

As Dificuldades em Álgebra dos Estudantes de Engenharia: Um Experimento com Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa ^a

^a Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, RS, Brasil

Recebido para publicação em 1 mar. 2020. Aceito, após revisão, em 7 set. 2020

Editor designado: Cláudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Parte dos estudantes de engenharia têm dificuldades na resolução de problemas que envolvem o Cálculo Diferencial e atribui-se isto às dificuldades epistemológicas do Cálculo, a falta de domínio das manipulações algébricas. **Objetivos:** O estudo investiga os problemas com a matemática básica dos estudantes de Engenharias através da análise do erro, tornando esse erro um objeto observável para que, na autogestão do conhecimento, os alunos tomem as ações necessárias, se assim o quiserem, para desenvolverem as competências matemáticas necessárias ao exercício da profissão de Engenheiro. **Delimitação:** Para o estudo realizou-se uma pesquisa qualitativa para investigar as dificuldades em potenciação, radiciação, fatoração, simplificação, propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, ordem das operações, frações algébricas, polinômios e solução de equações polinomiais e não polinomiais de um grupo de estudantes dos cursos de Engenharias. **Cenário e participantes:** Alunos regularmente matriculados nos cursos de Engenharias da Universidade Luterana do Brasil. **Coleta e análise dos dados:** Os dados foram extraídos do banco de dados do sistema de avaliação diagnóstica auxiliada por computador (ADAC) após os estudantes realizarem a sua auto avaliação. **Resultados:** No geral, todos os alunos do grupo apresentaram alguma dificuldade com pelo menos um dos conteúdos avaliados. Mesmo considerando que o erro pode acontecer por distração, foi elevada a quantidade de alunos que responderam incorretamente a dois ou mais itens por conteúdo avaliado, sugerindo que o grupo apresenta maiores dificuldades matemáticas relativas a Álgebra, em específico: simplificações, operações com frações, potenciação, radiciação e resolução de equações não polinomiais. **Conclusão:** Para os graduandos dos cursos de engenharias, o uso da matemática para a resolução de problemas de engenharia é uma das competências a serem desenvolvidas durante sua formação. Pelos resultados da pesquisa realizada, ficaram evidentes as dificuldades matemáticas da maioria dos alunos do grupo com alguns dos conceitos avaliados.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino Superior, Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador.

Engineering Students' Algebra Difficulties: An Experiment with Computer-Aided Diagnostic Assessment

ABSTRACT

Context: Engineering students have difficulties in solving problems involving Differential Calculus, and this is attributed to the epistemological difficulties of Calculus and the lack of mastery of algebraic manipulations. **Objectives:** The study investigates the problems with the basic mathematics of Engineering students through the analysis of error, making this error an observable object so that, in the self-management of knowledge, students take the necessary actions, if they wish, to develop the mathematical skills necessary to exercise the profession of Engineering. **Design:** For the study, qualitative research was carried out to investigate the difficulties in potentiation, radication, factorization, simplification, distributive property of multiplication in relation to addition, the order of operations, algebraic fractions, polynomials, and solution of polynomial and non-polynomial equations of a group of students from Engineering courses. **Setting and participants:** Students regularly enrolled in Engineering courses at Universidade Luterana do Brasil. **Data collection and analysis:** Data were extracted from the database of the computer-aided diagnostic assessment system (ADAC) after students performed their self-assessment. **Results:** In general, all students in the group had some difficulty with at least one of the evaluated contents. Even considering that the error can happen due to distraction, the number of students who answered incorrectly to two or more items by evaluated content was high, suggesting that the group has greater mathematical difficulties related to Algebra, in particular: simplifications, potentiation, operations with fractions, with roots and solving non-polynomial equations. **Conclusion:** For graduates of engineering courses, the use of mathematics to solve engineering problems is one of the skills to be developed during their training. From the results of the research carried out, the mathematical difficulties of most students in the group with some of the evaluated concepts were evident.

Keywords: Mathematics Education, Higher education, Computer-Aided Diagnostic Assessment.

INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte da tese de doutorado com o tema avaliação diagnóstica de matemática, desenvolvida no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) e apresenta os resultados da aplicação de uma Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador (ADAC) com estudantes de Engenharia relativos as dificuldades matemáticas em álgebra, cujos conceitos são necessários para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

O objetivo deste artigo é apresentar as dificuldades em relação aos conhecimentos algébricos, necessários à resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas, para que os estudantes, participantes do experimento, conheçam as suas dificuldades e, com foco na autogestão do conhecimento, tome atitudes para o desenvolvimento das competências necessárias ao exercício da sua futura profissão.

O referencial teórico está organizado com as temáticas relativas as competências matemáticas dos engenheiros e análise de erros que subsidiou o ADAC desenvolvido.

COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS DOS ENGENHEIROS

Apresenta-se o conceito de competência, sob um enfoque laboral¹, como sendo algo desejável e, sob uma perspectiva pedagógica, como necessárias para a formação integral do indivíduo. As competências têm sua fonte na área profissional que, em um processo de formação para o exercício da atividade laboral, definiu-se como sendo as capacitações que tornam o indivíduo apto a realizar uma tarefa específica em determinada profissão. Esta definição se ampliou quando houve a mudança da capacitação para a qualificação do indivíduo, de modo que, além dos conhecimentos, destrezas e atitudes necessários ao exercício da profissão, fossem incluídos o planejamento, a flexibilidade e a autonomia como características a serem desenvolvidas, estendendo-se para uma base profissional mais ampla, mudando da especialização para a não especialização (Bunk, 1994). Ainda, dentro do âmbito profissional, Le Boterf (2001) define a competência como uma combinação de recursos, como conhecimento, saber fazer, atitudes, e recursos do ambiente, como informações e relações que são mobilizados para o desempenho de uma ação.

Bunk (1994) distingue a competência formal, uma atribuição conferida ou outorgada, da competência real, que são as capacidades adquiridas para o desempenho adequado de ações em determinadas situações. Efetivamente, para o exercício da profissão, as competências reais são as que interessam e, dentro do enfoque pedagógico, entende-se que o desenvolvimento dessas competências exige processos de formação integrados para a composição, no indivíduo, do conjunto de capacidades e qualificações profissionais desejados.

Capacidades essas compostas de conhecimentos, destrezas e atitudes, com a finalidade de realizar atividades, mas incluindo os aspectos de organização e planejamento, com o objetivo de resolver os problemas profissionais de forma autônoma e colaborando no seu entorno profissional (Bunk, 1994)

Para o desenvolvimento de competências de alto nível é necessário, segundo Flores (2007), das competências gerais que dão apoio e suporte à aprendizagem, incluindo as competências básicas, ou saberes elementares, como leitura, escrita, literacia matemática, comunicação e a atitude de aprendizagem contínua.

Para o profissional da área de engenharia, dentre as competências gerais que fornecem suporte ao desenvolvimento de competências de alto nível destacam-se as competências matemáticas, como o raciocínio lógico e matemático, o domínio da linguagem matemática, incluindo a leitura e interpretação de gráficos, a modelagem e resolução de problemas e a capacidade de comunicar-se, transitando entre a linguagem natural e as representações matemáticas e vice-versa.

¹ Laboral no sentido de trabalho.

AS COMPETÊNCIAS DESENVOLVIDAS NO CURSO DE ENGENHARIA

A visão antropológica que considera o homem um ser incompleto entende que sua situação o leva, por consequência, a ser um agente transformador da natureza e a ideia de transformação do ambiente é a principal atividade do profissional de engenharia. Logo o objetivo da engenharia de manipular e controlar a natureza envolve a necessidade de identificar, relacionar e matematizar, ficando explícita a necessidade da estrutura conceitual sobre funções, em conjunto com a compreensão das características de valor e variação dos fenômenos. Assim, são primordiais, para a modelagem e matematização da situação-problema, os conhecimentos matemáticos apresentados nas disciplinas de Cálculo.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os Cursos de Graduação em Engenharia do Brasil e nas definições dos programas de credenciamento internacionais para cursos de engenharia, como o EUR-ACE (EUROPEAN ACCREDITED ENGINEER) e o ABET (ACCREDITATION BOARD FOR ENGINEERING AND TECHNOLOGY) observa-se as competências matemáticas direta e indiretamente nas suas definições e critérios.

As Normas e Diretrizes para Acreditação de Programas de Engenharia da EUR-ACE (2015) estabelecem que o processo de aprendizagem deve permitir que os graduados do Bacharelado demonstrem conhecimento e compreensão da matemática e de outras ciências básicas subjacentes à sua especialização em engenharia, em um nível necessário para atingir o outros resultados do programa.

Para a *Accreditation Board for Engineering and Technology* (ABET, 2019) o aluno deve ser capaz de identificar, formular e resolver problemas complexos de engenharia, aplicando princípios de engenharia, ciências e matemática. No Brasil, as DCN para Cursos de Graduação em Engenharia (2019) estabelecem que os graduados do curso de graduação em Engenharia devem ser capazes de modelar os fenômenos, sistemas físicos e químicos, utilizando ferramentas matemáticas, estatísticas, computacionais e de simulação, bem como prever os resultados de os sistemas através dos modelos. Assim, a engenharia envolve a aplicação intencional de ciências matemáticas e naturais e um corpo de conhecimento, tecnologia e técnicas de engenharia.

Deste modo ser competente matematicamente influi no êxito da profissão, logo os conhecimentos matemáticos são relevantes para o desenvolvimento das competências exigidas para os egressos desses cursos. Alguns conceitos matemáticos são considerados conhecimentos gerais, como leitura matemática, uso de simbologia matemática, manipulação algébrica, conhecimentos elementares de geometria. Porém, outros são considerados de caráter complexo, como o uso da matemática na resolução de problemas profissionais e na modelagem matemática de situações-problema.

Um dos objetivos dos cursos de engenharia é desenvolver as habilidades e competências matemáticas dos alunos, mas durante este processo ocorrem equívocos ou erros que não permitem a correta execução das atividades propostas durante a formação.

ANÁLISE DE ERROS

Os erros aparecem nas produções devido as concepções equivocadas sobre aspectos fundamentais da matemática, pelo uso incorreto dos dados, pelo uso do modelo equivocado, pelo uso de procedimento equivocado sistematizado, incorrendo em manipulações algébricas, por não ter levado em conta as restrições estabelecidas na situação-problema, e outras razões como afirmam Cury (2003, 2007), Pochulu (2009) e Rico (1998). Para cada uma dessas razões, o erro, ou equívoco, aparece como uma evidência associada a uma causa, de modo que a análise do erro permite identificar o seu motivo, ou seja, quais são as dificuldades dos alunos na execução de determinadas atividades matemáticas.

É preocupação do professor e do estudante compreender e tratar as causas das dificuldades que levam à execução inadequada das atividades propostas. O aluno, com foco na própria formação, dentro do paradigma da autogestão do conhecimento; e o professor, com uma visão mais geral, para avaliar sua prática pedagógica e a didática empregada, pela análise do grupo de alunos que não atingem os objetivos propostos.

Uma característica dos problemas matemáticos é que a resposta de um estudante pode ser classificada como certa ou errada e, mesmo quando é possível subdividir em soluções parciais, as respostas a elas ainda são do tipo certo ou errado (Rico, 1998). Colocando o foco de atenção nas respostas incorretas, identifica-se o erro como uma evidência da falta ou deficiência de um conhecimento, método ou processo, que leva o aluno, frente a determinada situação-problema, a responder incorretamente, sendo essa a premissa base para o desenvolvimento da presente pesquisa.

Entende-se que os erros são parte da produção dos alunos durante a aprendizagem da matemática e podem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem (Borasi, 1996; Cury, 2003; Rezende, 2003; Rico, 1998), pois, ao cometer um erro, o aluno expressa a incompletude do seu conhecimento, permitindo a interferência para levar à compreensão do que lhe falta.

Portanto o erro é parte essencial do processo de aprendizagem, pois o conhecimento é a construção de novos saberes, que tomam como base conhecimentos anteriores. No transcorrer da sua formação, a formalização e a sistematização equivocada do conhecimento podem levar o aluno a incorrer em erros, por inferências inadequadas, baseadas nesses conhecimentos *a priori* ou pela falta de compreensão dos novos conhecimentos, seja pela ação pedagógica do professor ou pelas dificuldades intrínsecas da disciplina (Cabral & Baldino, 2008; Rico, 1998).

Segundo Rico (1998), a falibilidade do conhecimento humano, individual ou coletiva, está na capacidade de considerar conceitos e procedimentos desenvolvidos inadequadamente como verdadeiros, incluindo ideias contraditórias, interpretações e justificações falsas. Logo os erros não aparecem por mero acaso; eles surgem baseados em um marco conceitual consistente e fundamentado nos conhecimentos *a priori*, associados ao pensamento lógico e à intuição do indivíduo sobre o assunto, que utiliza de uma lógica empirista.

Para a maioria dos pesquisadores, o erro não é uma ação acidental, mas algo que surge a partir de estratégias e regras pessoais empregadas na resolução de problemas e baseadas nas suas experiências particulares, interpretações e conhecimentos matemáticos iniciais (Borasi, 1996; Cury, 2003; Rezende, 2003; Rico, 1998). Desse modo, a maioria dos erros é extremamente persistente, pois reflete o conhecimento do aluno sobre um conceito. No entanto, existem os erros que ocorrem por azar ou por distração. Esses são menos persistentes, pois não refletem o conhecimento real ou inadequado do estudante.

Resultados importantes encontram-se na regularidade dos erros ou padrões consistentes dos erros. De forma individual, tem-se um padrão quando o sujeito mostra o mesmo erro ao realizar atividades ou problemas matemáticos similares; em nível coletivo, o padrão se revela quando se tem pessoas diferentes cometendo os mesmos erros em certas etapas do desenvolvimento da aprendizagem.

Brousseau, Werner e Davis (1986) chamam a atenção para algumas características do erros nas produções dos estudantes: os erros dos alunos são, muitas vezes, o resultado de algum procedimento sistemático que contém uma falha, sendo utilizado frequentemente e de maneira consistente; os alunos muitas vezes, têm conceitos errados sobre aspectos fundamentais da matemática; a observação do aluno mostra frequentemente que ele usa procedimentos falhos e possui conceitos errôneos, que não são reconhecidos pelo professor; os estudantes, com frequência, inventam seus próprios métodos e, até mesmo, ignoram o método apresentado pelo professor.

O método de processamento da informação supõe que os problemas matemáticos podem ser decompostos em vários componentes de processamento e, como essas dificuldades são de natureza interna, é necessário utilizar métodos indiretos de observação. Entre estes, se encontra a análise dos erros dos sujeitos e suas produções matemáticas (Rico, 1998).

Apesar das dificuldades na classificação, as categorizações fornecem informações básicas e importantes para as pesquisas em aprendizagem matemática, assim como auxiliam o professor na sua prática, ao compreender e prever determinados erros persistentes do coletivo, permitindo o planejamento de plano de ação voltado a minorar os problemas de aprendizagem dos tópicos associados.

Para se ter acesso à informação sobre o conhecimento do estudante sobre um tema e suas dificuldades associadas, é necessário que este externar, na forma de uma produção escrita, falada ou em outra forma de expressão, para que seja realizada uma análise e se atribua um valor de juízo sobre essa informação. Para a pesquisa realizada, utilizou-se uma ferramenta de avaliação computacional, buscando acessar o conhecimento e identificar as dificuldades associadas aos erros durante a avaliação.

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

A investigação visou identificar os conceitos, prévios ou os associados à epistemologia do Cálculo, que estudantes dos cursos de engenharia não dominam e que

dificultam a resolução de problemas que envolvem Derivadas usando um sistema de avaliação diagnóstica auxiliada por computador. Para alcançar o objetivo foi desenvolvido como uma ferramenta de auto avaliação para que o estudante consiga identificar suas dificuldades, fornecendo informação sobre o seu conhecimento em relação ao um tema tornando o erro um objeto observável, permitindo que o estudante possa interagir e, eventualmente, superá-lo.

O sistema denominado como ADAC (Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador), composto de duas avaliações, uma sobre os conhecimentos de álgebra e outra sobre resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas, foi utilizado em um experimento realizado com um grupo de 30 estudantes, denominados respectivamente de A1 a A30, matriculados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de engenharias da Universidade Luterana do Brasil.

Apresenta-se neste artigo os resultados relacionados a avaliação denominada como *Matemática*. Os itens dessa avaliação tiveram por objetivo identificar a existência de dificuldades relacionadas à álgebra, desenvolvida na Educação Básica, pois as pesquisas realizadas por Cury (2003), Feltes (2007), Pochulu (2009) e Ferreira (2005) apontam as dificuldades algébricas como a causa mais relevante dos erros matemáticos no Ensino Superior.

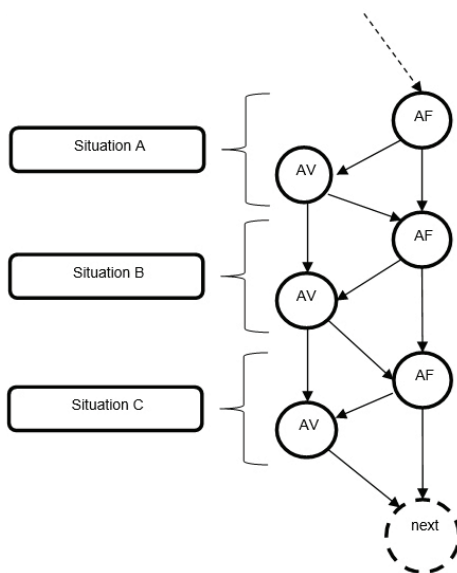
Os itens de avaliação foram organizados com a sequência: expressões algébricas, aplicação da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição e subtração, simplificações algébricas, operações com frações algébricas, equações não polinomiais (exponenciais, trigonométricas, logarítmicas), radiciação e potenciação.

Por ser aplicado por um sistema computacional, as questões são do tipo falso/ verdadeiro, compostas de um enunciado que apresenta uma igualdade ou uma desigualdade, de modo a verificar a existência de dificuldade em relação ao objeto de avaliação. A parte textual do enunciado é semelhante para todos os itens da avaliação *Matemática* e reforçam a necessidade de ser respondido com o objetivo de auto avaliar-se e recomendando a não seleção de respostas ao acaso. O texto do enunciado dos itens é: *Determine se a igualdade (desigualdade) é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos. Não escolha ao acaso uma resposta, lembre-se que esta avaliação é para identificar as suas dificuldades.*

Cada tópico avaliado contém três pares de itens (A, B, C), compostos de uma afirmação falsa (AF) e uma afirmação verdadeira (AV), para o mesmo objeto de avaliação, totalizando seis itens, que são apresentados conforme os erros e acertos do respondente. A avaliação por tópicos é organizada conforme a Figura 1 e inicia com uma afirmação falsa (AF). Caso o tópico seja respondido incorretamente, ou se for selecionada uma das alternativas *Não tenho certeza* ou *Não sei*, o ADAC encaminha para outra afirmação falsa (AF) e, respondendo corretamente, o ADAC encaminha para uma afirmação verdadeira (AV) do mesmo tipo, confirmando o conhecimento relativo ao tópico avaliado.

Figura 1

Diagram of the items related to a topic of Mathematical assessment



Essa organização possibilita a apresentação de três a seis itens, dependendo dos erros e acertos do respondente ao tópico avaliado. O teste diagnóstico de Matemática com os conceitos de Álgebra possui 42 itens que são apresentados conforme o desempenho do aluno durante a realização da avaliação e definidos pelas regras de encadeamento descritas.

ANÁLISE DE DADOS

O ADAC foi implementado como um sistema WEB e, sendo uma avaliação computacional, os alunos puderam realizar as atividades fora da instituição. Todos foram informados sobre os objetivos da pesquisa e instruídos como deveriam responder à avaliação, e o caráter da auto avaliação como um instrumento para a auto gestão do conhecimento e evidenciando a necessidade de respostas fidedignas aos seus conhecimentos.

Sobre os participantes temos que, dos trinta estudantes, dezessete têm 25 anos ou mais, que sugere a existência de um período, entre Ensino Médio e o Ensino Superior, no qual o aluno esteve fora de uma instituição de ensino, pois todos os participantes são do segundo ou terceiro semestre dos seus cursos. Os alunos com idade inferior a 25 anos totalizam treze, com somente dois menores de 20 anos.

Em relação a dificuldade dos itens da avaliação *Matemática*, metade dos alunos consideraram como difícil ou muito difícil, atribuindo seus erros e dificuldades a um ensino fraco, tanto no Ensino Fundamental quanto Ensino Médio, a falta de estudo, e erros por distração. Quando questionados sobre se deveriam saber resolver as questões, dezoito alunos concordaram plenamente que deveriam saber resolver os itens, um aluno discordou os demais não opinaram.

Para uma análise global da avaliação *Matemática* e o grupo de participantes, apresenta-se na Tabela 1 o número de alunos que responderam incorretamente, ou seja, selecionaram uma opção errada ou declarou categoricamente não saber com a opção *não sei*. As colunas estão organizadas com *erraram um item ou mais*, *erraram dois itens ou mais* e *erraram três itens*. Tomando como referência os alunos que responderam incorretamente a três itens abordando o mesmo conteúdo, somente dois conteúdos estão abaixo de 30%, ordem das operações e a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição, ou seja, são os itens que os alunos apresentaram menos dificuldades.

A Tabela 1 mostra que para todos os conceitos, uma proporção considerável de alunos errou em pelo menos um item, mas deve-se considerar que alguns erros podem ser por engano ou distração. Portanto, as informações pertinentes ao aluno, e o foco de sua atenção, são os conteúdos que ele errou duas ou mais vezes.

Tabela 1

Número de alunos com respostas erradas por conteúdo matemático

Número de alunos que	erram 1 item ou mais		erram 2 itens ou mais		erraram 3 itens	
Expressões algébricas (potenciação)	27	90%	22	73%	18	60%
Expressões algébricas (ordem das operações)	22	73%	10	33%	6	20%
Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição)	23	77%	12	40%	8	27%
Expressões algébricas (simplificação com frações)	29	97%	25	83%	14	47%
Expressões algébricas (frações algébricas)	23	77%	19	63%	15	50%
Solução de equações não polinomiais	30	100%	28	93%	25	83%
Expressões algébricas (radiciação)	27	90%	22	73%	22	73%

Fazendo uma análise dos conceitos avaliados, tem-se na Tabela 2 o conjunto de 6 itens com as igualdades de expressões algébricas envolvendo a ordem das operações básicas. Esse conjunto de itens foi apresentado a trinta alunos, com 22 deles errando pelo menos um item e dez respondendo incorretamente a dois ou mais itens.

A sequência M1/M2 apresenta um baixo percentual de erro, mas, mesmo envolvendo somente adição e multiplicação, quatro alunos responderam incorretamente (A7, A14,

A36, A37) e, analisando o desempenho individual, verifica-se que A14, A36 e A37 responderam incorretamente a mais dois itens do conjunto. Dos 26 alunos encaminhados para M2, dois alunos, A1 e A24, responderam incorretamente, com A1 errando somente este item, que sugere um erro por distração, e A24 errando dois outros itens.

Tabela 2

Número de respostas não corretas para a Ordem das operações

	Enunciado do item	Total de respostas	Erradas	Não sei	Total incorretas	% incorretas
M1	$3 + (2 - b) \cdot a = 5a - ab$	30	3	1	4	13
M2	$(5x + 3y) + (4x + 2y) \cdot 2 = 13x + 7y$	26	2	0	2	8
M3	$2(3a + b)^2 = (6a + 2b)^2$	6	3	0	3	50
M4	$3(y + x)^2 = (3y + 3x)(y + x)$	27	13	2	15	56
M5	$12 - 5 \text{sen}(2x) = 7 \text{sen}(2x)$	18	3	3	6	33
M6	$a + b \cdot 2 - b = a + b$	24	6	0	6	25

O percentual de erros para M3 e M4 sobe para 50% e sugere dificuldades na ordem das operações, quando envolve a multiplicação e a potenciação. Pela lógica de apresentação, o item M3 foi respondido por seis alunos, dos quais três consideraram correto aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, antes da potenciação, mostrando uma generalização equivocada operada pelos alunos do Ensino Fundamental e Médio (Feltes, 2007) que perdura no Ensino Superior. O item M4, com o maior percentual de erros, foi respondido incorretamente por treze alunos, sugerindo dificuldades na identificação da potência como o produto de dois termos, no qual é possível aplicar a propriedade associativa e a distributiva da multiplicação em relação à adição.

O item M5 apresenta uma expressão trigonométrica e foi respondido incorretamente por seis alunos, três afirmando ser verdadeira a igualdade e três declarando não saber se estava correta. Supõem-se que o erro e as dúvidas sejam porque os alunos, habituados com as operações aritméticas, realizem primeiro a soma dos números, ignorando a precedência da multiplicação sobre a adição.

O item M6 foi identificado como uma igualdade inválida por seis alunos, pois o hábito de indicar o produto de polinômios sem parênteses (Cury, 2003) faz com que os alunos identifiquem como incorreta a igualdade, pois os mesmos interpretam como um produto de dois binômios.

Apesar de serem expressões algébricas simples, as respostas incorretas aos itens evidenciam dificuldades nas manipulações algébricas elementares, que se refletem nas operações algébricas mais complexas, envolvendo várias operações, como os demais itens da avaliação *Matemática*.

Os itens para avaliar dificuldades na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição trazem situações diversas, dentre as quais a generalização equivocada do produto de dois binômios (M7, M11) e operações de multiplicação à direita e à esquerda.

A Tabela 3 apresenta os números de resposta para o conjunto de itens para *Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação)*. Chamou atenção o item M12 com nenhuma resposta errada, sendo que o mesmo é semelhante a M7 e M11, com, respectivamente, 37% e 46% de respostas erradas. Analisando o conjunto de itens, tem-se que 24 alunos responderam aos itens M7 e M12, com seis alunos (A1, A3, A13, A16, A21, A38) errando M7 e acertando M12. Isso sugere uma generalização equivocada quando os termos são iguais nos dois binômios, como é o caso de M7.

Para M12, como os termos do binômio são diferentes, os alunos realizam corretamente a operação. Logo, esses estudantes têm conhecimento e sabem aplicar a propriedade da distributiva da multiplicação sobre a adição, mas mostram ter uma regra própria para o produto de binômios com termos iguais. Isso também pode ser observado pela quantidade de erros de M11.

O item M8, com 58% de respostas erradas, mostra que, mesmo sabendo que a igualdade em M7 está errada, mais da metade dos alunos direcionados para M8 não identificam que ela apresenta uma igualdade correta não identificando a simplificação algébrica.

Tabela 3

Itens de avaliação para a EA (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição)

	Enunciado do item	Total de respostas	Erradas	Não sei	Total incorretas	% incorretas
M7	$(x - y)(-x + y) = -x^2 - y^2$	30	11	0	11	37
M8	$(3xy^2 - xy)\frac{x}{y} = (3x^2y - x^2)$	19	5	6	11	58
M9	$2\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{9}\right)3 = \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$	22	2	7	9	41
M10	$x^2 + 2xy - x - 2y = -x(1 - x) + 2y(x - 1)$	21	2	2	4	19
M11	$(2x + y)(x + 3y) = 2x^2 + 3y^2$	13	5	1	6	46
M12	$(w + y)(z - k) = zw - kw + zy - ky$	24	0	0	0	0

Pela lógica de encadeamento o item M9 é apresentado para os que erram M7 ou M8. Identifica-se que 30% dos alunos declararam não saber se a mesma é correta ou não.

O item M10 é o segundo item com menor número de erros com duas respostas erradas e duas *não sei*.

Para avaliar as dificuldades nas simplificações algébricas, foram construídos os itens que verificam se os alunos estabelecem as relações de equivalência entre a fração dada e o resultado obtido pela simplificação. Os resultados da Tabela 4 apontam que parte do grupo apresenta dificuldades em relação ao conteúdo, sendo os resultados do item M16 uma forte evidência para essa afirmação, com 86% de respostas erradas.

Tabela 4

Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (simplificação algébricas)

	Enunciado do item	Total de respostas	Erradas	Não sei	Total incorretas	% incorretas
M13	$\frac{6x^2 + 2y^2}{6} = x^2 + 2y^2$	30	8	1	9	30
M14	$\frac{8yx^2 - 4y^3x}{2xy} = 4x - 2y^2$	21	6	2	8	38
M15	$\frac{4(x-y)}{k+(x-y)} = \frac{4}{k}$	17	5	3	8	47
M16	$\frac{4x - 2xy}{(2-y)4} = \frac{x}{2}$	22	14	5	19	86
M17	$\frac{3x + 2y}{x + 2} = 3 + y$	27	8	7	15	56
M18	$\frac{8x^2 - yx}{x^2} = 8 - \frac{y}{x}$	15	6	1	7	47

Em relação aos erros nas simplificações de frações algébricas, Notari (2002) identifica a simplificação de apenas um dos termos de uma soma do numerador ou do denominador como erros cometidos pelos alunos do Ensino Médio e Superior. Essa situação é apresentada em M13 e M15 e parte do grupo considera válido essa simplificação, com maior número de respostas incorretas em relação às respostas *não sei*. O item M17 apresenta uma dupla simplificação incorreta com 56% de respostas incorretas, com a quantidade de respostas *não sei* próxima das incorretas, mostrando que nesta situação há dúvidas nesse tipo de operação.

As afirmações verdadeiras M14 e M18 têm, respectivamente, 38% e 47% de respostas erradas e reduzido número de respostas do tipo *não sei*, ou seja, os alunos têm certeza que as simplificações estão erradas, não identificando os itens como afirmações verdadeiras.

O item M16, com 86% de respostas incorretas, quatorze respostas erradas e cinco respostas do tipo *não sei*, sugere dificuldades em identificar os fatores comuns para a simplificação da fração algébrica.

Para avaliar as dificuldades nas operações com frações algébricas os itens de M19 a M24 exploram situações com as operações de soma, divisão de frações e solução de equações de primeiro grau. Considerando o grupo de participantes e o conteúdo avaliado verifica-se que dezenove alunos erraram dois ou mais itens do conjunto, indicando a falta de domínio nas operações com frações algébricas por 63% do grupo.

Pelos resultados na Tabela 5, observa-se que M19 (AF) é respondido incorretamente por treze alunos, que são direcionados para M21 (AF), com 93% de respostas erradas, e depois para M23 (AF), com 94% de respostas erradas. Pelo banco de dados, foi possível identificar doze alunos que responderam incorretamente a essa sequência de itens AF, indicando que esses alunos apresentam grandes dificuldades para realizar operações com frações.

Analisando a sequência das três afirmações verdadeiras, M20, M22 e M24, identificou-se que sete alunos acertaram os três itens. Pela Tabela 5, verifica-se que os itens M20, M22 e M24 tiveram respectivamente 12%, 25% e 46% de respostas erradas, com um aumento percentual conforme o aumento do grau de dificuldade dos itens e, conseqüentemente, um direcionamento gradual para os itens AF.

Tabela 5

Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (frações algébricas)

	Enunciado do item	Total de respostas	Erradas	Não sei	Total incorretas	% incorretas
M19	$\frac{5}{y} + \frac{2}{x} = \frac{7}{x+y}$	30	7	6	13	43
M20	$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{2x+y}{4}$	17	2	0	2	12
M21	$3x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{2}$	15	6	8	14	93
M22	$\frac{2}{3}x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{4}$	16	4	0	4	25
M23	$\frac{\frac{x}{4}-1}{\frac{3}{4}-\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{4}-1\right) \cdot \left(\frac{4}{3}-\frac{2}{x}\right)$	18	10	7	17	94
M24	$\frac{4x-x}{3} = 1 \text{ para } x \neq 0$ $2x - \frac{5x}{3}$	13	4	2	6	46

Esse conjunto de itens corrobora as dificuldades matemáticas relativas a operações com frações algébricas, ao apresentar situações às quais os alunos não responderam corretamente, incorrendo nos erros identificados por Notari (2002).

As equações não polinomiais (exponenciais, trigonométricas e logarítmicas) foram avaliadas pelos itens M25 a M30 e são apresentados na Tabela 6. Ressalta-se que o grupo teve o pior desempenho nesses itens, com todos os participantes respondendo incorretamente a pelo menos um dos itens e 25 errando os três itens.

Para o par de itens M25 e M26, que solicitam a solução de uma equação exponencial, 26 alunos responderam incorretamente a um dos dois itens. O par de itens M27 e M28 tiveram, respectivamente, 81% e 89% de respostas erradas evidenciando as dificuldades relativas a resoluções de equações trigonométricas. Os itens M29 e M20 apresentaram 66% e 73% de respostas erradas.

Outra informação relevante sobre os conhecimentos dos alunos em relação à solução de equações não polinomiais pode ser inferida pela relação entre as respostas do tipo *não sei* e as respostas erradas. Excetuando o item M28, os demais itens têm o dobro ou mais de respostas *não sei*, na comparação com o número de respostas erradas.

Tabela 6

Número de respostas não corretas para Equações não polinomiais

	Enunciado do item	Total de respostas	Erradas	Não sei	Total incorretas	% incorretas
M25	$3^x - 2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$	30	6	11	17	57
M26	$5^x = 4 \Rightarrow x = \frac{\log 4}{\log 5}$	13	3	6	9	69
M27	$\text{sen } 2y = 3 \Rightarrow y = \text{arcsen} \frac{3}{2}$	26	7	14	21	81
M28	$\cos(3 - y) = 5 \Rightarrow y = 3 - \arccos 5$	9	5	3	8	89
M29	$\ln(y + 2) = 5 \Rightarrow \ln y = 3$	29	5	14	19	66
M30	$5 = \ln(4y) \Rightarrow y = \frac{e^5}{4}$	11	2	6	8	73

A opção *não sei* não pode ser considerada um distrator, pois não traz uma situação que um aluno com pouco conhecimento pode considerar como verdadeiro. Quando o aluno afirma *não sei*, ele mostra que não tem conhecimento sobre o objeto de avaliação, afirmando e assumindo que não tem ideia do que é certo ou errado ou do que fazer.

Esse grupo de itens reafirma a importância das opções do tipo *não sei* nas avaliações diagnósticas, pois elas permitem ao aluno mostrar às partes interessadas, tanto ele quanto o professor, seu conhecimento sobre objeto de avaliação.

Analisando o grupo de participantes pela Tabela 7, observa-se também um baixo desempenho, com 27 alunos (73%) respondendo incorretamente a pelo menos um dos itens. Pelo banco de dados, identificou-se que nove alunos responderam incorretamente à sequência de itens M31, M33 e M35, indicando dificuldades desse grupo de estudantes.

Os dados da Tabela 7 mostram que dezoito alunos responderam incorretamente ao item M31, ou seja, 70% dos alunos entendem equivocadamente que a raiz da soma é a soma das raízes. A lógica de encadeamento acabou apresentando o item M32 para os nove alunos que responderam corretamente M31, mas seis desses nove alunos não souberam que M32 apresenta uma igualdade verdadeira mostrando um conhecimento parcial desses alunos sobre a simplificação com raízes.

A desigualdade em M33 foi respondida por 27 alunos com dezesseis respostas incorretas e quatro respostas *não sei*, representando 74% de respostas incorretas. O item M34 foi respondido por dez alunos, com somente uma resposta errada, e sugere a compreensão de que a raiz enésima do produto é igual ao produto das raízes enésimas, mas a compreensão de uma operação mecanizada leva a uma generalização equivocada para a soma, como em M31.

Tabela 7

Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (radiciação)

	Enunciado do item	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
M31	$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$	30	18	3	21	70
M32	$x\sqrt{xy} = \sqrt{x^3y}$	9	5	1	6	67
M33	$\sqrt{9(x+y)^2} \neq 3x + 3y$	27	16	4	20	74
M34	$\sqrt{121x^4y^2} = 11x^2y$	10	1	0	1	10
M35	$\sqrt{\frac{16x^2}{2}} \neq 2x\sqrt{2}$	21	9	6	15	71
M36	$\sqrt{\frac{x^3}{4y^2}} = \frac{x}{2y}\sqrt{x}$	15	0	7	7	47

O item M35, com nove respostas erradas e seis respostas *não sei*, totalizou 71% de respostas incorretas. Ressalta-se que os alunos que erraram a desigualdade de M33 foram direcionados para M35 evidenciando problemas desse grupo em radiação. O item M36 teve 47% de respostas incorretas, mas com o fato interessante de que todas são do tipo *não sei*. Considerando que os alunos que acertaram M34 e M35 são os que responderam M36, não fica claro o motivo das sete respostas *não sei*, podendo estar relacionada a dificuldades com a racionalização aplicada no termo da direita.

O grupo de participantes teve um baixo desempenho nos itens com expressões matemáticas envolvendo a potenciação. Identificou-se que 27 alunos (73%) responderam incorretamente a pelo menos um item e 22 alunos erraram dois ou mais itens.

O número de respostas erradas observado para o item M37, na Tabela 8, mostra que vinte alunos (83%) responderam incorretamente ao item, que foi desenvolvido para verificar se os alunos se confundem ao considerar que a parte numérica e a literal estão elevados à mesma potência, mesmo que estejam sem parênteses. Fato que se comprova pelos resultados, pois 83% aplicaram a regra mudando o termo elevado à potência, do denominador para o numerador e trocando o sinal da potência, mas ignorando que ela está aplicada somente ao x . Verifica-se que os cinco alunos que acertaram M37 também responderam a M38 corretamente, logo é possível afirmar que esses alunos compreendem essa situação.

O item M39, apresentado para os 25 alunos que também responderam incorretamente a M37, foi respondido incorretamente por dezesseis deles, que consideraram correto que a soma de potências de mesma base opera como o produto de potências de mesma base, deixando notório o uso de teoremas ou definições distorcidas como categorizado por Hadar et al. (1987).

Tabela 8

Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (potenciação)

	Enunciado do item	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
M37	$\frac{1}{3x^2} = 3x^{-2}$	30	20	5	25	83
M38	$4x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}$	5	0	0	0	0
M39	$x^2 + x^3 = x^5$	25	16	1	17	68
M40	$4a^4 5a^3 = 20a^7$	13	2	0	2	15
M41	$(x - y)^2 = x^2 + y^2$	19	8	1	9	47
M42	$(x - 1)^3 = -(1 - x)^3$	21	10	2	12	57

O item M40, apresentando a operação correta de potências, foi respondido corretamente por onze de treze alunos e somente dois (A4 e A39) responderam que as operações estavam erradas. Analisando os dados de A4, verificou-se que o mesmo errou duas simplificações de frações algébricas e duas potenciações, incluindo M40. Já o aluno A39 errou as três operações com a propriedade distributiva, duas simplificações, três frações algébricas, três radiciações e três potenciações. Os dados sugerem que A4 apresenta alguma dificuldade com simplificação e potenciação e A34 tem dificuldades nas operações e manipulações algébricas no geral.

A generalização equivocada de que a potência da soma é a soma das potências leva a identificar M41 como correto (Feltes, 2007), com oito de dezenove alunos errando o item. O item M42, com 57% de respostas erradas, apresenta uma situação não usual que requer uma manipulação mais elaborada e, talvez por isso, a não identificada como estando correta.

Cruzando algumas respostas, identificou-se que os dois alunos que responderam corretamente a M3, identificando como errada a propriedade distributiva sobre a potência, afirmaram que M42 é falsa, talvez por entenderem esta como uma situação semelhante. Isso evidencia a falta de conhecimento sobre as propriedades de potência, assim como operações algébricas que justificam M42 como correta.

Fato interessante pôde ser observado analisando o desempenho do aluno A26, que acertou todos os itens de frações algébricas, respondeu não saber resolver todas as equações não polinomiais e respondeu incorretamente a todos os itens de radiciação. Esse comportamento sugere domínio em frações algébricas, falta de conhecimento para as equações não polinomiais e um conhecimento equivocado para radiciação.

No geral, todos os alunos do grupo apresentaram alguma dificuldade com pelo menos um dos conteúdos avaliados. Mesmo considerando que o erro pode acontecer por distração, foi elevada a quantidade de alunos que responderam incorretamente a dois ou mais itens por conteúdo avaliado, sugerindo que o grupo apresenta maiores dificuldades matemáticas relativas a Álgebra, em específico: simplificações, operações com frações, potenciação, radiciação e resolução de equações não polinomiais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A avaliação *Matemática* foi resolvida por 30 participantes e produziu 844 respostas aos itens com 428 respostas corretas, equivalendo a 51% das respostas; 416 respostas não corretas, distribuídas entre respostas erradas e respostas do tipo *não sei*, correspondendo um total de 49%. O percentual de respostas erradas evidencia, no grupo participante, a existência de dificuldades relacionadas aos conteúdos de Álgebra desta avaliação, que são estudados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Sendo as repostas não corretas o foco das análises e, considerando o universo de 416 respostas incorretas da avaliação *Matemática*, verificou-se que as repostas do tipo *não sei* representaram 35,5% destas, sendo uma proporção considerável e uma importante fonte de informação sobre os conhecimentos dos alunos, pois estes externaram, de maneira direta e explícita, seu desconhecimento sobre o objeto de avaliação, atribuindo um maior grau de precisão à inferência sobre as dificuldades dos respondentes, pois entende-se que ao afirmar que não sabe o aluno assume sua dificuldade sobre o objeto de avaliação.

Por ser uma avaliação de caráter auto avaliativo a inclusão das opções *não sei* e *não tenho certeza* permitem que o aluno expresse de maneira clara a sua dificuldade em relação ao objeto de avaliação apresentado no item. Entende-se que questões do tipo verdadeiro ou falso com somente essas duas opções levam o aluno a uma escolha ao acaso não permitindo identificar a sua dificuldade, sendo necessário apresentar outros itens para uma melhor inferência. Estes itens foram usados como repostas porque os alunos entenderam que não estavam sendo submetidos a um exame para seleção ou qualificação, como é o caso das provas bimestrais das disciplinas nas quais a escolha de uma resposta ao acaso, pode levar ao acerto e a uma melhor pontuação.

Mesmo considerando que o erro pode ocorrer por distração, foi alto o número de alunos que responderam incorretamente a dois ou mais itens por conteúdo avaliado, sugerindo que o grupo apresenta maiores dificuldades matemáticas relacionadas à Álgebra, em especial: simplificações, potencializações, operações com frações, com raízes e resolução de equações não polinomiais.

Para os graduandos dos cursos de engenharias, o uso da matemática para a resolução de problemas de engenharia é uma das competências a serem desenvolvidas durante sua formação. Pelos resultados da pesquisa realizada, ficaram evidentes as dificuldades matemáticas da maioria dos alunos do grupo com alguns dos conceitos avaliados.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

A.I.R.H. concebeu a ideia e adaptou a metodologia desenvolvendo as atividades e o Sistema ADAC para coleta de dados, bem como realizando as análises.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados foram obtidos dos relatórios de atividades dos alunos na realização da avaliação diagnóstica matemática, disponíveis no ADAC em <http://ppgecim.ulbra.br/adac/painel/>, e serão disponibilizados pelo autor para correspondência, A.I.R.H., mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

- ABET. (2019). *Criteria for Accrediting Engineering Programs*.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. Ablex.
- Brousseau, G., Werner, T., & Davis, R. B. (1986). Observing student at work. In: B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspective on Mathematics Education*. Reidel.
- Bunk, G. (1994). La transmisión de las competencias en la formación y perfeccionamiento profesionales de la RFA. *Revista Europea de Formación Profesional*, 1, 8–14.
- Cabral, T. C. B., & Baldino, R. R. (2008, July 27). Cálculo Infinitesimal para un curso de Engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*. <https://doi.org/10.5335/ree.v25i1.216>
- Cury, H. N. (2003). Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: *Anais do XXXI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. <http://www.abenge.org.br/cobenges-antiores/2003/2003--xxxi-cobenge-rio-de-janeiro-rj>
- Cury, H. N. (2007). *Análise de Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Autêntica.
- European Network for Engineering Accreditation. (2015). EUR-ACE Framework Standards and Guidelines. *Mental Health Practice*, (31).
- Feltes, R. Z. (2007). *Análise de erros em Potenciação e radiação: um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio*. (p. 1–136). <http://tardis.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3108/1/000388459-Texto+Completo-0.pdf>
- Ferreira, D. H. L., & Brumatti, R. N. M. (2005). Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. *Horizontes*, 27(1), 51–60.
- Flores, J. G. (2007). La evaluación de competencias laborales. *Educación XXI*, 10(0), 83–106. <https://doi.org/10.5944/educxx1.1.10.297>
- Hadar, N. M., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3–14.
- Homa, A. I. R. (2010). *Universidade luterana do brasil*. Universidade Luterana do Brasil.
- Le Boterf, G. (2001). *Ingeniería de las competencias. Colección formación y desarrollo* (Vol. 4).
- Notari, A. M. (2002). *Simplificação de frações aritméticas e algébricas : Um diagnóstico comparativo dos procedimentos*. Pontifícia Universidade Católica – São Paulo.
- Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1–15.
- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Universidade de São Paulo. http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/publico/WANDERLEY_REZENDE.pdf
- Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. In J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*. Iberoamérica.