ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5650

Transformación del conocimiento especializado de los futuros profesores de primaria sobre división de fracciones

M. Valenzuela-Molina [a]
E. Ramos-Rodríguez [b]
P. Flores [c]

[a] Universidad Alberto Hurtado, Facultad de Educación, Santiago, Chile
[b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Facultad de Ciencias, Instituto de Matemática, Chile
[c] Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España

Recibido para su publicación 20 ene. 2020. Aceptado tras revisión 5 mayo 2020
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

ABSTRACT

Background: an important field of research in mathematics education is the initial training of teachers where deficiencies in the disciplinary and didactic knowledge required for their profession can be evidenced. **Objective:** To study the transformation of the specialized knowledge of future teachers about division of fractions. **Design:** qualitative descriptive paradigm where a case study is approached. **Context and participants:** a group of three students who design, reformulate and implement mathematical tasks during their initial training in a Lesson Study environment using the Didactic Analysis method, where they receive feedback from their peers and trainer. **Data collection and analysis:** data collection is obtained from the written productions of future teachers and the record of recordings of class discussions, which were analyzed using the content analysis method and the categories of the specialized knowledge model. from the math teacher. **Results:** future teachers show a change in their knowledge, starting their process with the design of a problem situation with a different meaning in the conceptual field of division of fractions, which becomes a problem situation with a multiplicative structure of the type "isomorphism of measure". **Conclusions:** deepening the processes of transformation of the specialized knowledge of future teachers from their first formative stage can give us insights on how to improve their training aiming at their professional teaching development.

Keywords: didactic; mathematical; teacher training; division; fractions.

Autora correspondiente: Macarena Valenzuela-Molina. Email: mvalenzuelamolina@gmail.com

Transformação de conhecimento especializado de futuros professores sobre divisão de fração

RESUMO

Contexto: um importante campo de investigação em educação matemática é a formação inicial de professores onde se evidenciam deficiências nos conhecimentos disciplinares e didáticos necessários à sua profissão. **Objetivo:** estudar a transformação do conhecimento especializado dos futuros professores sobre a divisão de frações. **Design:** paradigma qualitativo descritivo onde se aborda um estudo de caso. Contexto e participantes: um grupo de três alunos que projetam, reformulam e implementam tarefas matemáticas durante seu treinamento inicial em um ambiente de Estudo de Classe usando o método de Análise Didática, onde recebem feedback de seus colegas e do treinador. **Coleta e análise de dados:** a coleta de dados é obtida a partir das produções escritas dos futuros professores e do registro das gravações das discussões das aulas, as quais foram analisadas por meio do método de análise de conteúdo e das categorias do modelo de conhecimento especializado, do professor de matemática. **Resultados:** os futuros professores apresentam uma mudança em seus conhecimentos, iniciando seu processo com o desenho de uma situação-problema com um significado diferente no campo conceitual da divisão de frações, que se torna uma situação-problema com uma estrutura multiplicativa do tipo "isomorfismo de medida " **Conclusões:** o aprofundamento dos processos de transformação dos saberes especializados dos futuros professores desde a sua primeira fase formativa pode nos dar subsídios sobre como melhorar a sua formação visando o seu desenvolvimento profissional docente.

Palavras-chave: didática; matemática; formação de professores; divisão; frações.

INTRODUCTION

Un campo importante de investigación en educación matemática es la formación inicial de maestros. Prueba de ello se evidencia en los diversos Handbook de educación de profesores de matemática a nivel internacional (Clements, Bishop, Keitel-Kreidt, Kilpatrick, & Leung, 2013; English, & Kirshner, 2015), y en el estudio TEDS-M (Estudio internacional sobre formación inicial en matemáticas de los maestros), el cual muestra la relevancia que se le ha dado en los últimos años a esta línea de investigación (Sanz y Martín, 2014).

En este escenario, el diseño de tareas escolares matemáticas, es un contexto apto para diagnosticar el conocimiento para la enseñanza de la matemática de futuros profesores (FP) de educación primaria, pues permite evidenciar aspectos matemáticos y pedagógicos al proponer a sus estudiantes los diferentes deberes escolares para alcanzar los aprendizajes esperados. En este caso analizaremos como objeto matemático, la estructura multiplicativa de las fracciones, enfocándonos en aquellas situaciones problemas que implican una división de fracciones, o división de fracción en número natural.

La elección de la división de fracciones como objeto de estudio, se debe a la complejidad que esta conlleva, tanto para los profesores en su enseñanza, como para los estudiantes en su aprendizaje (Moriel, 2014), ya que ha sido considerada tanto por docentes y estudiantes como una operatoria mecánica y sin sentido (Ma, 2010; Moriel, 2014; Olanoff, 2011; Özel, 2013; Payne, 1976; Tiroch, 2000). Esta decisión se apoya, además, en los hallazgos encontrados en investigaciones previas nuestras (Ramos-Rodríguez, Reyes-Santander, & Valenzuela-Molina, 2017; Valenzuela, & Ramos-Rodríguez, 2018), en las cuales evidenciamos una precaria apropiación sobre división de fracciones en profesores en formación inicial en el contexto de este estudio.

Otro estudio que nos inspira es el de Ma (2010), aunque investiga a profesores en ejercicio sus hallazgos son interesantes al evidenciar diferencias considerables entre países, al solicitar a docentes de aula generar situaciones para la división de fracciones dada por $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$, mostrando una problemática en la coherencia entre la situación planteada por los profesores y la división de fracciones entregada. Además de Ma (2010), destacamos las investigaciones de Contreras (2012) y Liñán et al. (2014) quienes han profundizado en el conocimiento del profesor de primaria, al resolver situaciones problemas que implican la división de fracciones, evidenciando debilidades en su resolución procedimental.

Así es, como diversos estudios han detectado debilidades conceptuales y procedimentales en relación al conocimiento matemático y didáctico de profesores en ejercicio y en formación inicial sobre la división de fracciones, y algunos más profundos sobre la estructura multiplicativa. A partir de estos antecedentes y la dificultad en la comprensión de la división de fracciones (Blömeke, Suhl, & Kaiser, 2011; Ramos-Rodríguez, Reyes-Santander, & Valenzuela-Molina, 2017), nos planteamos como objetivo estudiar la transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de educación primaria sobre división de fracciones al diseñar, reformular e implementar tareas matemáticas dentro de un proceso formativo.

MARCO DE REFERENCIA

Principalmente, el estudio se ha basado teóricamente en el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK). También se ha indagado en el concepto de transformación que subyace al objetivo de nuestro estudio, de manera de posicionarnos respecto a la idea trasformación del conocimiento. Por último, para introducirnos al marco de referencia, llevamos a cabo un análisis conceptual sobre la estructura multiplicativa, para darle sentido al conocimiento matemático y pedagógico evidenciado y a las transformaciones que éste conlleva.

Estructura Multiplicativa

El estudio sobre la estructura multiplicativa tiene sus orígenes en las investigaciones de Nescher (1992) y Vergnaud (1990, 1997), quienes categorizan las diferentes formas de resolver problemas que utilizan niños y niñas de distintos colegios, en diferentes tipos de situaciones multiplicativos. A partir de las investigaciones anteriores, surgen perspectivas de análisis, reflexión y discusión sobre las categorías de problemas multiplicativos, en los cuales interviene una multiplicación o una división. Con ello se construye una estructura multiplicativa que se compone de conceptos, procedimientos y representaciones, llamadas por Vergnaud (1983) como campos conceptuales.

La estructura multiplica se categoriza en tres tipos de situaciones problemas de acuerdo con Vergnaud (1997): a) isomorfismo de medida, b) un solo espacio de medidas y c) producto de medidas, los que se detallan a continuación.

a) Isomorfismo de medida

La relación cuaternaria del isomorfismo de medida, origina cuatro tipos de problemas. En todos ellos puede estar presente la división de fracciones. Están los problemas de multiplicación en los cuales la incógnita es el total de objetos o elementos que se buscan. Los problemas de división partitiva, en los cuales la incógnita es el cuociente o el número de objetos por grupo (Contreras, 2012; Liñán, et al. (2014), este tipo de problemas no tiene sentido en las fracciones, ya que siempre el reparto se debe hacer en enteros (Flores, 2018). Los problemas de división cuotitiva, son aquellos cuya incógnita es el divisor o el número de grupos de una determinada medida. Y, por último, los problemas de regla de tres, en los cuales intervienen multiplicación y división (Vergnaud, 1997).

b) Un único espacio de medida

En un único espacio de medida hay una relación entre dos cantidades de una misma magnitud o espacio de medida que se ven afectadas por un escalar, que generalmente se designa con la expresión lingüística "veces". Este tipo de situaciones problemas se presentan de tres maneras diferentes. El primer caso implica una multiplicación, en donde la incógnita es la cantidad comparada, es decir el resultado de multiplicar las "veces" que se compara el escalar con la magnitud referente. El segundo caso implica una división, para encontrar la incógnita correspondiente al referente, es decir, cuándo no se conoce la magnitud a comparar. El último caso también implica una división y la cantidad desconocida es el escalar, es decir, la cantidad de "veces" que se debe comparar la medida referente.

c) Producto de medidas

El producto de medidas está formado por la relación de tres cantidades, en las cuales una de ellas es el producto de las otras dos, tanto en lo numérico como en lo dimensional (Vergnaud, 1997). Este tipo de situación es llamado como producto cartesiano por Greer (1992) y Nescher (1992). La incógnita puede ser el producto entre ambas medidas, lo que implica una multiplicación. Si la cantidad desconocida es cualquiera de las dos medidas, la resolución de la situación implica una división.

División de fracciones y división de una fracción en un número natural

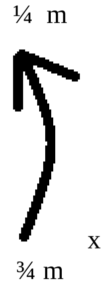
La estructura multiplicativa de las fracciones implica división en todos los tipos de problemas que presenta Vergnaud (1983). Debido a que nuestro objeto de estudio es la división de fracciones, a continuación, presentamos ejemplos de cada una de las situaciones que implican división.

Tabla 1

Situaciones que implican división en la estructura multiplicativa de Vergnaud (1997)

Situación de estructura multiplicativa	Ejemplo de situación	Incógnita

<table>
<tr>
<td>Isomorfismo de medida</td>
<td>División de reparto (partitiva)
Hay que repartir 1 entero ¾ l de bebida en 7 personas.
¿Cuánta bebida toca cada una de ellas?
Importante:
En este caso, no tiene sentido repartir en una fracción, por lo tanto sólo es posible repartir una fracción en enteros.</td>
<td>Incógnita es el valor unitario
<table>
<tr><th>Personas</th><th>Litro de bebida</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1 ¾ l</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>División cuotitiva (medida)
Pablo tiene ¾ kg de frambuesa para rellenar panqueques. Él sabe que cada panqueque necesita 1/12 de kg de frambuesa. ¿Cuántos panqueques puede rellenar con ¾ kg de frambuesa?</td>
<td>Incógnita es el valor total de una medida
<table>
<tr><th>Panqueques</th><th>Kg de frambuesas</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1/12 kg</td></tr>
<tr><td>x</td><td>¾ kg</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Único espacio de medida</td>
<td>Un elástico puede estirarse hasta 16/5 veces de su tamaño original. ¿Cuál es la longitud de una pieza que estirada mide 12/5 m?</td>
<td>La incógnita es el referente
<table>
<tr><th></th><th>METROS</th></tr>
<tr><td></td><td>x
16/5
12/5 m</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Un lazo rojo mide ¾ m de largo. Un lazo azul mide ¼m de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo del lazo azul en el largo del lazo rojo?</td>
<td>La incógnita es el escalar
<table>
<tr><th></th><th>METROS</th></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

		
Producto de medidas	Un rectángulo tiene un área de 3/16 m^2 uno de sus lados mide ¼ m ¿cuál es la medida del otro lado?	La incógnita es una de sus dos medidas | | **a** 1/4 M1 **X** | **c** 3/16

Conocimiento del profesor de matemática

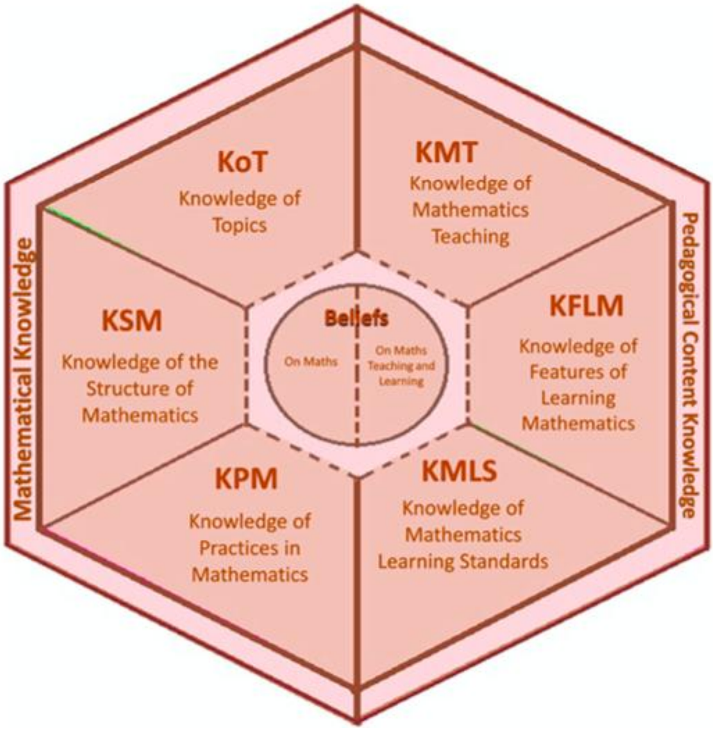
El origen del estudio del conocimiento que debieran tener los profesores surge a partir de las ideas basales de Shulman (1986), quien profundiza en el Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor, entendiendo éste como un conjunto de saberes que todo profesor utiliza al enseñar un contenido disciplinar específico. Estos estudios, dan origen a diversos modelos de conocimiento del profesor, en este trabajo nos centramos en el modelo MTSK (Carrillo et al. 2018), cuyo modelo se presenta a través de las componentes esquematizadas en la Figura 1.

En la Figura 1 se pueden visualizar dos grandes dominios: el conocimiento de la matemática (MK), el cual cumple un rol articulador de todo el modelo, y el conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK), cuyo interés es profundizar en el contenido de la matemática, cuando hay una intención de enseñanza y aprendizaje. También aparecen en el centro de la figura, las creencias sobre la matemática, relacionándose con el MK, y las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, relacionándose con el PCK (Carrillo et al., 2018). Cada uno de los dominios del MTSK, se divide en tres sub-dominios, como se distingue a continuación.

El dominio del conocimiento de la matemática (MK) considera: a) conocimiento de los temas matemáticos (KoT), profundizando en la materia a enseñar y su nivel de organización y profundización; b) conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), que contempla el conocimiento de distintos objetos matemáticos y las conexiones entre ellos; y c) conocimiento de la práctica matemática (KPM), definida "como aquella actividad matemática cuyo uso constituye un pilar en la creación matemática y que tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas para esta” (Flores-Medrano, 2016, p. 30).

Figura 1

Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018, p.7)



El dominio del conocimiento didáctico de la matemática (PCK) se compone de: a) conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que caracteriza la enseñanza del contenido, teorías de enseñanza, recursos didácticos, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (Escudero, Contreras y Vasco, 2016); b) conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), como habilidades de análisis de producciones de los estudiantes, identificar dificultades y errores; y c) conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), enfocando el currículo, en un nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un tópico en un nivel.

Desde esta perspectiva del conocimiento especializado del profesor de matemática, es que hemos considerado el Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática (KMT) como sub-dominios a analizar en las producciones de los estudiantes.

En primera instancia el KoT que considera el dominio de las matemáticas a enseñar, desde una organización, profundización y estructuración superior a la que aprenderán los estudiantes en el colegio, consistente en un conocimiento de las estructuras matemáticas, como conceptos y definiciones; conocimiento de los significados desde la fenomenología y los contextos que dan sentido a las matemáticas y desde las diferentes representaciones de los objetos matemáticos para una mejor comprensión a partir de variadas dimensiones, de estos tres conocimientos específicos del KoT, nos enfocamos en la fenomenología y la estructura matemática.

Luego consideramos el KMT que considera las características de la enseñanza del contenido, como el conocimiento de teorías de enseñanza, de los recursos didácticos específicos para un tema, de las estrategias, técnicas y tareas, todo esto referido al contenido matemático a trabajar. En este estudio y debido al carácter de los datos, nos centramos en las estrategias, técnicas y tareas presentadas por las futuras profesoras en sus planes de clases.

Desarrollo profesional inicial a partir de la transformación de conocimiento

Uno de los primeros acercamientos al concepto de transformación de conocimiento desde el MTSK fue realizado por Ribeiro (2010), quien investigó las prácticas de dos profesoras identificando lo que él llamó una "evolución de su conocimiento profesional", en el sentido de "back to basics", referido a no hacer las cosas como las hacía antes, sino que lograban tomar conciencia y readecuaban las prácticas.

Otro estudio relevante en esta línea es la tesis doctoral de Flores-Medrano (2015), quien utiliza el concepto de "transformación de conocimiento" desde la postura de cómo conciliar un conocimiento con uno ya existente. En nuestro estudio, utilizaremos el concepto de "transformación" desde una postura similar, al considerar tareas en las cuales se evidencia un conocimiento inicial, el cual se va modificando de manera consciente y transformando en un nuevo conocimiento al rediseñarlas luego de discusiones y retroalimentaciones en un escenario formativo dado.

Desde otro ámbito consideramos la perspectiva sociocultural de Sfard (2008), entendiendo el aprendizaje como una transición gradual de lo que el individuo es capaz de hacer o conocer participando en el colectivo a ser capaz de hacerlo o conocerlo por sí mismo (Escudero, Gavilán, & Sánchez-Matamoros, 2014), lo cual le permite hacer transformaciones que dan origen a nuevo conocimiento.

Complementamos las ideas de Flores-Medrano (2016), Ribeiro (2010) y Sfard (2008) con la definición de trasformación que presenta la Real Academia Española (RAE), la que define el concepto de trasformación como hacer cambiar de forma a alguien o algo, transmutar algo en otra cosa. De esta forma nuestra postura frente al tema plantea como hipótesis que la "transformación del conocimiento del profesor" (o futuro profesor) se puede evidenciar cuando este manifiesta cambios graduales sobre lo que es capaz de hacer con otros y luego individualmente, a partir de agentes externos, tomando conciencia de lo nuevo o de los cambios que se generan para la readecuación de la práctica. En nuestro caso, sostenemos que las FP evidencian transformación de su MTSK al manifestar en diferentes etapas de su formación, cambios en el diseño, rediseño e implementación de tareas matemáticas sobre un tema específico, con una toma de conciencia de los cambios implementados con el fin de lograr aprendizaje en sus estudiantes, lo cual evidencia, además, un desarrollo de conocimiento especializado en matemática.

Una transformación del MTSK se pone de manifiesto cuando los profesores van reestructurando su conocimiento especializado de tal manera de ir avanzando desde un MTSK inicial a un MTSK lo más idóneo, es decir una reestructuración del anterior, tanto en el ¿qué hacer?, y en el ¿cómo hacerlo? Cabe destacar que no nos referimos a un MTSK final pues este siempre está en constante transformación.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

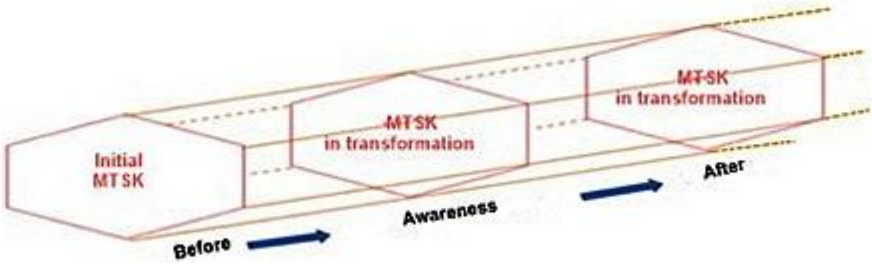
Este estudio se enmarca en el paradigma cualitativo de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) de tal forma de estudiar la transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de educación primaria sobre división de fracciones al diseñar, reformular e implementar tareas matemáticas dentro de un proceso formativo.

Los sujetos de estudio están en su formación inicial de profesores de Educación Primaria de Chile, una formación generalista con mención en una didáctica específica, en este caso, didáctica de las matemáticas. El título que obtienen les permite trabajar con cursos de 1° a 8° de primaria (alumnos entre 6 y 13 años) impartiendo clases de todas las asignaturas. En este contexto se realiza un estudio de Casos (Stake, 2003), considerando un grupo de tres profesoras en formación que están en su cuarto año de Carrera (de 5 años de duración).

La recolección de datos se realiza en cuatro etapas de una asignatura, donde las futuras profesoras diseñan y refinan una clase, a partir de diferentes dispositivos formativos que les permiten ir ampliar su conocimiento: un Análisis Didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), las observaciones y retroalimentaciones de su formadora, las reflexiones de su implementación en el aula y la discusión final entre pares y profesora formadora sobre la clase. Este proceso se ilustra en la Figura 2.

Figura 2

Modelo de transformación del MTSK (elaboración propia)

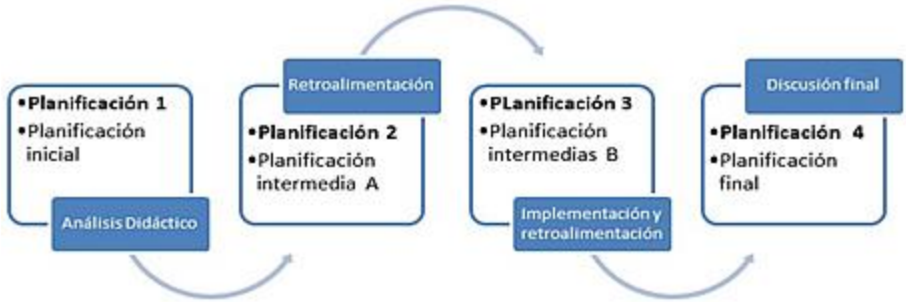


Los datos fueron obtenidos a partir de los insumos de planificaciones de clases propuestas por las FP en cada etapa y las trascripciones de las grabaciones de video de las sesiones y retroalimentaciones donde el grupo expone sus propuestas.

El estudio se realiza con base en el método de análisis de contenido (Flick, 2004), en que las unidades de análisis corresponden, en el caso de las planificaciones de las futuras profesoras, a cada uno de los enunciados de las tareas escolares propuestas por ellas. En el caso de las trascripciones de video, la unidad de análisis corresponde a cada intervención de las fututas profesoras o formadora en las clases donde presentan sus avances. En ambos casos, se analizan las ideas y textos en común de acuerdo a los conceptos trabajados desde nuestro objeto de estudio a partir de la estructura multiplicativa que implica la división de fracciones.

Figure 3

Etapas de planificación de una clase



Considerando el modelo MTSK se establecen descriptores que permitan identificar el conocimiento y su transformación, surgiendo así una lista de indicadores propuestos en la tabla 2. En particular, se evidencian elementos de dos subdominios, uno desde del dominio matemático, Conocimiento de los Temas (KoT) y otro desde el dominio didáctico del contenido, el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT), relacionado con la estructura multiplicativa que implica división de fracciones. Para este informe se han seleccionado dos dominios KoT y KMT, de tal manera de identificar relaciones que se dan entre ellos, indicios que nos pueden ayudar para los análisis con otros dominios en posteriores estudios

Tabla 2

Categorías de análisis desde algunos elementos del KoT (estructura y contextos) y desde el KMT (estrategias, técnicas y tareas) asociada a la división de fracciones.

Categoría	Descripción	Indicador
C.1 Fenomenolo gías (KoT)	C.1.1	C.1.1.1 Diseña situación en un contexto personal/ cercano

	Contextualización de la situación problema	C.1.1.2 Diseña situación en un contexto social C.1.1.3 Diseña situación en u n contexto científico C.1.1.4 Diseña situación en un contexto matemático
C.2 Significados según situación de estructura multiplicativa (KoT)	C.2.1 Isomorfismo de medida	C.2.1.1 Diseña una situación que implica una división de reparto C.2.1.2 Diseña una situación que implica una división de medida
	C.2.2 Único espacio de medida	C.2.2.1 Diseña un situación con una incógnita en el referente C.2.2.2 Diseña situación con incógnita en el escalar
	C.2.3 Producto de medida	C.2.3.1 Diseña situación con incógnita en alguna de sus dos medidas
C3 Las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido (KMT)	C.3.1 Tareas	C.3.1.1 Propone tareas adecuadas al nivel de acuerdo a la utilización de símbolos con significados. C.3.1.2 Propone secuencias de aprendizaje que permitan transitar entre los diferentes sistemas de representación, una secuencia posible puede ser desde lo concreto, pictórico y simbólico para la división de fracciones. C.3.1.3 Propone tareas para la diversidad en la manera de aprender la división de fracciones. C.3.1.4 Propone tareas de acuerdo a la variedad de contextos o situaciones multiplicativas.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Al iniciar el proceso formativo, la formadora solicita a las FP que identifiquen una problemática en la enseñanza de las fracciones. Como respuesta a ello, las FP manifiestan como problemática lo adverso de la mecanización del algoritmo de productos cruzados para la división de fracciones. Ellas seleccionan un objetivo de clase y un nivel específico de enseñanza y dan inicio a este proceso de planificación. Para este estudio, centraremos el análisis en los enunciados de la tarea principal que proponen las FP de una clase, la cual se va transformando a medida que avanza su formación (Figura 2), lo que se detallan en la Tabla 3.

Tabla 3

Progresión de enunciados de la tarea matemática central de la clase.

Tarea $T_{1.1}$ de la planificación $P_{1.1}$	**Tarea $T_{1.2}$ de la planificación $P_{1.2}$**	**Tarea $T_{1.3}$ de la planificación $P_{1.3}$**	**Tarea $T_{1.4}$ de la planificación $P_{1.4}$**
Pablo tiene 3/4 de frambuesas para rellenar panqueques. Él sabe que cada panqueque necesita 3/2 de las frambuesas que tiene ¿Cuántos panqueques logra rellenar con las frambuesas?	Un lazo rojo mide $\frac{3}{4}$ m de largo. Un lazo azul mide $\frac{3}{2}$ m de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo del lazo azul en el largo del lazo rojo?	Una cinta amarilla mide 4 metros de largo y otra cinta color morado mide $\frac{1}{2}$ metro de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo de la cinta morada en el largo de la cinta amarilla? Pueden usar las cintas para resolver	Una cinta amarilla mide 4 unidades de largo y otra cinta morada mide $\frac{1}{2}$ unidad de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo de la cinta morada en el largo de la cinta amarilla? Pueden usar las cintas para resolver. (opcional)

Los cambios realizados por las FP en el enunciado de estas tareas responden a los diferentes reactivos proporcionados durante el proceso formativo que se enfrentan, como el desarrollo del análisis didáctico del tema, y las continuas retroalimentaciones de sus pares y su formadora. Para esta escrito hemos seleccionado dos subdominios de análisis desde el MTSK, el Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT), de acuerdo a las categorías mostradas anteriormente.

Análisis desde el Conocimiento de los Temas (KoT)

a) Fenomenología

Desde la fenomenología asociada a los contextos (C.1), para el enunciado de la tarea T1.1 las futuras profesoras utilizan sus conocimientos sobre situaciones del contexto personal (C.1.1.1) para la división de fracciones, con la preparación de alimentos como una actividad del propio individuo o grupo familiar.

Después de realizar el análisis didáctico de la división de fracciones, donde el grupo estudia los distintos contextos presentes en la división de fracciones, deciden cambiar este contexto, lo que origina el enunciado de la tarea T1.2 con un contexto más social (C.1.1.2), con el uso de implementos que suelen generarse en contextos laborales, como en la construcción o en el oficio de la costura. Ambos contextos son adecuados para la enseñanza

b) Significado desde estructura multiplicativa que implica división de fracciones

Sin embargo, considerando la estructura multiplicativa de las fracciones, desde el isomorfismo de medida (C.2.1) en que la incógnita es el número de veces que contiene una determinada medida, en el enunciado de $T_{1.1}$ y $T_{1.2}$ la fracción divisor es mayor a la fracción dividendo, lo que impide que la división en sí tenga sentido para el contexto dado, ya que al preguntar ¿cuántas veces cabe? se desprende la interpretación de la división de fracciones como de medida (C.2.1.2), en que necesariamente la fracción divisor debe ser menor a la fracción dividendo (Contreras, 2012), lo cual no se ha cambiado aún entre una tarea a otra.

A partir de la tarea en sí misma, no es posible evidenciar el porqué de la selección de las fracciones, pero al leer el extracto del diálogo en la figura 3, entre el enunciado de la $T_{1.2}$ y $T_{1.3}$ es posible observar que el tema respecto a la selección de fracciones no les es indiferente a las FP, ya que ellas están conscientes de la dificultad que presenta en los estudiantes que el divisor no está contenido en el dividendo, sin embargo, decidieron mantener en el enunciado de $T_{1.2}$ estas fracciones, para cambiarlas en el enunciado de la $T_{1.3}$.

Otro dato considerado para el análisis se extrae de una instancia de trabajo entre el grupo y la profesora formadora que se enfoca en la revisión del enunciado de la tarea $T_{1.2}$ se evidencia en las transcripciones siguientes. En este contexto y a partir de retroalimentaciones y discusiones respecto de la clase en general, se detienen a evaluar la selección de las fracciones en la propuesta de enunciado de la tarea $T_{1.2}$, originándose la siguiente discusión, donde FP1 y FP2 corresponde a dos de las futuras profesoras y F a la formadora.

FP1: O sea, pienso que a lo mejor se debe partir con algo que “cabe”, que haya más veces adentro de un “algo”, porque igual el lazo no “cabe”, entonces una de las respuestas puede ser que no cabe.

F: y ahí ¿tendríamos que cambiar la fracción?

FP1: Sí

F: Ya ¿Cómo se te ocurre que podría ser?

FP1: nosotras habíamos dicho que, al fin y al cabo, en la segunda fracción siempre tenía que ser impropia.

F1: ¿Para qué?

FP1: Para hacer el inverso …[Silencio]

F: pero es que todavía no estamos viendo el inverso, estamos en la primera clase. Está bien, pero estamos en la primera clase en donde nuestro objetivo es comprender la división de fracciones. Todavía no le hemos puesto objetivo, pero recuerden que estamos viendo lo que dice el Objetivo de aprendizaje y este dice dos cosas, una es que comprendan a través de lo pictórico y la otra es que utilicen el inverso multiplicativo, entonces ahí hay dos cosas distintas.

FP2: entonces para la primera clase no necesariamente la segunda fracción [el divisor de la división] podría ser cualquiera

F: depende de cuál es el objetivo que nos vamos a plantear. Si nosotras nos planteamos como objetivo solamente que el estudiante comprenda la división de las fracciones, no es necesario manipular esas cantidades, sino, más bien queremos que el alumno comprenda [la división de fracciones]. Entonces, ahí el lazo puede ser, por ejemplo, tres cuartos del lazo, y el que vamos a dividir puede ser uno más pequeño, lo que si tenemos que ver que coincidan el largo total del lazo con los lazos pequeños [que la fracción del lazo mayor contenga exactamente la fracción del lazo pequeño]. Entonces, cuántas veces, esa fracción va a estar contenida en la fracción mayor.

FP2: me imagino que tengo el lazo, que tengo los lazos chiquititos que van cayendo dentro de este lazo grande y si, por ejemplo, el lazo en la esquina me queda una punta un pedacito de ese lazo [aludiendo a que la fracción divisor no está contenida exactamente en la fracción dividendo].

Anteriormente se exponen las reflexiones de las FP, las retroalimentaciones y la toma consciencia con la cual eligen ciertas fracciones, según lo que pretenden lograr en sus alumnos, evidenciando cambios que se producen a medida que avanza en cada etapa, así es explícita la transformación del conocimiento.

Desde la estructura multiplicativa que implica división de fracciones, en el enunciado de la tarea $T_{1.1}$ se evidencia un problema con representación discreta, con la cantidad de panqueques que se pueden rellenar. Posteriormente y luego de estudiar las diferentes interpretaciones asociadas a la división de fracciones (cuotativa, partitiva, continua o discreta, de área o lineal, etc.), el grupo propone el enunciado de la tarea $T_{1.2}$ del tipo cuotativa de medida (C.2.1.2), con el uso de un problema continuo lineal de la división de fracciones, donde utiliza lazos que representan a la medida continua. Esto evidencia una transformación del conocimiento, supeditado a la progresión de enseñanza de las fracciones a partir de representaciones continuas, por sobre las discretas, que son más complejos de comprender por los estudiantes (Llinares y Sánchez, 1988).

c) *Análisis desde el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT)*

Desde la enseñanza de la división de fracciones y su riqueza de acuerdo a las tareas propuestas y presentadas a sus pares y a la formadora, para discusión y retroalimentación, no se evidencian cambios desde el enunciado de $T_{1.1}$ a $T_{1.2}$, por lo tanto, nos enfocaremos en los cambios que permiten que surja la tarea $T_{1.3}$, donde se puede evidenciar una transformación respecto a la versión anterior $T_{1.2}$. En los enunciados de $T_{1.1}$ y $T_{1.2}$ consideran una fracción cuyo dividendo es una fracción propia 3/4 y el divisor es una fracción impropia 3/2. Luego, la versión de enunciado de $T_{1.3}$ considera el uso de una división de fracciones cuyo dividendo es un número natural 4 y el divisor es una fracción propia 1/2 que cabe exactamente en el dividendo.

Esto manifiesta una transformación del conocimiento de las futuras profesoras sobre la variedad de fracciones a considerar (C.3.1.3) para el inicio de la enseñanza de las divisiones de fracciones, como se observa en el diálogo de la figura 3, pues las FP están conscientes del tipo de fracciones a considerar y en en enunciado de la tarea T1.3 las cambian para lograr un aprendizaje progresivo, ya que se inicia la enseñanza de la división de fracciones con dividendo con número natural y divisor con fracción propia, progresión de enseñanza de las fracciones propuesta por el texto para la formación de profesores de primaria utilizado en la formación inicial docente en Chile (Lewin, López, Martínez, Rojas y Zanocco, 2014).

d) Analysis from the knowledge of Mathematics Teaching (KMT)

From the teaching of the division of fractions and their wealth, according to the tasks proposed and presented to both peers and trainer for discussion and feedback, we did not observe any changes from $T_{1.1}$ statement to $T_{1.2}$ statement; therefore, we will focus on the changes that allowed task $T_{1.3}$ to emerge, where there was transformation when compared with the previous version $T_{1.2}$. In the statements of $T_{1.1}$ and $T_{1.2}$, they consider a fraction whose dividend is a proper fraction of 3/4 and the divisor is an improper fraction of 3/2. Then, the statement of version $T_{1.3}$ considers the use of a division of fractions whose dividend is the natural number 4 and the divisor is a proper fraction of 1/2 that just fits into the dividend.

This shows a transformation of the knowledge of the future teachers about the variety of fractions to consider (C.3.1.3) for the beginning of the teaching of the divisions of fractions, as observed in the dialogue of figure 3, since the future teachers are aware of the type of fractions to consider, and in the statement of task $T_{1.3}$ they change them to achieve progressive learning, since the teaching of the division of fractions with a dividend with a natural number and a divisor with a type of proper fraction, a progression of teaching of fractions proposed by the text for the formation of elementary education teachers used in initial formation of teachers in Chile (Lewin, López, Martínez, Rojas, & Zanocco, 2014).

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo fue estudiar la transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de educación primaria sobre división de fracciones al diseñar, reformular e implementar tareas matemáticas dentro de un proceso formativo. A partir de los análisis anteriores es posible identificar ciertos cambios progresivos de una tarea a otra.

En el KoT se evidencia una transformación de conocimiento sobre el uso de diversos contextos para la división de fracciones, tanto personales como sociales. Desde el conocimiento de las estructuras multiplicativas de isomorfismo de medida, las situaciones propuestas son del tipo "división de medida", partiendo desde una representación discreta en la T1.1 cambiando a una representación continua desde la T1.2 en adelante. Esto explicita un cambio en la propuesta desde la toma de consciencia de las FP en la progresión de enseñanza más pertinente para iniciar la división de fracciones (Llinares, & Sánchez, 1988).

En relación al KMT hay avances en la riqueza de las tareas propuestas de acuerdo a la progresión en la enseñanza de la división de fracciones, desde el uso del tipo de fracciones (propias, impropias, mixtas, igual a la unidad) a considerar en la operatoria de acuerdo al nivel de dificultad. Esto revela una transformación del conocimiento sobre KMT de las futuras profesoras, sobre la riqueza de la tarea propuesta según tipo de fracciones a considerar y progresión de su enseñanza en contextos de medida con modelos continuos.

Además, parece ser que los aspectos que se transforman en el KoT tienen una incidencia en el KMT, pues cada profundización en el contenido matemático, en este caso en los contextos y en los significados de la división de fracciones, permite tomar decisiones frente al diseño de tareas enriquecedoras, de acuerdo a la progresión en la enseñanza. Esto se evidencia en los cambios que se observan de una tarea a otra, en donde se hace explícito un conocimiento del KoT que luego se manifiesta en el KMT. Por ejemplo, en la tarea T1.2 se utiliza un significado de la división de fracción como medida continua (KoT, C.2.1.2), el cual incide en la riqueza de la tarea T1.3 al presentar una división de un entero en una fracción propia, cuyo dividendo está contenida exactamente en el entero y luego cambiar la unidad de medida por no estandarizada en la tarea T1.4, aspectos que permiten mejorar la progresión de la enseñanza de la división de fracciones (KMT), es decir, se manifiesta transformación del KoT y del KMT, y en consecuencia del MTSK, todo esto en función de la mejora de los aprendizajes de los escolares.

En síntesis, hemos alcanzado nuestro objetivo de investigación al evidenciar transformaciones en las tareas propuestas, cambios que dan directrices de cómo generar instancias de aprendizajes reales en las aulas universitarias, que permitan tomar conciencias a los futuros docentes sobre cómo enseñar matemática. Avanzar en establecer indicadores de conocimiento especializado sobre la división de fracciones en KoT y KMT, dan sustento a estrategias o metodologías para la formación inicial docente.

Nos interesa seguir estudiando la transformación del conocimiento especializado del profesor de matemática, sus implicancias en las decisiones que toman y la manera en que se produce estos cambios, de tal forma de levantar elementos formativos que permiten esta evolución en este segmento de la formación de profesores.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT, Chile, Beca de Doctorado para la formación de Capital Humano Avanzado N° 21160315 y a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), Chile, Proyecto FONDECYT INICIACION N°11190553, Principios de programas de desarrollo profesional efectivos para profesores de matemática.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

La principal contribución de este artículo la realiza la primera autora M.V.M., pues en este documento se muestran los resultados de su tesis doctoral, que se encuentra en la etapa final. Los dos autores secundarios E.R.R y P.F.M contribuyen realizando una revisión integral y mejora del documento, participando en la revisión de la metodología de investigación, análisis de datos y triangulación de resultados.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

El autor correspondiente, M.V.M, pondrá a disposición los datos que sustentan los resultados de este estudio "Transformación del conocimiento especializado de los futuros profesores de primaria en la división de fracciones", previa solicitud razonable. Pues bien, el estudio forma parte de su tesis doctoral que está en proceso y se publicará próximamente.

REFERENCIAS

Blömeke, S., Suhl, U., & Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers’ mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education, 62*(2), 154-171. https://doi.org/10.1177/0022487110386798

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements, M. Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral), Universidad de Valencia, España.

English, L. D., & Kirshner, D. (Eds.). (2015). *Handbook of international research in mathematics education*. Routledge.

Escudero-Ávila, D., Contreras, L., & Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT). In J. Carrillo, L.C. Contreras, & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35-41). SGSE.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.

Flores, P. (2018). ¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 53*, 9-29.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (Doctoral dissertation, Universidad de Huelva).

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). In J. Carrillo, L.C. Contreras, & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 276–295). Macmillan.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill.

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., & Zanocco, P. (2014). *Números. Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica.* SM.

Liñán, M.., Infante, J., & Barrera, V. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema de división de fracciones. *Escuela Abierta*, *14*, 41-63.

Llinares, S., & Sánchez, M. (1988). *Fracciones, la relación parte todo*. Síntesis

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.

Moriel, J. (2014). Conocimientos especializados para enseñar división de fracciones. Tesis doctoral, Doctorado en Educación en Ciencias y Matemáticas, Universidad Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y Hattrup (Eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-219). Erlbaum.

Olanoff, D. (2011). *Mathematical Knowlegde for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions. Thesis* (Doctor of Matematics Education). Syracuse University, New York.

Özel, S. (2013). An Analysis of In-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions. *Anthropologist, 16 (1-2)*, 1-5. https://doi.org/10.1080/09720073.2013.11891330.

Payne, J. (1976). Review of research on fractions. In Lesh, R. (Ed.), *Number and measurement* (vol. 1, pp. 145-188). University of Georgia.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P., & Ponte, J. P. D. (2017). Práctica y reflexión de profesores de matemáticas chilenos bajo la perspectiva del estudio de clases. *Quadrante, 26*(2), 69-97. http://hdl.handle.net/10451/36442

Ribeiro, C. M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de matemáticas*. Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática*. *Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Universidad de Granada.

Sanz, I., & Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). In González, M. T., Codes, M., Arnau, D., & Ortega, T. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). SEIEM.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' Knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25. https://doi.org/10.1007/s10857-005-5119-8

Valenzuela-Molina, M., & Ramos-Rodríguez, E. (2018b). Conocimiento especializado identificado en problemáticas de enseñanza y aprendizaje de fracciones descritas por futuros profesores de educación básica. En *XXXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 32)*. Colombia, Medellín.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academy Press.

Vergnaud, G. (1990). *13 - Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives*. In G. Netchine-Grynberg (Ed.), *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant* (pp. 261-278). Presses Universitaires de France. https://doi.org/10.3917/puf.netch.1990.01.0261

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5–28). Psychology Press/Erlbaum/Taylor & Francis.