ACTA SCIENTIAE

CC BY

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5383

Investigando Relações entre os Raciocínios Combinatório e Probabilístico na Educação de Jovens e Adultos

Ewellen Tenorio de Lima [a]
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba [b]

[a] Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, Brasil
[b] Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro de Educação, Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino, Recife, PE, Brasil

Recebido para publicação em 28 out. 2019. Aceito após revisão em 3 abr. 2020.
Editor: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

São apresentados os principais achados de um estudo de dissertação que investigou as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode proporcionar ao raciocínio probabilístico e vice-versa. À luz do aporte teórico adotado (a Teoria dos Campos Conceituais), foram consideradas as diferentes situações que atribuem sentido à Combinatória e à Probabilidade, seus respectivos invariantes e as representações simbólicas/estratégias utilizadas na resolução dos problemas propostos, sendo as relações que se estabelecem entre os raciocínios combinatório e probabilístico o foco central do estudo. Os dados foram coletados com 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos, cursando diferentes momentos da Educação Básica. Observou-se a influência da escolarização, dos tipos de problema e da ordem de apresentação destes nos desempenhos apresentados. Foram percebidas contribuições aos raciocínios investigados que surgem a partir da resolução de problemas combinatórios e probabilísticos. Desse modo, recomenda-se que o ensino dessas áreas do conhecimento seja realizado de maneira articulada.

Palavras-chave: Combinatória; Probabilidade; Educação de Jovens e Adultos.

Investigating Relationships Between Combinatorial and Probabilistic Reasonings in Youth and Adult Education

ABSTRACT

We present the main findings of a master's dissertation study that investigated the contributions that the exploration of combinatorial problems can bring to probabilistic reasoning and vice versa. In the light of the theoretical reference adopted (the theory of conceptual fields), we considered the different situations that give meaning to combinatorics and probability, their invariants and the symbolic representations/strategies used in the solving of the problems proposed. The relations established between combinatorial and probabilistic reasoning were the focus of the study. Data was collected with 24 students of Youth and Adult Education who were attending

Autor correspondente: Ewellen Tenorio de Lima. Email: ewellentlima@gmail.com

different phases of basic education. The influence of schooling, of the types of problems and of the order of presentation of these problems in the performance of the students was also analysed. Contributions to the investigated reasoning that emerged from the resolution of combinatorial and probabilistic problems were perceived. Therefore, the teaching of these areas of knowledge in an articulated way is recommended.

Keywords: Combinatorics; Probability; Youth and Adult Education.

INTRODUÇÃO

É importante que o ensino da Matemática vise mais do que a simples apropriação de conceitos variados, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e hipotético-dedutivo. Isso é primordial para que estudantes de diferentes etapas e modalidades de ensino sejam capazes de aplicar seus conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas – inclusive aqueles que demandam o levantamento de possibilidades.

O raciocínio combinatório e o probabilístico são modos de pensar constituintes do raciocínio lógico-matemático que provêm ferramentas para que se relacionem conjuntos de elementos, se pense sobre proporções e se compreenda eventos aleatórios. Dada a importância dos mesmos para a compreensão de problemas (cotidianos ou escolarizados), diferentes autores defendem que se trabalhe com conceitos referentes à Combinatória e à Probabilidade de forma progressiva, ao longo de toda a Educação Básica, tendo em vista o pleno desenvolvimento de tais raciocínios (Fischbein, 1975, Borba, 2016, Campos & Carvalho, 2016).

À luz da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986, 1996), tem-se que conceitos relativos à Combinatória e à Probabilidade estão inseridos em um mesmo campo conceitual – o das estruturas multiplicativas – e, dado que um campo conceitual é um conjunto heterogêneo de problemas, situações e conceitos interconectados entre si, é imprescindível que sejam exploradas as relações existentes entre tais conceitos. Com base em tal aporte teórico, no presente estudo buscou-se investigar as contribuições que a exploração de problemas referentes à Combinatória pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa.

Optou-se por realizar esse estudo com estudantes da EJA dada a incipiência de estudos realizados com adultos e a ampla bagagem possuída pelos mesmos. Os aprendizados desses estudantes advêm de experiências cotidianas e sociais que podem servir de ponto de partida para o desenvolvimento de seus conhecimentos matemáticos na escola.

Os aportes teóricos adotados, os objetivos e o método utilizado, bem como os principais resultados obtidos, são apresentados nas seções a seguir.

O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Gèrard Vergnaud adota uma abordagem desenvolvimentista do conhecimento, voltando seu olhar não apenas para a construção do conhecimento no geral, mas, também, para o processo de conceitualização por parte dos sujeitos e, assim, a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986, 1996) atribui um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos. Dessa maneira, tal teoria dá suporte a um olhar aprofundado voltado aos conceitos e às articulações entre os mesmos – articulações que levam à constituição dos diferentes campos conceituais, definidos pelo teórico como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (Vergnaud, 1986, p. 10).

Vergnaud (1986) afirma, ainda, que "um conceito pode, com efeito, ser definido como um tripé de três conjuntos" (p. 9). Os três conjuntos são: *situações* (que dão sentido ao conceito – S), *invariantes* (propriedades e relações constantes nas diversas situações – e I) *representações simbólicas* (utilizadas para representar os conceitos – R).

Em especial, o campo conceitual das estruturas multiplicativas diz respeito ao "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (Vergnaud, 1996, p. 167). Engloba, portanto, conceitos como o de número racional, proporcionalidade, funções e, também, conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade.

Dado o posto, o presente estudo voltou seu olhar ao campo das estruturas multiplicativas, especialmente para a Combinatória e a Probabilidade. Buscou-se investigar a compreensão dos *invariantes* relacionados às diferentes *situações* que dão sentido aos conceitos investigados e as *representações simbólicas* utilizadas pelos participantes ao resolverem os problemas propostos.

São apresentados, na próxima seção, os referenciais adotados no que diz respeito à Combinatória e à Probabilidade e às *situações* que atribuem sentido aos conceitos relacionados a tais áreas da Matemática (e seus respectivos *invariantes*). À luz dos aportes teóricos utilizados, na análise de dados foram levadas em consideração, também, as *representações simbólicas* utilizadas durante a resolução dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos.

COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE E SUAS RELAÇÕES

A Análise Combinatória[1] é definida por Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) como "a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" (p. 1). Esses autores destacam os dois tipos de problema mais frequentes no estudo da mesma, relacionados a "1. demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas" (p. 2).

[1] Termo considerado sinônimo de Combinatória no presente estudo.

A Combinatória estuda, portanto, os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de certas transformações na estrutura da composição dos elementos dos mesmos. O uso de conhecimentos combinatórios na resolução de problemas de tal natureza faz, assim, com que não seja necessário listar ou enumerar todos os elementos que formam um conjunto para que se determine o número total de elementos que o compõe.

No desenvolvimento do presente trabalho, foi adotada a classificação das *situações* que atribuem sentido, especialmente, à Combinatória, proposta por Pessoa e Borba (2009) – que integra quatro tipos de problemas combinatórios numa mesma categorização (*produto cartesiano, combinação, permutação* e *arranjo*). Tais problemas diferenciam-se entre si em função da natureza dos seus *invariantes de ordem* e *de escolha* (Borba, 2016).

Os problemas categorizados como *produto cartesiano* dizem respeito ao trabalho com mais de um conjunto, nos quais a ordem dos elementos não implica em possibilidades distintas. Por sua vez, os problemas de *combinação, arranjo* e *permutação* dizem respeito a situações nas quais a escolha acontece dentro de um mesmo conjunto, de forma que nas situações de *arranjo* a mudança de ordem dos elementos constitui novas possibilidades, nas de *combinação* essa mudança não forma novas possibilidades e nos problemas de *permutação* todos os elementos do conjunto são utilizados e as diferentes possibilidades a serem exploradas são construídas a partir da modificação das posições de seus elementos.

No que diz respeito à Probabilidade, Morgado *et al.* (1991) a definem como "o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios" (p. 119). O termo 'probabilidade' possui usos variados dentro e fora do contexto acadêmico. Segundo esses autores, "a definição de probabilidade como quociente do número de 'casos favoráveis' sobre o número de 'casos possíveis' foi a primeira definição formal de probabilidade" (p. 119) e é tal concepção (conhecida como *clássica* ou *laplaciana*) a adotada no presente estudo dado o foco central do mesmo, pois essa concepção é a mais fortemente relacionada à Combinatória visto que demanda o levantamento de todas as possibilidades que constituem o espaço amostral.

Segundo Bryant e Nunes (2012) a probabilidade é um conceito complexo que exige o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas para seu amplo entendimento, que são: 1) *compreender a noção de aleatoriedade*, 2) *formar e categorizar espaços amostrais*, 3) *comparar e quantificar probabilidades* e 4) *entender correlações* (relações entre eventos).

A primeira exigência cognitiva está relacionada à compreensão da natureza de eventos não determinísticos, isto é, eventos aleatórios. A aleatoriedade está muito presente no cotidiano e desempenha um papel importante, pois sua compreensão é imprescindível para a distinção de um evento ou sequência de eventos aleatória de uma não aleatória.

A segunda exigência cognitiva está intrinsecamente pautada no pensamento combinatório: a determinação do *espaço amostral* de dado problema é importante não só para o cálculo de probabilidades, mas é também essencial para entender a natureza da aleatoriedade, pois problemas probabilísticos “são sempre sobre um conjunto de eventos possíveis, mas incertos [...], nós precisamos saber precisamente quais são todos os eventos possíveis” (Bryant & Nunes, 2012, p. 29, tradução nossa).

Por sua vez, a terceira exigência cognitiva se refere à capacidade de *comparar e quantificar probabilidades*. Sendo a probabilidade uma quantidade intensiva, o cálculo da mesma exige a compreensão de seu caráter proporcional, pois “o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou de uma classe de eventos deve se basear na quantidade total do espaço amostral e não apenas na quantidade de eventos que nós queremos prever” (p. 46, tradução nossa).

Por fim, a quarta exigência cognitiva apontada diz respeito à identificação de eventos dependentes e independentes, visto que a associação entre dois eventos pode acontecer aleatoriamente ou representar uma relação genuína. Nesse caso, visto que “o objetivo de analisar a correlação entre dois eventos é determinar se eles co-ocorrem mais frequentemente do que se espera que ocorram ao acaso” (Bryant & Nunes, 2012, p. 67, tradução nossa), a habilidade mais importante é distinguir um evento aleatório de um não aleatório.

Além de investigar um e outro raciocínio, o presente estudo teve como foco as relações que se estabelecem entre eles. Tais relações são apontadas por diferentes autores (Piaget & Inhelder, 1951 *apud* Navarro-Pelayo, Batanero & Godino, 1996, Santos, 2015), que destacam que o raciocínio combinatório é essencial para a compreensão da ideia de Probabilidade, visto que permite ao sujeito compreender experimentos aleatórios, dos mais elementares aos mais elaborados. É válido destacar, ainda, que conceitos probabilísticos (dentre eles o conceito de espaço amostral) constituem uma importante ferramenta para a resolução de problemas combinatórios.

Defende-se, assim, um ensino que permita a articulação e comunicação de ideias entre tais áreas da Matemática (que envolvem o levantamento de possibilidades e o entendimento de situações não determinísticas). Neste sentido, o presente estudo surgiu do interesse em investigar essas relações a partir da resolução de problemas combinatórios e probabilísticos articulados por meio de revisitações, que consistiram na proposição de novos olhares aos problemas, a partir da exploração de diferentes aspectos dos mesmos.

MÉTODO

Participaram do estudo 24 estudantes adultos da EJA de escolas públicas localizadas no interior do agreste pernambucano[2]. Os mesmos pertenciam a três grupos distintos:

[2] Os dados aqui apresentados e discutidos foram coletados, com o devido consentimento das instituições envolvidas, junto a estudantes que se dispuseram a participar do estudo de maneira voluntária. A coleta se deu em contexto muito semelhante àquele que ocorre normalmente em sala de aula – resolução de problemas matemáticos com enunciados adequados ao público alvo – não tendo sido necessária a aprovação pelo Comitê de Ética. Destaca-se, contudo, que não é de responsabilidade da Acta Scientiae quaisquer consequências e/ou danos resultantes aos estudantes participantes da pesquisa que originou o presente trabalho.

Módulo II, Módulo IV e EJA Médio 3 (períodos de escolarização equivalentes, respectivamente, à conclusão dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, dos Anos Finais e do Ensino Médio).

A coleta de dados consistiu na condução de entrevistas clínicas individuais áudio gravadas, pois se buscou acompanhar de perto os raciocínios combinatório e probabilístico dos participantes do estudo. Tal método foi escolhido tendo-se em vista que "o raciocínio [...] tende a refletir-se nas ações, nas escolhas que um sujeito faz, por exemplo, ao resolver um problema" (Carraher, 1998, p. 1). Também se atendeu à sugestão de Lima (2010), que investigou a compreensão de estudantes da EJA sobre problemas multiplicativos (com foco na Combinatória), de que, em estudos posteriores realizados com estudantes dessa modalidade de ensino, o uso de métodos como a entrevista clínica piagetiana poderia proporcionar melhor compreensão dos processos utilizados pelos participantes ao resolver problemas propostos.

Durante as entrevistas clínicas, metade dos participantes de cada grupo resolveu um tipo de teste (Teste 1) e os demais resolveram um segundo tipo de teste (Teste 2). Ambos os instrumentos de coleta foram compostos por quatro problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *combinação, permutação* e *arranjo*) e 16 problemas probabilísticos (quatro referentes a cada uma das exigências cognitivas da probabilidade: *espaço amostral, correlação, aleatoriedade* e *comparação de probabilidades*). Os participantes dispuseram de lápis/caneta, papel, teste impresso e calculadora para resolver tais problemas, que foram iguais nos dois tipos de teste. Os testes diferenciaram-se entre si em função da ordem de apresentação dos problemas: no Teste 1 cada um dos problemas combinatórios foi revisitados sob o olhar da Probabilidade (a partir de problemas referentes às diferentes demandas cognitivas consideradas), enquanto no Teste 2 a ordem era inversa, isto é, os variados problemas probabilísticos foram apresentados primeiro e revisitados sob o olhar da Combinatória. Tal estrutura é ilustrada na Figura 1.

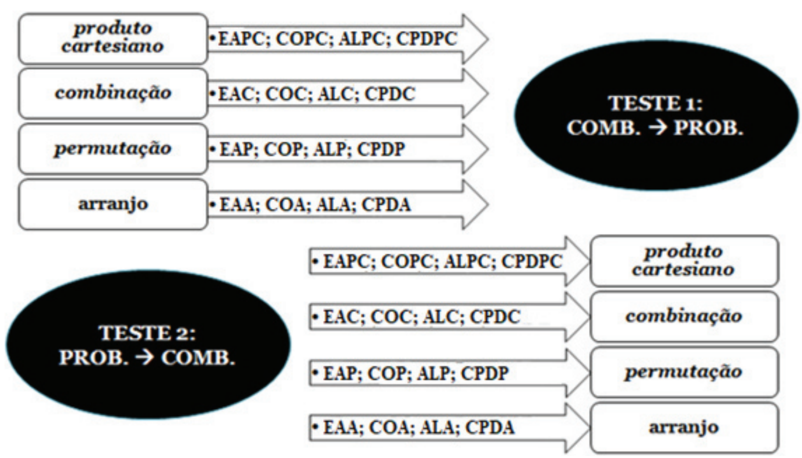

Figura 1. Estrutura dos instrumentos de coleta utilizados. (Lima, 2018).
EA: *espaço amostral*; CO: *correlação*; AL: *aleatoriedade*;
CPD: *comparação de probabilidades diferentes.*

Os problemas referentes às *situações* combinatórias consideradas no presente estudo possuem número de etapas de escolha e ordem de grandeza semelhantes: seus resultados estão entre 6 e 12 possibilidades. A elaboração de tais problemas levou em consideração a diversidade de níveis de escolarização dos participantes, visto que problemas com um número pequeno de possibilidades podem ser facilmente resolvidos a partir do uso de *representações simbólicas* e estratégias variadas – mesmo as mais simples/informais como a enumeração oral e a listagem não sistemática. Na Figura 2 são apresentados os problemas combinatórios propostos.

No que se refere aos problemas probabilísticos propostos, é apresentado, à título de exemplificação, o bloco de problemas que exploram a *construção de espaço amostral,* a *investigação de correlações,* a *compreensão de aleatoriedade* e a *comparação de probabilidades* referentes à *situação* combinatória de *produto cartesiano* (Figura 3). Os demais blocos de problemas probabilísticos (relacionados às *situações* combinatórias de *combinação*, *permutação* e *arranjo*) foram construídos de forma semelhante, utilizando-se do mesmo contexto dos problemas combinatórios apresentados anteriormente e ampliando a compreensão acerca dos mesmos.

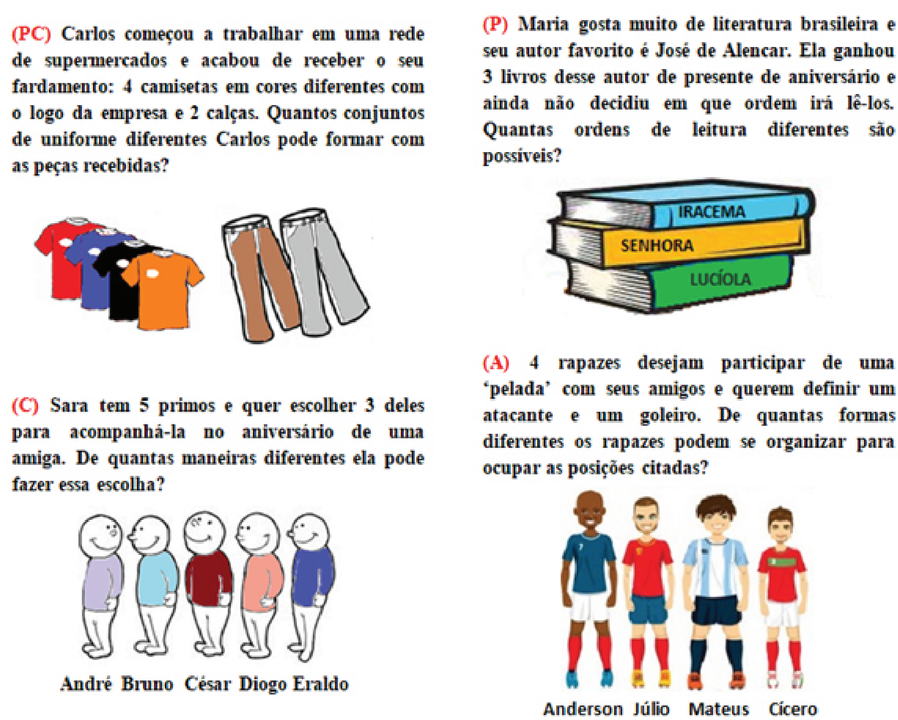

Figura 2. Problemas combinatórios propostos. Lima (2018).
PC: produto cartesiano, duas etapas de escolha, 8 possibilidades;
C: combinação, três etapas de escolha, 10 possibilidades;
P: permutação, três etapas de escolha, 6 possibilidades;
A: arranjo, duas etapas de escolha, 12 possibilidades.

(EAPC)Liste todos os conjuntos de calça e camiseta que Carlos pode formar com as peças de roupa recebidas.

(COPC)Carlos decidiu usar a calça de cor marrom. Na escolha da camiseta para completar seu uniforme, todas as camisetas têm a mesma chance de serem escolhidas ou alguma camiseta tem mais chance? Por quê?

(ALPC)Carlos guarda as camisetas do seu uniforme lado a lado penduradas em cabides. No segundo dia de trabalho, Carlos acordou apressado e pegou uma das camisetas sem olhá-las. Todas as camisetas têm a mesma probabilidade de terem sido pegas ou alguma camiseta tem mais chance? Explique.

(CPDPC)João e Mário trabalham na mesma empresa que Carlos. Eles possuem tempos de serviço diferentes e, ao longo dos anos de trabalho, João recebeu 3 camisetas vermelhas, 2 azuis, 2 pretas e 1 laranja. Mário recebeu 2 camisetas vermelhas, 1 azul e 1 laranja. Se os dois escolherem ao acaso a camiseta que vão usar, é mais provável que João ou Mário use uma camiseta na cor vermelha? Justifique.

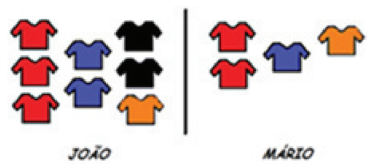

Figura 3. Problemas probabilísticos referentes à situação de produto cartesiano. (Lima, 2018)
EAPC: espaço amostral de produto cartesiano; COPC: correlação de produto cartesiano;
ALPC: aleatoriedade de produto cartesiano;
CPDPC: comparação de probabilidades diferentes de produto cartesiano.

Cada problema de *espaço amostral* solicitou a listagem escrita das possibilidades referentes às *situações* combinatórias correspondentes. Tal *representação simbólica*/estratégia pode ser utilizada espontaneamente ao se resolver qualquer problema combinatório, entretanto, a partir da proposição desse tipo de problema probabilístico buscou-se garantir que todos os participantes utilizariam a listagem para indicação das possibilidades de cada problema (seja na revisitação – Teste 1 – ou no primeiro contato com tais *situações* – Teste 2).

Os problemas de *correlação* propostos buscaram investigar a capacidade dos participantes de perceberem a independência entre os eventos dados. Por sua vez, os problemas de *aleatoriedade* propostos demandavam, além da compreensão do caráter aleatório das situações em questão, o julgamento da equiprobabilidade dos eventos dados. E, por fim, os problemas probabilísticos de *comparação de probabilidades diferentes* exploravam a comparação de probabilidades de eventos distintos, sendo necessário que os participantes levassem em consideração o caráter proporcional intrínseco ao cálculo de probabilidades.

Foram realizadas análises quantitativas dos desempenhos dos participantes por meio do uso do *software* Statistical Package for the Social Sciences (SPSS), considerando-se as variáveis: tipos de problemas, escolarização e tipo de teste. As análises qualitativas, por sua vez, permitiram identificar os invariantes compreendidos pelos estudantes, as *representações simbólicas*/estratégias utilizadas – suas limitações e efetividade – e levantar as relações estabelecidas entre o raciocínio combinatório e o probabilístico.

No que diz respeito aos problemas combinatórios e aos problemas de *espaço amostral* atribuiu-se zero (0) pontos quando menos da metade das possibilidades foi considerada, um (1) ponto quando metade ou mais das possibilidades foi considerada e dois (2) pontos quando houve esgotamento, isto é, um acerto total. Nesses problemas foram categorizadas, *a posteriori*, as *representações simbólicas*/estratégias utilizadas pelos participantes, a fim de facilitar as análises qualitativas realizadas.

Por sua vez, no que se refere aos demais problemas probabilísticos (*correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes*) foi atribuído zero (0) pontos quando houve erro, um (1) ponto quando houve acerto, mas a justificativa apresentada foi inadequada ou ausente e dois (2) pontos para acertos com justificativas adequadas.

A partir das análises realizadas, os principais achados do estudo exploratório conduzido são apresentados e discutidos a seguir.

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Dadas as pontuações atribuídas aos problemas combinatórios e probabilísticos propostos, o desempenho total poderia chegar a um máximo de 40 pontos. O desempenho geral dos participantes do estudo variou de 2 a 23 pontos, sendo o desempenho médio igual a 17,16 pontos. Tal dado aponta para uma compreensão insatisfatória, por parte desses estudantes, no que se refere à Combinatória e à Probabilidade.

É importante destacar que esse desempenho geral foi influenciado pela variável Grupo, visto que o desempenho tendeu a crescer em função do nível de escolarização dos participantes: o Grupo 1 apresentou desempenho médio igual a 8,6 pontos, enquanto o desempenho médio do Grupo 2 foi igual a 18,8 pontos e o do Grupo 3 igual a 24,1 pontos. Essa influência da escolarização no desempenho geral dos participantes se mostrou estatisticamente significativa ($F(2, 23) = 8{,}862$; $p = 0{,}002$). No entanto, tal avanço no desempenho só foi significativo ao se comparar o Grupo 1 (estudantes em início de escolarização) com os demais, não havendo avanço significativo ao se comparar os desempenhos de estudantes da EJA cursando o equivalente à conclusão do Ensino Fundamental (Grupo 2) e ao Ensino Médio (Grupo 3)[3].

Tal achado corrobora com o observado no estudo de Lima (2010), também realizado com estudantes da EJA resolvendo problemas de estruturas multiplicativas. A autora destaca que, à medida que avançava o nível de escolarização, percebeu-se uma melhor compreensão dos *invariantes* dos problemas abordados e o uso de *representações simbólicas* e estratégias mais adequadas às suas resoluções.

Destaca-se, a partir dos resultados obtidos, que a escolarização, por si só, proporcionou avanços nos desempenhos dos participantes do presente estudo ao resolverem os problemas combinatórios e probabilísticos propostos. Tal avanço, no

[3] Conforme post hoc Tukey, tem-se: Grupo 1 x Grupo 2 → $p = 0{,}034$; Grupo 1 x Grupo 3 → $p = 0{,}001$ e Grupo 2 x Grupo 3 → $p = 0{,}340$.

entanto, pode não se dever ao estudo específico de Combinatória e Probabilidade, visto que melhores desempenhos por parte dos estudantes da EJA Médio 3 eram esperados, dadas as expectativas de aprendizagem presentes nos Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (Pernambuco, 2012), nas quais é possível perceber a existência de maior destaque a conhecimentos relativos à Combinatória e à Probabilidade.

Outra variável central do presente estudo (tipo de teste) se refere à ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos. É de suma importância observar se e como essa variável influenciou os desempenhos apresentados, visto que a mesma reflete a natureza das articulações entre Combinatória e Probabilidade propostas em cada teste (a partir das revisitações neles presentes).

Nesse sentido, tem-se que o desempenho médio referente ao Teste 1 foi igual a 18,2 pontos, enquanto o referente ao Teste 2 foi um pouco inferior, sendo igual a 16,2 pontos.Essa diferença de desempenho, no entanto, não foi estatisticamente significativa ($t\,(22) = 0{,}497$; $p = 0{,}625$). A ordem de apresentação dos problemas e de suas respectivas revisitações não influenciou, portanto, quantitativamente o desempenho geral dos participantes do estudo[4]. Contudo, tal ordem de apresentação teve influência direta na escolha das *representações simbólicas* e estratégias utilizadas pelos participantes ao resolver os diferentes problemas combinatórios e ao explicitarem seus respectivos *espaços amostrais*, consistindo em avanços qualitativos de desempenho (mais evidentes no Teste 1). Tal discussão é aprofundada adiante no presente texto.

Na Figura 4 são apresentados os desempenhos médios referentes a cada tipo de problema combinatório e aos problemas de construção de *espaços amostrais* de cada *situação* combinatória. Análises referentes aos demais problemas probabilísticos propostos serão apresentadas em seguida.

[4] O tipo de teste também não influenciou de forma significativa estatisticamente os desempenhos de estudantes de um mesmo grupo, mesmo que os desempenhos referentes ao Teste 1 tenham tendido a ser um pouco maiores. Tem-se: Grupo 1 → $t(6) = 1{,}608$; $p = 0{,}159$; Grupo 2 → $t(6) = -0{,}139$; $p = 0{,}894$ e Grupo 3 → $t(6) = 0{,}392$; $p = 0{,}708$.

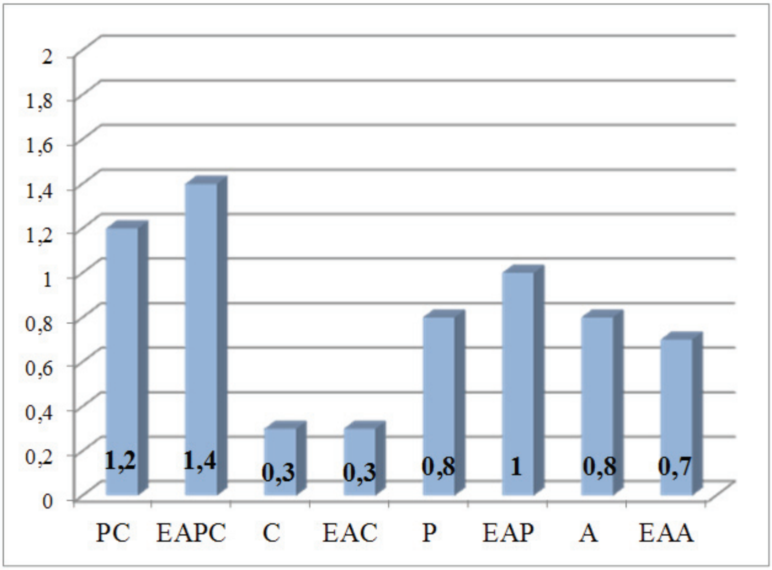

Figura 4. Desempenho médio por tipo de problema combinatório e respectivas construções de espaços amostrais (pontuação máxima 2 pontos por tipo problema). (Lima, 2018).
PC: *produto cartesiano*; EAPC: *espaço amostral* de *produto cartesiano*;
C: *combinação*; EAC: *espaço amostral* de *combinação*;
P: *permutação*; EAP: *espaço amostral* de *permutação*; A: *arranjo;* EAA: *espaço amostral* de *arranjo.*

O problema combinatório e o de *espaço amostral* referentes à *situação* de *produto cartesiano* foram aqueles nos quais os participantes do estudo apresentam melhores desempenhos médios. Por outro lado, os menores desempenhos foram observados no que se refere à *situação* de *combinação* (tanto no problema combinatório quanto no probabilístico)[5]. Essa influência do tipo de problema no desempenho apresentado pelos estudantes ao resolverem os problemas combinatórios propostos e ao construírem seus *espaços amostrais* reforça o papel central das *situações* no desenvolvimento conceitual (Vergnaud, 1986, 1996), visto que os diferentes tipos de *situações* combinatórias e probabilísticas não foram igualmente compreendidos pelos estudantes.

Tais resultados corroboram com estudos anteriores como os de Pessoa (2009), de Lima (2010) e de Azevedo (2013), realizados com públicos distintos da Educação Básica, que apontam os problemas de *produto cartesiano* como aqueles de mais simples resolução dentre os combinatórios e os problemas de *combinação* como um dos quais os estudantes apresentam maiores dificuldades. O maior desempenho no que diz respeito à

[5] Houve diferença significativa estatisticamente no que se refere aos problemas combinatórios (exceto entre os problemas de *arranjo* e de *permutação*): PC x C → $t(23) = 6{,}868$; $p < 0{,}001$; PC x P → $t(23) = 2{,}318$; $p = 0{,}030$;PC x A → $t(23) = 2{,}460$; $p = 0{,}022$; C x P → $t(23) = -2{,}937$; $p = 0{,}007$; C x A → $t(23) = -3{,}140$; $p = 0{,}005$ e P x A → $t(23) = 0{,}000$; $p = 1$. O mesmo foi observado ao se tratar dos problemas de *espaço amostral*: EAPC x EAC → $t(23) = 8{,}177$; $p < 0{,}001$; EAPC x EAP → $t(23) = 3{,}191$; $p = 0{,}004$; EAPC x EAA → $t(23) = 4{,}290$; $p < 0{,}001$; EAC x EAP → $t(23) = -5{,}127$; $p < 0{,}001$; EAC x EAA → $t(23) = -2{,}387$; $p = 0{,}026$ e EAP x EAA → $t(23) = 2{,}070$; $p = 0{,}050$.

situação de *produto cartesiano* pode se dever ao fato de que a mesma é mais trabalhada desde o início da escolarização. Por sua vez, o baixo desempenho referente à *combinação* reforça a existência de dificuldades de compreensão dos *invariantes* desse tipo de *situação* combinatória (principalmente do *invariante de ordem*, sendo necessário perceber que a mudança de ordem na apresentação de elementos não constitui novas possibilidades).

No que diz respeito aos demais problemas probabilísticos propostos, são apresentados, na Figura 5, os desempenhos médios referentes aos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes*[6].

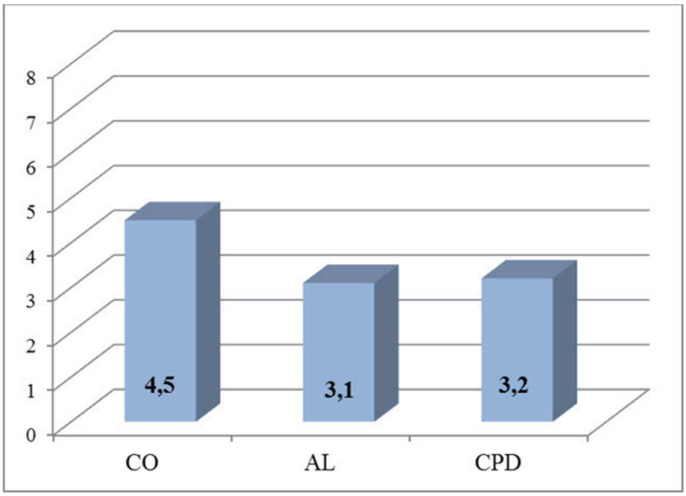

Figura 5. Desempenho médio nos problemas de correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes (pontuação máxima 8 pontos por tipo problema). (Lima, 2018)
CO: somatório dos problemas de *correlação*; AL: somatório dos problemas de *aleatoriedade*;
CPD: somatório dos problemas de *comparação de probabilidades diferentes*.

Foram constatadas diferenças significativas de desempenho apenas ao se comparar os problemas de *correlação* aos demais: CO x AL → $t(23) = 3{,}725$; $p = 0{,}001$; CO x CPD → $t(23) = 2{,}397$; $p = 0{,}025$ e AL x CPD → $t(23) = -0{,}081$; $p = 0{,}936$. A influência do tipo de problema probabilístico nos desempenhos apresentados reforça, assim, que os diferentes *invariantes* das *situações* probabilísticas propostas não são igualmente compreendidos pelos estudantes.

No que diz respeito à resolução dos problemas combinatórios, no geral, os participantes do presente estudo fizeram uso de *representações*/estratégias mais simples, que surgem espontaneamente. Majoritariamente foi utilizada a *enumeração oral*: a indicação de diferentes possibilidades referentes às *situações* combinatórias em questão,

[6] Não foram constatadas diferenças significativas de desempenho nos problemas probabilísticos de *correlação*, *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes* referentes às diferentes *situações* combinatórias. Assim, são apresentados os somatórios dos quatro problemas probabilísticos de cada tipo.

sem registro escrito de cada uma delas. Por sua vez, a *listagem escrita* foi a segunda *representação simbólica*/estratégia mais utilizada (com pouca frequência).

Destaca-se, assim, que os principais erros associados a tais problemas consistiram em *erros de listagem não sistemática* (omissão de casos provocada pelo uso de listagem sem sistematização) e *erros de ordem* (consideração de casos repetidos ou não consideração de possibilidades a partir da modificação de ordem de elementos quando necessário). Esses são os principais tipos de erros frente à resolução de problemas combinatórios também apontados por Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996).

É válido destacar, ainda, que mesmo que o tipo de teste não tenha influenciado quantitativamente os desempenhos, a ordem de apresentação dos problemas (resolver os problemas combinatórios antes ou depois dos probabilísticos – dentre eles, os de *espaços amostrais*) teve influência sobre as *representações simbólicas*/estratégias utilizadas pelos participantes para resolver os problemas combinatórios propostos. No Teste 1 a *enumeração oral* foi amplamente utilizada (mais de 65% dos casos em todos os problemas combinatórios)[7]. Por sua vez, os dados referentes ao Teste 2 apontam para um resultado importante: mesmo que a *enumeração oral* tenha sido também muito utilizada, uma grande parte dos estudantes que resolveram tal teste, tendeu a não revisitar os problemas combinatórios, isto é, por já terem resolvidos os respectivos problemas de *espaços amostrais* e, por não possuírem um repertório de *representações*/estratégias mais refinadas para melhorarem suas respostas, optaram por apenas repetir os resultados anteriormente apontados. Essa ausência de revisitação ocorreu em, aproximadamente, 25% dos casos no problema de *produto cartesiano*, 58% no problema de *combinação*, 42% no problema de *permutação* e 58% no problema de *arranjo*.

As revisitações propostas nos dois testes consistiram em ricos momentos de reavaliação dos problemas, permitindo que os estudantes analisassem melhor os *invariantes de ordem* e *de escolha* considerados, conferissem se alguma possibilidade não havia sido considerada ou se haviam casos repetidos. Proporcionou ainda que os estudantes que haviam resolvido o Teste 1 (que utilizaram poucas vezes os registros escritos) pudessem, a partir da revisitação com explicitação de *espaço amostral*, registrar e controlar os casos considerados e aos estudantes que haviam resolvido o Teste 2 (produzindo de início tal listagem) revisitar os registros feitos ou fazer uso de novas *representações*/estratégias para conferir suas respostas.

No que se refere aos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes* foi possível perceber que as principais dificuldades apresentadas pelos participantes estiveram pautadas em compreensões superficiais da probabilidade, evidenciadas a partir das justificativas que eram solicitadas nesses problemas. Assim, por vezes, mesmo em problemas nos quais houve acertos, as justificativas apresentadas foram inadequadas. Tal dificuldade foi observada principalmente nos problemas de *aleatoriedade*[8],

[7] Aproximadamente 75% no problema de *produto cartesiano*, 75% no problema de *combinação*, 67% no problema de *permutação* e 83% no problema de *arranjo*.

[8] Percentual aproximado de acertos com justificativas inadequadas/ausentes: 20% nos problemas de *correlação*, 49%nos problemas de *aleatoriedade* e 8% nos problemas de *comparação de probabilidades.*

nos quais o caráter equiprovável, necessário para que os eventos considerados tivessem a mesma chance de ocorrer, não foi evidenciado nas justificativas. O problema probabilístico no qual o maior percentual de erros foi apresentado foi o de *comparação de probabilidades diferentes* (56%)[9]: esse baixo desempenho evidencia a não consideração do caráter proporcional intrínseco aos problemas probabilísticos, isto é, uma não utilização do raciocínio combinatório para comparar os respectivos *espaços amostrais* e não apenas o número absoluto de casos favoráveis – tal dificuldade foi também apontada em estudos anteriores como o de Batista e Francisco (2015), o de Santos (2015) e o de Lima e Silva (2017).

A partir do desenvolvimento do presente estudo, foi possível observar, ainda, relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico. Em especial, no Teste 1, a exploração do *espaço amostral* proporcionou a descoberta de novas possibilidades nos problemas combinatórios, visto que a revisitação e o registro escrito das possibilidades referentes a esses problemas permitiram que os participantes avaliassem/modificassem as *representações simbólicas* e estratégias utilizadas, tendo a chance de refletir, também, sobre os *invariantes de ordem* e *de escolha* de cada tipo de *situação* combinatória, reavaliando e refinando as respostas dadas aos problemas. Por outro lado, apresentar uma maneira de pensar própria do raciocínio combinatório proporcionou o uso de uma abordagem mais voltada à Matemática escolar durante a resolução dos problemas probabilísticos (Teste 2) e desprendida de preferências pessoais, visto que esses envolvem o levantamento de possibilidades (sendo importante que todo o *espaço amostral* seja considerado para que as probabilidades sejam avaliadas e/ou comparadas em problemas escolarizados).

Defende-se, assim, que a articulação entre o raciocínio combinatório e o probabilístico pode beneficiar o desenvolvimento destes na EJA – dadas as contribuições que surgem entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade a partir da resolução de problemas que relacionem ambos os raciocínios.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do estudo exploratório realizado as relações que se estabelecem entre os conhecimentos de Combinatória e Probabilidade foram investigadas com estudantes da EJA. Constatou-se que a escolarização influenciou o desempenho dos participantes, tendo exercido efeito sobre o modo como os mesmos resolvem problemas, como pensam hipoteticamente e levantam possibilidades, mesmo quando não há foco no ensino específico de tais áreas da Matemática. A escolarização, por si só, no entanto, não é suficiente para o pleno desenvolvimento dos raciocínios em questão (Fischbein, 1975), sendo importante que haja instrução específica que vise o contato com diferentes *situações*, isto é, com variados tipos de problemas, a compreensão de seus respectivos *invariantes* e a ampliação do repertório de *representações simbólicas* e estratégias, inclusive a partir da articulação entre Combinatória e Probabilidade.

[9] Percentual aproximado de erros: 33% nos problemas de *correlação*, 37% nos problemas de *aleatoriedade* e 56% nos problemas de *comparação de probabilidades diferentes*.

O tipo de teste, isto é, a ordem de apresentação dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos, quantitativamente não influenciou os desempenhos apresentados, mas teve papel importante na escolha das *representações simbólicas* e estratégias*,* afetando também o potencial de contribuição ao desenvolvimento dos raciocínios investigados a partir das revisitações propostas. Tendo em vista o observado em relação a tais contribuições, defende-se que o ensino de Combinatória e Probabilidade de maneira articulada pode favorecer o desenvolvimento de ambos os raciocínios na EJA e, muito provavelmente, em outras modalidades de ensino.

Espera-se, com o presente estudo, contribuir para o levantamento de reflexões sobre o ensino da Combinatória e da Probabilidade e as possibilidades de articulações entre elas (seja, ou não, na EJA). Estudos posteriores podem aprofundar a investigação das relações entre tais raciocínios também no Ensino Regular, utilizando-se de diferentes abordagens – sejam eles exploratórios ou interventivos. Além disso, é importante que se pesquise se e como tais relações estão presentes em materiais que podem influenciar a abordagem que o professor dá à Combinatória e à Probabilidade em sala de aula, como, por exemplo, orientações curriculares e livros didáticos.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DE AUTORES

E.T.L. e R.E.S.R.B. conceberam a ideia da pesquisa apresentada, que foi desenvolvida em contexto de mestrado da E.T.L., sob orientação da professora doutora R.E.S.R.B. Ambas as autoras contribuíram para a construção do presente texto a partir dos dados e análises da pesquisa original.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pela autora correspondente, E.T.L., mediante solicitação razoável.

AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco, pelo financiamento concedido à pesquisa de mestrado ao qual o presente texto se refere.

REFERÊNCIAS

Azevedo, J. (2013). *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades:* é melhor no papel ou no computador? 126f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Batista, R. & Francisco, V. R. (2015). Noções probabilísticas de alunos da EJA. Ilhéus: *Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 4º SIPEMAT.*
Borba, R. (2016). Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. Recife: *Anais do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais – Encepai*.
Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC, Secretaria de Ensino Fundamental.
Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability:* a literature review. Nuffield Foundation. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf>.
Campos, T. & Carvalho, J. I. (2016). Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. Recife: *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – Em Teia*, *7*(1), 1-18.
Carraher, T. (1998). *O método clínico usando os exames de Piaget*. 5. ed., São Paulo: Cortez.
Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht.
Lima, E. & Silva, A. (2017). Conhecimentos matemáticos de estudantes da Educação de Jovens e Adultos: estatística, probabilidade, combinatória e porcentagem. Garanhuns: *Anais do VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática* – EPEM.
Lima, E. (2018). *Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA:* investigando relações. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
Lima, R. de C. (2010). *O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos:* do início da escolarização até o ensino médio**.** 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
Morgado, A.; Pitombeira de Carvalho, J. B.; Pinto de Carvalho, P. & Fernandez, P. (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: Graftex.
Navarro-Pelayo, V.; Batanero, C. & Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39.
Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
Pernambuco. (2012). *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:* Parâmetros Curriculares de Matemática - Educação de Jovens e Adultos. Secretaria de Educação.
Pessoa, C. & Borba, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Campinas**:** *Revista de Educação Matemática – Zetetiké, 17*(31), 105-150.
Pessoa, C. (2009). *Quem dança com quem:* o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 267f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
Santos, J. (2015). *A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora.* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba.
Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, *1*(1), 75-90.
Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceptuais. In: Brum, J. (org.) *Didáctica das Matemáticas*, Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 155-191.