de discussão a disciplina de Tópicos Especiais em Ensino de Matemática, disciplina que compõe a grade de disciplinas optativas do curso de Licenciatura em Matemática da UFS – Campus Professor Alberto Carvalho e que, como todas as disciplinas denominadas por Tópicos, têm a especificidade da ementa e do programa serem propostos pelo professor regente e aprovados em colegiado antes do início do semestre. Trata-se de uma disciplina de 4 créditos (60 horas), de acordo com o programa sugerido, e foram discutidos temas relacionados ao tema da nossa pesquisa, o uso de provas na Educação Básica.

Esta pesquisa solicitou avaliação ética pelo sistema CEP/CONEP[1], obteve a aprovação sob o número 982.198 e contou com a participação de 10 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

Nosso grupo foi composto pelos dez estudantes matriculados nessa disciplina. A idade média desses sujeitos é 22,5 anos e são, em sua maioria, oriundos de escola pública, cursando o último período do curso de Licenciatura em Matemática e dispostos a atuar como professores de Matemática.

Nesse texto, as referências aos licenciandos são por feitas por (A), (B), ... (J), a fim de salvaguardar a identidade dos mesmos.

Com o intuito de contribuir com uma proposta que permita uma reflexão sobre a inclusão das provas matemáticas na Educação Básica, propusemos investigar a seguinte questão: Em que medida uma sequência de atividades que explore diferentes tipos de provas pode favorecer a ampliação da base de conhecimentos para o ensino desse tema?

Para responder a essa questão, propusemos, inicialmente, aos sujeitos desta pesquisa que respondessem a nossas indagações, com a finalidade de identificar seus conhecimentos a respeito das provas e suas concepções a respeito de seu ensino na Educação Básica. Nomeamos essa primeira fase da pesquisa como Diagnóstica. Posteriormente, organizamos e desenvolvemos junto aos licenciandos duas Situações de Aprendizagem – uma sobre o Teorema de Pitágoras e outra sobre as Equações Diofantinas – que constituíram a base do *Design Experiment*, a metodologia que escolhemos. Para nomear essa fase, utilizamos o termo *Formação*. Por limitação de espaço, apresentaremos nesse artigo apenas parte da formação, a que trata do Teorema de Pitágoras.

[1] Projeto de pesquisa financiado pela CAPES sob o número 99999.001706/2014-04.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Antes de procedermos à análise de resultados do instrumento diagnóstico e apresentarmos o *Design*, elaborado para fomentar a discussão a respeito do processo de abordagem e desenvolvimento de provas na Educação Básica e a discussão dos dados coletados ao longo da Formação, julgamos necessário discutir algumas ideias que serviram como suporte nessa tarefa.

Nossa análise foi construída, levando em consideração os domínios de Ball, Thames e Phelps (2008), no que tange os conhecimentos necessários ao professor para o ensino, a saber: Conhecimento do Conteúdo Comum (CCK), Conhecimento do Conteúdo Especializado (SCK), Conhecimento Horizontal do Conteúdo Comum (HCK), Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC).

O Conhecimento Comum do Conteúdo refere-se ao conhecimento do conteúdo matemático que todos que aprenderam determinado tema deveriam ter e que não é específico para os que exercem a atividade docente. Quanto ao Teorema de Pitágoras, espera-se que o indivíduo aplique essa relação para resolver problemas em diferentes contextos. Esse é um conhecimento necessário aos professores, mas não é exclusivo deles.

O Conhecimento do Conteúdo Especializado refere-se ao conhecimento específico para a atividade docente e, portanto, não necessariamente faz parte do repertório de pesquisador em matemática – aquele que produz conhecimento novo em matemática –, tampouco do cidadão em geral. Em relação ao Teorema de Pitágoras, espera-se que um professor de matemática saiba construir uma sequência de provas empíricas (como os recortes de quadrados construídos sobre os catetos e a hipotenusa) que conduza os alunos à prova formal.

Todos os professores deveriam saber justificar os procedimentos que ensinam, ter formas de prover significados aos tópicos estudados e ter explicações e ilustrações para os conceitos que abordam.

Outro aspecto que o grupo de Michigan leva em consideração é o Conhecimento Horizontal do Conteúdo. Esse conhecimento é necessário ao professor para que ele possa destacar os postos-chaves do conteúdo, propor situações problematizadoras que permitam fazer conexões e orientar seus alunos para avançar a partir de suas próprias conjecturas, preservando os princípios matemáticos e familiarizando-os com a linguagem e a estrutura próprias da disciplina.

Podemos identificar, na sequência proposta para o ensino do Teorema de Pitágoras, elementos do Conhecimento Horizontal do Conteúdo. Uma das atividades propostas para o ensino desse teorema nos permite discutir incomensurabilidade de segmentos, por exemplo. Fazer conexões entre conteúdos é parte do Conhecimento Horizontal do Conteúdo, indispensável ao professor para a sua prática.

A prova é, sem dúvida alguma, uma maneira de familiarizar os alunos com a forma pela qual a matemática valida os seus resultados, com a linguagem para comunicar esses resultados e com o processo de validação.

Ball, Thames e Phelps (2008) destacam o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, que leva em consideração que a compreensão da Matemática desses estudantes, está relacionada à experiência, o que permite ao professor prever e interpretar erros e buscar estratégias para sua superação.

Quanto ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, Ball, Thames e Phelps (2008) referem-se ao fato de que o trabalho da docência requer do professor a seleção, organização e elaboração de atividades. Esse conhecimento envolve uma análise das vantagens e desvantagens de abordagens e representações e de diferentes métodos e procedimentos.

Para completar o Conhecimento necessário ao professor para o ensino, Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo, que é necessário ao professor para ajudá-lo a fazer as articulações do conteúdo ensinado com outros pertencentes ao currículo de anos anteriores e posteriores, bem como o conteúdo estudado simultaneamente em outras disciplinas. Inclui-se, nessa categoria, conhecimento das diretrizes curriculares e recomendações curriculares para a introdução e desenvolvimento de conteúdo.

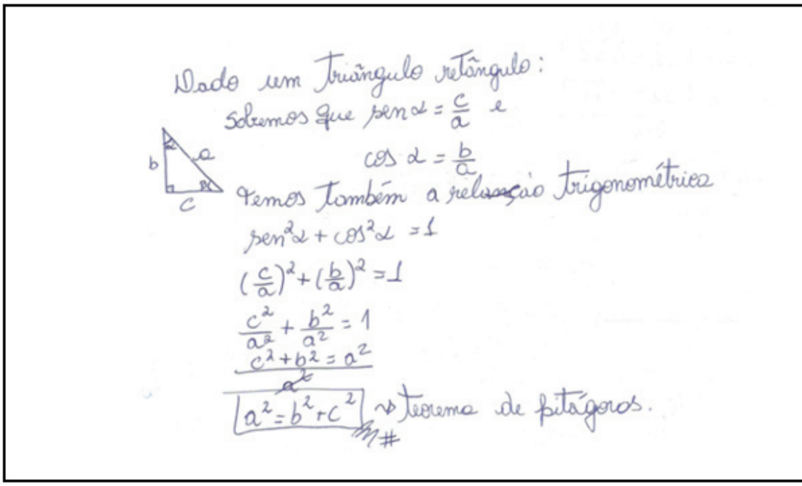
No que se refere ao Teorema de Pitágoras, o professor precisa dar ênfase não apenas à resolução de problemas que envolvem diretamente essa relação, mas também propostas que favoreçam o estudo futuro de temas como trigonometria e geometria analítica.

DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Sobre os Conhecimentos dos Licenciandos em Relação ao Teorema de Pitágoras

Para análise dos conhecimentos dos professores sobre provas presentes na Educação Básica, propusemos, dentro outras, que enunciassem e apresentassem uma prova para o Teorema de Pitágoras, além de indicarem estratégias para o ensino desse teorema.

Em suas tentativas de provar o Teorema de Pitágoras, os licenciandos apresentaram verificações empíricas, generalizações a partir de casos particulares. Porém, a prática mais comum foi erroneamente o uso da tese como argumento. O que pode ser observado nos protocolos que seguem.



Dado um Triângulo retângulo:

Sabemos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ e

$\cos\alpha = \frac{b}{a}$

Temos também a relação trigonométrica

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

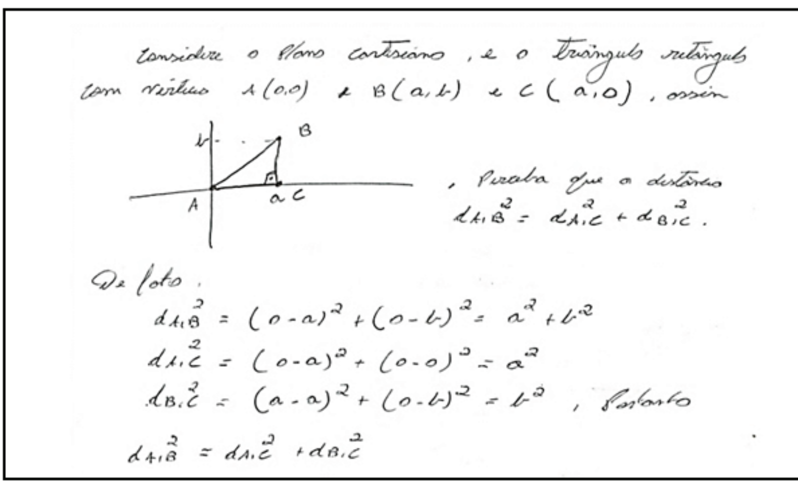
$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1$

$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1$

$\frac{c^2+b^2=a^2}{\cancel{a^2}}$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ → teorema de pitágoras.

Figura 1. Protocolo Lic. (F).



Considere o plano cartesiano, e o triângulo retângulo com vértices $A(0,0)$ e $B(a,b)$ e $C(a,0)$, assim

, Prova que a distância $d^2_{A,B} = d^2_{A,C} + d^2_{B,C}$.

De fato.

$d^2_{A,B} = (0-a)^2 + (0-b)^2 = a^2 + b^2$

$d^2_{A,C} = (0-a)^2 + (0-0)^2 = a^2$

$d^2_{B,C} = (a-a)^2 + (0-b)^2 = b^2$, Portanto

$d^2_{A,B} = d^2_{A,C} + d^2_{B,C}$

Figura 2. Protocolo Lic. (G).

O licenciando (F) utilizou a identidade trigonométrica e o licenciando (G) a fórmula da distância. Ambos usaram variação ou aplicação do Teorema de Pitágoras no corpo da prova, ou seja, fizeram uso da tese para "provar" o resultado. Porém, é possível que a falta de conhecimento por parte dos licenciandos estava em não saberem que essas fórmulas são decorrentes do Teorema de Pitágoras e não por acreditarem que pudessem usar a tese para provar o teorema.

Apesar das dificuldades apresentadas pelos licenciandos na construção dessa prova, estes foram unânimes em defender a necessidade de provar teoremas na Educação Básica, sob a justificativa de que desenvolvem o raciocínio lógico, favorecendo a compreensão dos conteúdos, a interpretação de situações-problema e a busca de estratégias para resolução. As falas a seguir confirmam nossa afirmação. Entendemos que o significado de demonstração para os licenciandos é o mais próximo do que chamamos de prova formal.

> Então, o fato de discutir demonstrações na sala de aula é importante, pois o fato de colocar fórmulas e fórmulas para eles, em minha opinião não é um ensino com um aprendizado significativo. A apresentação das demonstrações no ensino básico é importante para o entendimento do aluno, pois na maioria dos casos descreve a resolução dos problemas. (Lic. G)
>
> Discutiria mostrando primeiro a importância e utilidade [das provas]. É importante saber de onde as coisas saem e porque funcionam de forma tão coerente. Demonstrações também ajudam a desenvolver o raciocínio lógico dos alunos. (Lic. I)

A partir da análise dos dados da investigação diagnóstica, reafirmamos a nossa escolha de elaborarmos uma sequência utilizando o Teorema de Pitágoras. A princípio, havíamos pensado em uma sequência utilizando esse tema, pelo fato de ser um teorema sugerido pelos currículos prescritos e presente em todos os livros didáticos do 8º e/ou 9º ano do Ensino Fundamental. Além disso, é um teorema que tem muitas aplicações em diversos contextos, os professores reconhecem a sua importância e todos os licenciandos o estudaram na Educação Básica e o aplicam ao longo do curso de Licenciatura em Matemática.

Seleção, Organização e Elaboração das Situações de Aprendizagem sobre o Teorema de Pitágoras para o Processo Formativo

Para organização, elaboração e desenvolvimento das situações de aprendizagem, consideramos o pressuposto defendido por Pietropaolo (2005): o professor, em dado momento de sua formação, deve vivenciar as mesmas situações que vai propor para os seus alunos, incluindo situações que sigam a sequência: “verificações empíricas” => “justificativas semiformais” => “provas rigorosas”, no intuito de elaborarem atividades que favoreçam esse caminho, quando julgarem adequado. No entanto, também concordamos com esse pesquisador que esse caminho não é necessariamente linear; no caso de um aluno que já tenha vivenciado demonstrações mais formais, não significa que, para um novo conteúdo, as verificações empíricas não sejam mais necessárias. Ou seja, esse caminho não constitui estágios de aprendizagem dos alunos. É possível, ou melhor, é desejável, que, em alguns momentos, haja sincronicidade na proposição de atividades mais empíricas e formais.

Por exemplo, na Situação de Aprendizagem elaborada para o estudo das Equações Diofantinas, não consideramos adequado incluir prova rigorosa para alunos do Ensino Fundamental; porém, na sequência envolvendo o Teorema de Pitágoras, sugerimos aos futuros professores uma sequência que leve em conta a hierarquia discutida por Pietropaolo (2005) e recomendamos que seja feita em outros conteúdos, quando possível.

O nosso objetivo foi mostrar e discutir, com esse grupo de estudantes, um caminho para o ensino do Teorema de Pitágoras que envolvesse atividades que favoreçam a construção de uma prova formal. Partimos do pressuposto que esse caminho, que inclui experimentações, levantamento de conjecturas, argumentações, provas empíricas até chegar à prova formal, amplia a imagem conceitual dos licenciandos a respeito do ensino das relações métricas do triângulo retângulo. Esse caminho ampliaria a base de conhecimentos do futuro professor para o ensino, sobretudo o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), segundo Ball, Thames e Phelps (2008).

Para elaborarmos o nosso design, nos baseamos, em relação às concepções de provas de alunos ou professores, nos trabalhos de Healy e Hoyles (2000), Dreyfus (2000) e Knuth (2002). Relativamente ao papel das provas na formação de professores de Matemática, utilizamos os trabalhos de Garnica (1995) e Pietropaolo (2005)

A sequência desenvolvida proporcionou ao grupo discussões abrangendo incomensurabilidade de segmentos, a necessidade de justificar matematicamente verificações empíricas ou mostrações "concretas", baseadas em figuras, até o desenvolvimento formal de uma prova do Teorema de Pitágoras.

A Atividade 1 foi composta por duas partes. A primeira delas trazia uma abordagem histórica e levava o aluno a construir um esquadro egípcio com barbante, utilizando a terna pitagórica 3, 4 e 5. A segunda propunha a tarefa de verificação da relação de Pitágoras por meio da subdivisão dos quadrados construídos a partir dos catetos em quadrados unitários e o recobrimento do quadrado construído sobre a hipotenusa por esses quadrados unitários. Isso foi feito também com a terna pitagórica 3, 4 e 5 e visava compreender a relação das áreas.

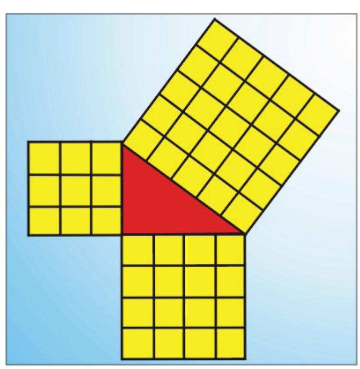


Figura 3. Atividade 1: Teorema de Pitágoras.

Essa atividade foi escolhida porque é uma atividade encontrada frequentemente nos livros didáticos e, se proposta isoladamente, pode induzir o aluno à formação de conceitos errados, como a forte crença de que sempre é possível encontrar uma unidade comum que caiba um número inteiro de vezes nos lados de um triângulo, ou seja, que os lados dos triângulos retângulos (segmentos) são dois a dois comensuráveis.

O objetivo dessa atividade foi promover a discussão sobre a possibilidade de realizar esse procedimento para qualquer triângulo retângulo cujas medidas dos catetos possam ser expressas por números inteiros. A partir dessa discussão, vimos a necessidade de propor uma atividade na qual fosse possível verificar a validade da relação de Pitágoras para qualquer triângulo retângulo. Para tanto, propusemos como Atividade 2 o jogo pitagórico.

O jogo consiste em subdividir os quadrados construídos sobre os catetos em peças, de maneira que sempre seja possível recobrir o quadrado construído sobre a hipotenusa com essas peças, independente da medida dos lados do triângulo.

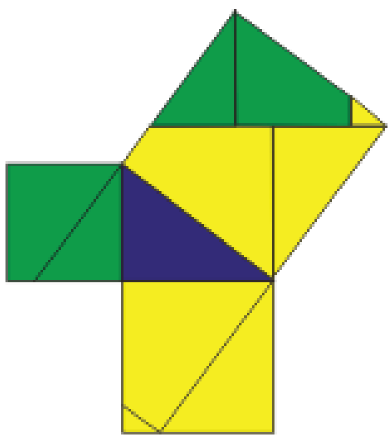


Figura 4. Atividade 2: Teorema de Pitágoras – Recobrimento do quadrado formado sobre a hipotenusa com as peças dos quadrados construídos sobre os catetos.

Após encaixar as peças no quadrado construído sobre a hipotenusa, o aluno teria que provar que essa construção é válida. Esperávamos que os licenciandos indicassem genericamente as medidas de todos os ângulos. Depois disso, relacionassem os ângulos complementares nas peças construídas sobre os quadrados dos catetos e provassem que essas peças recobriam perfeitamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Nessa atividade, deve-se discutir as vantagens da substituição da atividade 1, proposta anteriormente, por esta; analisar o grau de complexidade e generalização da prova envolvida; a necessidade de provar que as peças recobrem o quadrado ainda que acreditassem não haver dúvidas em relação a esse fato.

Como os licenciandos acreditavam ser desnecessário provar que as peças do quebra-cabeça da atividade 2 recobriam o quadrado formado sobre a hipotenusa, propusemos a atividade "Construindo retângulos" ou "64 = 65?" para desmistificar a ideia de que apenas a composição/decomposição de forma concreta de uma figura é suficiente para provar uma conjectura matemática envolvendo áreas.

A atividade "64=65?" consiste em fazer um recorte em um quadrado 8x8 de maneira a construir um novo "retângulo" com todas as peças recortadas cujos lados medem 5 e 13 unidades de medida. Se essa construção fosse possível, teríamos 64=65. Dessa forma, o aluno teria de provar que o que parece ser um retângulo, de fato não é.

Essa atividade teve por objetivo levar os licenciandos a refletirem sobre o papel da verificação empírica e do uso do material manipulável para apoio ao aluno na interpretação e compreensão do problema, levando-o a levantar conjecturas. Acreditamos ser importante propor atividades que permitam a verificação empírica e a manipulação de material concreto, mas de forma associada a elas deve ser promovida a discussão da necessidade de buscar argumentos matemáticos para validar ou não as conjecturas feitas por eles, apenas por meio da manipulação de figuras.

O roteiro de questões proposto aos licenciandos teve a finalidade de promover essa reflexão sobre os objetivos que a referida atividade pode desenvolver na Educação Básica.

Para finalizar, propusemos uma atividade cujo objetivo era chegar à prova formal, utilizando um material manipulável que pudesse favorecer, posteriormente, a construção da prova pelos alunos.

Utilizando papel, régua, esquadro, compasso e lápis de cor, os estudantes construiriam três triângulos retângulos quaisquer de maneira que sejam semelhantes entre si. A sobreposição das figuras contribui para que os estudantes possam reconhecer as relações existentes entre os lados. Feito isso, os estudantes são orientados a construir uma tabela com as relações métricas do triângulo retângulo, identificando, entre essas, a relação conhecida como Teorema de Pitágoras.

Para a realização das tarefas por nós propostas, os futuros professores deveriam: vivenciar as atividades em grupo como alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, refletir no interior de cada grupo sobre as potencialidades pedagógicas das atividades e possibilidades de serem implementadas em sala de aula, elaborar um relatório individual ao final de cada encontro, contendo suas reflexões, inclusive eventuais discordâncias em relação aos demais integrantes do grupo. Depois disso, era proposta pelos pesquisadores/formadores a socialização das discussões de cada grupo com os demais estudantes da turma, que, por sua vez, destacavam os consensos e possíveis divergências e sistematizavam as discussões. Esse processo permitiu coletar dados para a pesquisa através de áudios das discussões dos grupos, registros dos estudantes durante a realização das atividades e relatórios e diários de campo dos pesquisadores.

Cabe destacar que esses estudantes tinham pouca experiência da prática docente (apenas em atividades orientadas e oportunizadas pelo curso) e adotaram, quase sempre, uma postura de aprendizes frente aos temas discutidos, pois transpareceram uma preocupação maior em aprender o conteúdo do que refletir sobre como utilizá-lo em práticas futuras. Por esse motivo, resolvemos analisar os dados, agrupando as categorias de Ball, Thames e Phelps (2008) em pares, por entender que a análise seria mais rica de significado pela possível complementaridade entre os pares escolhidos. Essa opção pelo agrupamento que fizemos dependeu, evidentemente, de nosso olhar sobre os dados. É importante ressaltar que outros pesquisadores poderiam fazer agrupamentos diferentes do nosso, no caso de considerarem pertinente esse caminho.

Apresentamos a seguir os pares adotados: Conhecimento do Conteúdo Comum (CCK) e Conhecimento do Conteúdo Especializado (SCK); Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT); Conhecimento Horizontal do Conteúdo (HCK) e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC).

Conhecimento do Conteúdo Comum (CCK) e Conhecimento do Conteúdo Especializado (SCK)

Os licenciandos enunciaram corretamente o Teorema de Pitágoras, mostrando assim Conhecimento do Conteúdo Comum relativo a esse tema. Porém, quando solicitados a apresentar uma prova formal, quatro deles não conseguiram ao menos esboçar uma ideia. Com base nesses dados, confirmamos a nossa escolha em desenvolver situações de aprendizagem que favorecessem aos futuros professores ampliar o Conhecimento do Conteúdo Especializado sobre provas e, consequentemente, sobre esse teorema que inevitavelmente todos irão ensinar quando professores da Educação Básica.

A fala do licenciando (E), por exemplo, mostra que, apesar da prova do Teorema de Pitágoras estar presente nos currículos e nos livros didáticos, esse era um conhecimento que nem todos os licenciandos possuíam e que as situações de aprendizagem propostas no nosso estudo permitiram que eles avançassem sobre esse tema.

> É fato que não conhecia essas demonstrações (e vale ressaltar que se me perguntassem sobre alguma demonstração do Teorema de Pitágoras antes dessa disciplina, eu não saberia responder), mas, em geral, penso como é interessante o fato de que existam mais de 400 demonstrações para uma verdade matemática. (Lic. E)

Consideramos também que essa sequência poderia proporcionar aos futuros professores ampliar o Conhecimento do Conteúdo Especializado, no sentido de conhecer diferentes formas de provar o teorema, diferentes argumentos, para que possam fazer escolhas sobre a forma de abordar o conteúdo.

Os licenciandos (C) e (H), quando se referem às provas sugeridas em nossa sequência para o Teorema de Pitágoras, destacam a importância de conhecer várias abordagens de um mesmo conteúdo.

> Nota-se que todas as atividades trouxeram um conhecimento matemático novo, pois nos mostrou várias formas de demonstrar o teorema, usando material manipulável. (Lic. C)
>
> Essa semana foi muito produtiva porque obtive novos conhecimentos, conheci diferentes métodos de demonstração do Teorema de Pitágoras que eu não conhecia e que é muito importante para trabalhar com o Teorema de Pitágoras na Educação Básica para facilitar a aprendizagem dos alunos. (Lic. H)

Na fala do licenciando (H), percebe-se não só a visão de um estudante de Licenciatura em Matemática, com preocupação em aprender mais Matemática, mas a visão de um futuro professor, que precisa de conhecimento matemático para pensar a sua prática e fazer escolhas para o ensino.

Já nas falas do licenciando (J), surge a ideia de que, mesmo já trabalhando com uma atividade conhecida, podemos revisitá-la sob outro olhar e incluir outros argumentos. Em outro momento, ele aborda a ideia de experimentar, de fazer uma atividade anteriormente vista ser feita por outros.

> Eu já conhecia essa atividade [1], pois é a demonstração geométrica apresentada por diversos livros, mas adorei a parte do triângulo egípcio, foi algo novo para mim. (Lic. J)
>
> É bom ressaltar que esta atividade me oportunizou demonstrar o Teorema de Pitágoras, pois apesar de já ter visto outros fazendo essa demonstração, nunca parei para tentar. (Lic. J)

A finalidade da atividade 1, que inclui uma construção histórica de um triângulo retângulo feita pelos egípcios, não era, evidentemente, apenas motivar os estudantes, mas promover uma discussão sobre as possibilidades da História da Matemática como um contexto para ensinar e aprender conceitos.

Além disso, os licenciandos, ao vivenciarem as situações de aprendizagem como alunos, puderam ampliar suas reflexões sobre sua futura prática docente, como mostra o licenciando (E), durante discussões com o seu grupo sobre os objetivos de algumas atividades.

> Essa atividade tem como propósito despertar no aluno o interesse e o prazer pela matemática, pois os próprios alunos verão propriedades até então vistas no plano da lousa se estenderem para a vida real. (Lic. E)

Assim, pensamos que a vivência e a reflexão sobre as atividades da Situação de Aprendizagem favoreceram a ampliação da base de conhecimentos para o ensino – Conhecimento do Conteúdo Comum e Conhecimento do Conteúdo Especializado –, domínios de Ball, Thames e Phelps (2008).

No entanto, é fundamental destacar que os conhecimentos sobre a incomensurabilidade de segmentos dos futuros professores não foram suficientemente ampliados por todos. Reiteramos que promovemos uma reflexão sobre essa questão, ainda que não fosse o foco desta pesquisa, pois identificamos que todos os sujeitos de nossa pesquisa não possuíam conceitos fundamentais relacionados ao Teorema de Pitágoras, como o significado de incomensurabilidade de segmentos.

Talvez por esse motivo, ao discutirmos a atividade 1, os licenciandos a consideraram como uma excelente atividade para iniciar o ensino do Teorema de Pitágoras. Contudo, essa avaliação desses estudantes não é correta, pois é válida apenas para casos particulares e não para os triângulos cujos catetos são incomensuráveis relativos à hipotenusa, ou seja, esses estudantes não levaram em consideração a questão da incomensurabilidade dos segmentos. A fala a seguir mostra que a questão da incomensurabilidade não foi sequer cogitada, porque os licenciandos não possuíam esse Conhecimento antes do nosso processo de Formação.

> Do ponto de vista matemático, o questionamento feito sobre a validade da atividade para qualquer valor real nos lados do triângulo mostrou conceitos que eu não conhecia. (Lic. E)

A incomensurabilidade de segmentos é um conteúdo indicado para ser desenvolvido na Educação Básica segundo currículos como PCN (1998). Por esse motivo deveria fazer parte do Conhecimento Comum do professor.

Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT)

Em relação ao conhecimento pedagógico para o ensino, discutiremos nesse item o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino junto com o Conhecimento do Conteúdo e dos

Estudantes, por entendemos que essas duas categorias, neste caso, estão intimamente relacionadas.

Nas reflexões feitas pelos licenciandos sobre as situações de aprendizagem, constatamos a valorização de atividades nas quais o aluno possa levantar conjecturas e construir o seu próprio conhecimento.

> Do ponto de vista pedagógico [essa atividade] me forneceu uma nova ferramenta que faça com que os alunos construam seu próprio conhecimento. (Lic. D)
>
> [...] é observado nessa atividade, um caráter viabilizador em fornecer oportunidades de descobertas aos alunos, sem que alguma coisa seja imposta sem o tratamento do material. (Lic. E)

Criar conhecimento é um dos aspectos identificados por Knuth (2002) ao investigar o papel que a prova pode cumprir quando incorporada às aulas de Matemática. Essa construção do conhecimento pode se dar de diferentes modos. Os licenciandos acreditam, por exemplo, que o uso do material manipulável pode favorecer o aprendizado e ser utilizado mesmo em atividades que tenham por objetivo construir uma prova formal. Destacamos as falas que se seguem, referentes à elaboração de uma prova formal a partir da atividade da construção dos três triângulos retângulos semelhantes.

> Essa atividade é um bom ponto de partida para demonstração formal, pois com o material fica mais fácil ver as relações existentes. (Lic. H)
>
> A atividade é bastante interessante para ser aplicada na Educação Básica, pois com ela os alunos poderão perceber mais facilmente a semelhança entre triângulos, quando colocarem um (triângulo) sobreposto ao outro. (Lic. A)
>
> Tais atividades ainda podem levar os alunos a refletirem sobre o fazer matemática e a questão da natureza do conhecimento matemático. (Lic. B)

O licenciando (F), por exemplo, faz uma análise das vantagens de iniciar a prova formal do Teorema de Pitágoras pela atividade em que os alunos podem sobrepor triângulos retângulos para observar melhor a semelhança e deduzir as relações existentes.

> [...] fiz uma reflexão sobre essa atividade e pude notar que ela pode ser utilizada para dar início a demonstração formal do Teorema de Pitágoras. Pois, ela pode possibilitar ao aluno uma melhor compreensão sobre o teorema, além de aguçar o conhecimento geométrico do mesmo. (Lic. F)

Os licenciandos puderam avançar no sentido de avaliar vantagens de usar determinada atividade, de fazer as escolhas para o ensino e justificá-las, como podemos ver nas falas que seguem.

> Este jogo [Atividade 2] nos trouxe algumas reflexões distintas da atividade anterior, após o término deste jogo eu não começaria a demonstração com a atividade anterior, eu começaria com esta, pois me pareceu mais completa, apesar de mais difícil também. (Lic. I)

Organizar a instrução, selecionar e elaborar atividades, construir material didático, construir uma sequência que favoreça a aprendizagem de um tema, fazem parte dos conhecimentos necessários ao professor para o ensino. Pudemos observar que os licenciandos mostraram-se favoráveis à utilização de provas com menos rigor, a fim de promover o entendimento do teorema, para só depois introduzir a prova formal.

As situações propostas fizeram com que os alunos discutissem a viabilidade de aplicar essas atividades para alunos da Educação Básica, levando em conta a necessidade de ir além das verificações empíricas, de argumentar de maneira a promover a generalização. Quando o licenciando (D) analisa a atividade “64=65?”, ele destaca que

> [...] esta atividade nos oferece um argumento, ou ferramenta para mostrar aos alunos que não podemos confiar somente no material manipulável. (Lic. D)

Já o estudante (C), além de analisar o grau de generalização das provas, mostra-se preocupado com o impacto que uma atividade, que não leve em conta a discussão de para quais casos é válida, pode causar nos estudantes na formação de conceitos errados sobre um tema.

> [...] podemos notar que as atividades feitas até então nos mostram que muitas vezes nós fazemos nossas conclusões sem mesmo olhar se realmente estão sendo válidas para qualquer caso. Isso nos faz abrir os olhos e prestar mais atenção no que fazemos e planejamos para nossos alunos. (Lic. C)

Consideramos que, neste caso, existe uma forte relação entre o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, mesmo porque, para organizar a instrução, o professor deve ter um profundo conhecimento sobre o público para o qual se destina a sua intervenção. Em muitas falas, há intersecção entre essas categorias. Porém, por se tratar de licenciandos, as reflexões no que dizem respeito aos alunos, não trazem a carga da experiência em sala de aula, mas as poucas impressões em trabalhos desenvolvidos na escola em atividades de iniciação à docência, quer seja no estágio supervisionado, quer em projetos destinados a esse fim.

Além disso, por conta das suas vivências como estudantes, os licenciandos trazem consigo uma imagem do que futuramente encontrarão na escola, quando professores da Educação Básica, e conjecturam as dificuldades a serem enfrentadas pelos alunos, tomando como base nessas suas experiências. E é sob esse ponto de vista que analisam, por exemplo, as prováveis dificuldades que os alunos terão ao desenvolver certa atividade ou, até mesmo, a possibilidade de aplicá-la, como vemos nas falas que seguem.

> Para a Educação Básica a atividade "relações métricas nos triângulos retângulos" é muito importante antes de fazer a demonstração do teorema, pois com ela os alunos entenderão melhor a noção de semelhança entre triângulos retângulos... Pois, por mais que a demonstração seja simples, exige uma noção de semelhança que os alunos podem não ter. (Lic. A)

No entanto, consideramos que a sequência favoreceu a discussão do grupo sobre a prática docente, sobre a ação de planejar o ensino, sobre as possibilidades de aplicar uma atividade para alunos no Ensino Fundamental, ampliando assim o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e, apesar de inserido no contexto de formação inicial, também o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes.

Conhecimento Horizontal do Conteúdo Comum (HCK) e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC)

Quando propusemos atividades para identificar e ampliar os conhecimentos dos futuros professores a respeito de provas e demonstrações, tínhamos também como objetivo discutir o currículo e as relações entre os conteúdos, tanto do ponto de vista dos documentos oficiais (KCC) como do ponto de vista do professor e do tratamento que é dado ao currículo no contexto da sala de aula (HCK).

O licenciando (D) destaca entre os objetivos da atividade a reflexão sobre a prova como um tema transversal, que permeia todo o ensino de matemática e é necessário para melhor desenvolver outras atividades, seja na matemática, seja em outras disciplinas ou na vida cotidiana. Ele também traz para a discussão um aspecto também identificado por Knuth (2002), o desenvolvimento de pensamento lógico.

> Que nem sempre o que "parece ser, é", temos que investigar e se possível verificar que a sentença é verdadeira. Com isso, o aluno poderá reforçar seu

> aspecto investigativo e desenvolver seu raciocínio lógico. [...] não podermos esquecer que fortalece a visão geométrica do aluno e a organização das ideias numa demonstração. (Lic. D)

A atividade “64=65?” foi útil também para discutirmos o uso de figuras (material manipulável) para apoio a uma prova. É uma atividade que não está vinculada a um único conteúdo, mas à ideia de formalização, do uso adequado da linguagem e das regras próprias da Matemática.

> Com a atividade podemos atingir alguns objetivos, como... compreender que só a figura não é bastante para fazermos todos os tipos de afirmação que podemos obter observando-a. (Lic. A)

O nosso intuito com essa atividade não foi a de não recomendar o uso de material manipulável ou qualquer outra atividade que utilizasse a verificação empírica, visto que esse tipo de atividade estimula o levantamento de conjecturas e a busca por conclusões a partir da observação. Defendemos o uso dessas atividades, mas tínhamos como propósito que o licenciando refletisse sobre as possibilidades de avançar a partir delas. E esse objetivo foi alcançado, como podemos observar nas falas que seguem:

> Mostrar para eles que nem tudo que parece é, porém após essa ideia indutiva de geometria, introduziremos a importância de uma demonstração formal. (Lic. I)
>
> Tais atividades ainda podem levar os alunos a refletirem sobre o fazer Matemática e a questão da natureza do conhecimento matemático, isto é, porque muitas vezes nossos sentidos, como a visão, por exemplo, não bastam para afirmar verdades matemáticas, é necessário que haja uma prova algébrica. (Lic. B)

Consideramos que a atividade “64=65?”, apesar de ser uma atividade bastante conhecida, possibilita, nesse contexto, uma rica discussão no que se refere ao planejamento de uma sequência que favoreça a construção do conhecimento pelo aluno como, também, às limitações e potencialidades de uma atividade desse tipo, que pode despertar nos alunos a necessidade de avançar em seus argumentos para convencer a si e aos colegas.

Os licenciandos (C) e (D), como vemos nos protocolos que seguem, relacionam outros conteúdos ao Teorema de Pitágoras e indicam como objetivo o desenvolvimento do pensamento geométrico, que é defendido nos currículos e documentos oficiais como uma forma de privilegiar a observação e a compreensão de relações e a resolução de problemas.

> A atividade tem por objetivo demonstrar o Teorema de Pitágoras, mas para chegar nesse objetivo final caímos em outros tantos, como desenvolver o olhar do aluno para a visão geométrica... (Lic. C)
>
> [...] comprovar a veracidade da relação de Pitágoras além do que eles terão que construir e reconstruir seus conceitos, reforçarão seus conceitos sobre ângulos e áreas, além de desenvolverem sua visão geométrica. (Lic. D)

Por outro lado, apesar de os licenciandos relacionarem as provas do Teorema de Pitágoras com outros conteúdos, a ideia de pré-requisito ainda está muito presente no discurso, tanto quanto a pouca preocupação em destacar pontos-chave de um determinado conteúdo, com vistas a favorecer a aprendizagem de conteúdos posteriores. As falas dos licenciandos (F) e (I) justificam a nossa análise.

> Considero assim essa atividade potencialmente rica, para ser trabalhada na educação básica. Pois ela se mostra bastante eficaz na demonstração do teorema. Porém, é necessário que o aluno já tenha alguns pré-requisitos sobre assuntos, como: semelhança de triângulos, relações de congruências (lado, ângulo). Para que eles realmente compreendam o que estão realizando. (Lic. F)
>
> Assim eles recordam algumas propriedades de equivalência de área, congruência de ângulos, assim como a relação de ângulos complementares e suplementares, e ao mesmo tempo provam um resultado importantíssimo na Matemática. (Lic. I)

No entanto, o licenciando (A) analisa a atividade "sobreposição de triângulos", cujo objetivo é elencar as relações existentes nos triângulos semelhantes, de uma maneira diferente, antevendo a prova formal e dando ênfase a aspectos que favorecerão a compreensão do aluno em uma atividade que ainda está por vir.

> A atividade é um bom ponto de partida, pois quando o professor for fazer a demonstração formal do Teorema de Pitágoras no quadro os alunos compreenderão mais rápido as semelhanças dos triângulos. (Lic. A)

O que ensinar e como ensinar ainda está muito associado aos pré-requisitos que julgam necessários. Parece-nos que os licenciandos não concebem a ideia de procurar estratégias para ensinar os alunos sem esses conhecimentos.

CONCLUSÕES

Os dados coletados na fase diagnóstica mostram que os licenciandos acreditam ser importante trabalhar com provas do Teorema de Pitágoras em aulas da Educação Básica, embora muitos deles não tenham conseguido esboçar uma prova sequer para esse teorema. Outros, na tentativa de apresentar uma prova para o teorema, fizeram uso da tese ao longo da construção, o que revela erro de concepção sobre o que significa uma prova.

As situações de aprendizagem que foram aplicadas ao longo de nossa formação, e constantemente reelaboradas, tinham a intencionalidade de que o grupo avançasse em relação às dificuldades observadas na fase diagnóstica. O conjunto de dados obtidos na primeira fase, juntamente com as reflexões dos licenciandos acerca das atividades que compuseram as situações de aprendizagem, nos possibilitou responder a segunda questão de pesquisa.

As discussões provocadas durante o desenvolvimento das situações de aprendizagem ampliaram a base de conhecimentos necessários para o professor de Matemática exercer a docência e a ressignificação do trabalho com provas, tendo em vista a mudança de concepção do significado de provas.

Foi possível constatar certa cautela e temor, por parte dos estudantes, para indicar atividades para alunos do Ensino Fundamental. Para a maior parte dos licenciandos, se mantém a ideia de que nem todos os alunos seriam capazes de desenvolver habilidades relativas às provas, utilizando linguagens formais. Porém, com o significado mais alargado de prova, os futuros professores passaram a acreditar que as provas mais empíricas e menos formais são necessárias para que os alunos saibam o porquê de uma afirmação ser verdadeira, ou seja, defender a inclusão das provas que têm a função de explicar.

Após a intervenção, no que diz respeito aos conhecimentos necessários ao professor para ensinar conteúdos por meio de atividades que exigem provas, é importante registrar que as nossas sequências e as discussões fomentadas contribuíram para ampliar não apenas o conhecimento do conteúdo e do currículo, mas também a compreensão de estratégias que podem favorecer a construção de conceitos e atitudes a partir da inclusão de provas em aulas de Matemática no Ensino Básico.

Assim, os futuros professores passaram a adotar um sentido mais amplo para provas nas aulas de Matemática da Educação Básica; para eles não caberia a simples reprodução – pelo aluno ou professor – das provas presentes nos livros, mas também o fazer matemática, incluindo, dessa forma, experimentações, argumentações, conjecturas e, quando for o caso, provas rigorosas.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Esse artigo é um recorte de pesquisa de doutoramento de M.E.A. Para a realização desse trabalho contou com a orientação de R.C.P (orientador de doutorado) e A.B.P (orientador de estágio sanduíche no exterior). Todos os autores contribuíram para análise dos dados, discussão dos resultados e escrita da versão final do manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, M.E.A., mediante solicitação razoável por e-mail.

REFERÊNCIAS

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching:* What makes it special? Journal of *Teacher* Education, 59(5), p.389-407.

Brasil (1996). *Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996*. Das diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União. Brasília.

Brasil (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)*. Brasília: MEC.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), p.396-428.

Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of Secondary School Mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 5(1), p.61-88.

Mateus, M. E. A. (2015). *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica.* 267f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo.

Pietropaolo, R. C. (2005). *(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.* 249f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SBEM (2003). Sociedade Brasileira de Educação Matemática. *Subsídios para a discussão de propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática: uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*. São Paulo: SBEM.