ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5716

Desarrollo del Pensamiento Variacional para la Enseñanza de Nociones Preliminares de Cálculo. Una Experiencia de Aula en la Educación Básica

Enrique Mateus-Nieves [a]
Edwin Moreno Moreno [b]

[a] Universidad Externado de Colombia. Departamento de Matematicas. Bogotá, Colombia.
[b] Universidad Externado de Colombia. Bogotá, Colombia

Recebido para publicação em 1 mar. 2020. Aceito, após revisão, em 26 mar. 2020
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto Este trabajo incorpora resultados que ayudan a comprender cómo favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de educación básica secundaria. **Objetivo**: relacionar el pensamiento variacional con algunas nociones preliminares del cálculo. **Diseño**: Se presenta una secuencia de actividades para analizar aspectos variacionales del concepto de función y los resultados de su implementación. **Escenario y participantes**: la experiencia se desarrolla en una institución de educación media con una muestra de 40 estudiantes que pertenecen al grado noveno. **Recolección y análisis de datos**: se elaboró una secuencia didáctica (SD) a partir de los resultados de una prueba diagnóstica y se aplicó al grupo de estudiantes. La información recopilada de la aplicación de la SD se sometió a un análisis inductivo. **Resultados**: Centramos la atención en la forma en que el estudio de procesos de variación permitió a los alumnos construir acercamientos significativos para la comprensión y el uso de las funciones como modelos de situaciones de cambio. **Conclusiones:** A pesar de las limitaciones institucionales y las dificultades de los alumnos, se observa en los jóvenes desarrollo y surgimiento de argumentos variacionales, partiendo de los conocimientos previos que relacionan con experiencias de la vida cotidiana.

Palabras clave: Pensamiento variacional; Co-variación; funciones, Nociones de cálculo infinitesimal

Development of Variational Thinking for the Teaching of Preliminary Notions of Calculus. A Classroom Experience in Basic Education

ABSTRACT

Corresponding author: Mateus-Nieves, Enrique. jeman124@gmail.com

Context: This work incorporates results that help to understand how to favor the development of variational thinking and language in students of basic secondary education. **Objective**: to relate variational thinking with some preliminary notions of calculus. **Design**: a sequence of activities is presented to analyse variational aspects of the function concept and the results of its implementation. **Scenario and participants**: the experience takes place in a secondary education institution with a sample of 40 students belonging to ninth grade. **Data collection and analysis:** a didactic sequence (DS) was elaborated from the results of a diagnostic test and applied to the students' group. The information collected from the application of the DS was submitted to an inductive analysis. **Results**: we focused our attention on the way in which the study variation processes allowed students to build meaningful approaches to understanding and using functions as models of change situations. **Conclusions**: despite the institutional limitations and the difficulties of the students, the development and emergence of variational arguments is observed in young people, based on previous knowledge that they relate to experiences of daily life.

Keywords: Variational thinking; Co-variation; functions, Notions of infinitesimal calculus

Desenvolvimento do pensamento variacional para o ensino de noções preliminares de cálculo. Uma experiência de sala de aula na educação básica

RESUMO

Contexto: este trabalho incorpora resultados que ajudam a compreender como favorecer o desenvolvimento do pensamento variacional e da linguagem em alunos do ensino médio. **Objetivo**: relacionar o pensamento variacional com algumas noções preliminares de cálculo. **Design**: Uma sequência de atividades é apresentada para analisar os aspectos variacionais do conceito de função e os resultados de sua implementação. **Cenário e participantes**: a experiência se passa em uma instituição de ensino médio com uma amostra de 40 alunos pertencentes ao nono ano. **Coleta e análise de dados:** uma sequência didática (SD) foi elaborada a partir dos resultados de um teste diagnóstico e aplicada ao grupo de alunos. As informações coletadas com a aplicação da SD foram submetidas a uma análise indutiva. **Resultados**: focamos nossa atenção na maneira como o estudo dos processos de variação permitiu aos alunos construir abordagens significativas para compreender e usar funções como modelos de situações de mudança. **Conclusões**: Apesar das limitações institucionais e das dificuldades dos alunos, observa-se nos jovens o desenvolvimento e surgimento de argumentos variacionais, a partir dos conhecimentos prévios que relacionam às experiências do cotidiano.

Palavras-chave: Pensamento variacional; Co-variação; funções, noções de cálculo infinitesimal.

INTRODUCCIÓN

El trabajo se enmarcó en la línea del Pensamiento Matemático y Lenguaje Variacional incursos dentro del Cálculo Variacional[1], que estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos. Se diseñó una secuencia didáctica aplicada en el aula con 40 alumnos de básica secundaria, particularmente de grado noveno, de una institución educativa de carácter público estatal de la ciudad de Bogotá. Las actividades aplicadas permitieron analizar diversos escenarios de variación (qué magnitudes cambian, cómo y cuánto cambian), caracterizar variaciones entre las magnitudes, diferenciarlas de las variables y explorar los diferentes registros de representación que los estudiantes utilizan; elementos que favorecen el desarrollo de la visualización, como uno de los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático.

Nos propusimos determinar los niveles de razonamiento covariacional, que los estudiantes desarrollan en un ambiente de clase común, dado que la percepción de los profesores que laboran en la institución, es que los estudiantes presentan dificultades, por un lado, para "modelar"[2] cuando una variable cambia en función de otra y para interpretar los diferentes registros de representación (gráfico, tabular, simbólico y lenguaje natural). Esta situación se corrobora con los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas internas asociadas al componente del pensamiento variacional y los bajos desempeños obtenidos en las pruebas estatales denominadas Saber[3].

Buscamos integrar al grupo de estudiantes, en comprender diferentes fenómenos de la naturaleza donde aparecen manifestaciones de la variación y el cambio, tales como: manejo de unidades y magnitudes longitudinales; aumento o disminución de la temperatura a lo largo del día; llenado de recipientes de diferentes alturas, pero con volumen constante. Las distintas magnitudes que caracterizan estos fenómenos están íntimamente relacionadas de modo que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Dolores (2000) expresa que, históricamente, estas

[1] El Cálculo Variacional se ocupa de trabajar la formulación matemática de funciones, de maximizar, minimizarlas.

[2] En este trabajo modelar constituye una estructura análoga del mundo real o situación imaginaria, evento o proceso que una persona construye en la mente al razonar. En otras palabras, representar o mostrar ideas y relaciones [en este caso matemáticas mediante objetos, ilustraciones, gráficas, ecuaciones entre otros métodos. (Moreira y Rodríguez, 2002)].

[3] El informe entregado a la Institución Educativa por parte del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2016) en las Pruebas Saber 2015 indicó que el 55% de la muestra para grado noveno no usaba ni relacionaba diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. En 2016 la cifra fue del 72%.

relaciones tuvieron fundamental importancia en la búsqueda de las leyes generales que rigen el cambio, considerando que este tipo de relación dio origen a la noción de función.

Introdujimos el concepto de función a partir de situaciones problema relacionadas con el contexto de la población, posibilitando el uso del lenguaje cotidiano de los estudiantes en el dialogo de saberes, para luego institucionalizarlo en el lenguaje matemático formal. Después de efectuar la intervención las estrategias que tuvieron un notorio avance fueron: identificar patrones de regularidad y elaborar tablas de valores, identificar cantidades fijas y cantidades variables que intervienen en una situación; indicar valores máximos y mínimos; rango de variación de una cantidad en una situación problema.

ANTECEDENTES

Mateus-Nieves y Hernández (2020) muestran que, con el desarrollo y formalización del cálculo infinitesimal, el concepto de función adquirió un alto nivel de abstracción que para un estudiante de educación básica y media no es sencillo de alcanzar. Los modelos actuales de enseñanza han asumido este concepto abstracto provocando que la comprensión del concepto de función dependa del entendimiento de nociones, también abstractas, de conjunto, par ordenado y correspondencia, entre otras, lo que no permiten al estudiante captar las ideas de variación y cambio que subyacen a este concepto, dificultando las conexiones con otras ciencias. Al respecto, López y Sosa (2008) manifiestan:

> La forma en que usualmente se transmite el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes (p. 309).

Reconociendo que el concepto de función ha estado ligado en la historia a la modelación de procesos de variación, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2002), Villa (2012), Dolores y Salgado (2009), Tall (2009) y Mateus-Nieves y Hernández (2020), han centrado su atención en la forma en que la variación puede convertirse en un eje fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto. Ahora bien, reconocemos que el estudio de las funciones desde una perspectiva variacional está relacionado con los procesos de experimentación, reflexión, construcción de significados y formas de expresar la generalidad como resultado de los procesos de modelación matemática. Este contexto se convierte en herramienta que permite el análisis y modelación de diversos fenómenos de variación provenientes de la matemática misma, de la vida cotidiana o de las ciencias naturales y experimentales que, en un sentido más amplio, influye positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes, así como de su lenguaje variacional, en tanto sean capaces de comunicar sus ideas.

Uno de los conceptos fundamentales para la compresión de las matemáticas modernas es el concepto de función; tradicionalmente las funciones son abordadas desde los modelos elementales (lineal, afín, cuadrática) partiendo de la expresión algebraica para ser representada en otro registro de representación, generalmente gráfico o tabular (Deulofeu, 1991), obviando que los sistemas de escritura numéricos, las notaciones simbólicas, las expresiones algebraicas, los gráficos cartesianos, constituyen sistemas semióticos de expresión, los cuales deben diferenciarse del objeto matemático que representan (Duval, 1999). A pesar de la importancia de la compresión de la función, para identificar variables implicadas en un fenómeno dinámico y la relación de dependencia entre ellas, los estudiantes que culminan secundaria emergen con una débil compresión de dicho objeto matemático (Carlson et al., (2003). Por lo anterior es posible afirmar que las nociones preliminares del cálculo están directamente relacionadas con el aprendizaje de la razón de cambio, la identificación de variables y la covariación que se da entre estas.

El aprendizaje de las matemáticas en los últimos tiempos y especialmente en la educación básica, ha dado un salto didáctico, Vasco (2002) resalta que han sido varias las recomendaciones que se han hecho para pasar de la explicación de conceptos, teoremas y definiciones, así como de la memorización de fórmulas o reconocimiento de las gráficas de funciones, al desarrollo del pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio o probabilístico y variacional).

Muñoz (2015) menciona que el desarrollo del pensamiento variacional se estructura en el análisis de los fenómenos de cambio, dado que cumple un importante rol dentro de la resolución de problemas que tengan sustentación en la variación, cambio y modelación de procesos de la vida cotidiana relacionada con el desarrollo e interacción con los otros tipos de pensamiento matemático. Este pensamiento también contribuye a desarrollar sistemas conceptuales, matematización de situaciones, identificación de variables y establecimiento de las relaciones que se tienden entre los demás pensamientos (Vargas, Reyes, & Cristóbal, 2016).

Cabezas y Mendoza (2016) realizan un análisis didáctico de producciones estudiantiles, relativas al pensamiento variacional; consideran que "uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a las matemáticas de la variación y el cambio en los sistemas didácticos y a situaciones que involucran variación en contextos" (p. 15). Estos autores caracterizan y categorizan diferentes formas de manifestaciones del pensamiento variacional, resaltando la importancia del dominio de elementos básicos del cálculo para la generación de modelos matemáticos y el uso de diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros), como aspectos necesarios para el desarrollo de habilidades cognitivas como: visualización, argumentación, representación y comunicación entre otras.

Como parte del pensamiento matemático y el lenguaje variacional relacionamos el estudio de las estrategias y acciones que los estudiantes utilizan cuando se enfrentan a situaciones que requieren el análisis del cambio. Cantoral y Farfán (2003) expresan que:

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (p. 185).

Compartimos la posición planteada en Mateus-Nieves y Devia (2021) que, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional es un proceso lento. Construir de manera significativa la noción de cambio requiere el dominio e integración de diferentes conceptos, algunos elementales, otros más avanzados como los procesos de abstracción, justificación, visualización, estimación y razonamiento. Interesa en este trabajo, identificar las características del pensamiento y lenguaje variacional y la forma en que se desarrolla. Cabrera (2009, p. 55) expresa que "este tipo de pensamiento se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes", las cuales se trabajan y hacen evolucionar a través de situaciones problema. De esta manera las nociones de variación y cambio, en el pensamiento y lenguaje variacional, quedan centradas en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando lo que cambia, cuantificando ese cambio y analizando cómo se dan esos cambios.

Con relación a los procesos cognitivos implicados, las situaciones deben ser tales que los estudiantes no necesiten sólo recurrir a la memoria para responderlas, sino que los conduzcan, validen, modifiquen o construyan argumentos. El tratamiento y conversión entre distintas representaciones será de fundamental importancia para el entendimiento de las situaciones de variación.

MARCO TEÓRICO

Fundamentamos este trabajo en dos elementos: el Pensamiento matemático variacional y el Lenguaje Variacional.

Pensamiento matemático Variacional

Lo ubicamos dentro del pensamiento matemático avanzado, por los temas que tratamos: función, variación, covariación, dado que, comprende las relaciones entre la matemática de la variación, el cambio y los procesos de pensamiento. En este contexto, un concepto primordial es el cambio, modelado matemáticamente mediante la diferencia. Las diferencias dan cuenta de cuánto cambia la variable en un proceso de variación. La incorporación de elementos variacionales y el otorgamiento de significado a los distintos elementos relacionados a la variación de una variable en una función favorecerán la construcción de dicha función. En un sentido más amplio, influirán positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos, y también, de su lenguaje variacional, en tanto sean capaces de comunicar sus ideas (Dolores & Salgado, 2009).

Dentro del desarrollo del pensamiento y la producción de conocimiento matemático está el empleo de nociones asociadas a los registros numérico, gráfico, algebraico y verbal. Duval (1999, 2006) señala que la comprensión integral de un objeto está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación pertenecientes a registros diferentes. En general, las tareas de conversión entre diferentes sistemas de representación son minimizadas y eso produce limitaciones en la comprensión y en el desarrollo de uno de los estilos de pensamiento: el visual.

En este contexto se indagó las nociones, relacionadas con el concepto de función, que construyen los estudiantes cuando interactúan con actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que favorecen el tratamiento y la articulación de diferentes sistemas de representación. El primer referente en el ámbito nacional sobre el pensamiento variacional es el establecido por los estándares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2014) donde consideran que:

> […] el pensamiento variacional combina lo cognitivo y lo didáctico para propiciar su génesis, potenciación y desarrollo. En este orden de ideas, se plantea que el pensamiento matemático variacional debe considerarse como la base sobre la cual se estructure el currículo matemático, ya que éste es un pilar y eje de los otros pensamientos matemáticos (numérico, espacial o geométrico, estocástico, métrico) (p. 15).

Desde esta directriz podemos afirmar que, el pensamiento variacional favorece el desarrollo de los demás pensamientos toda vez que los articula, conecta e interrelaciona. De igual forma el estudio de los procesos de variación y cambio en el ámbito de la Educación Matemática retoma diferentes objetos matemáticos y favorece la modelación de procesos de la vida cotidiana (MEN, 2014). Basado en estos aportes del MEN, Vasco (2002) expone que los lineamientos curriculares en el ámbito nacional no son claros frente a lo que debería ser entendido por pensamiento variacional toda vez que no se da una definición formal, ello repercute en dificultades para su interpretación. Precisamente, él mismo propone una aproximación a lo que se podría entender por este objeto matemático "el pensamiento variacional da la posibilidad de distinguir lo que cambia de lo que permanece constante y las posibles regularidades que se pueden generar" (Vasco, 2002, p. 20).

Dolores y Salgado (2009) coinciden en que: "El pensamiento y lenguaje variacional son el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, de aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio" (p. 65). Cabezas & Mendoza (2016) presentan una perspectiva en la que incluyen dentro del pensamiento variacional:

[…] la elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación, los objetivos del pensamiento variacional se orientan a desarrollar estructuras de pensamiento que permitan identificar, analizar e interpretar, de manera natural, situaciones relacionadas con el cambio y, a su vez, modelarlos y transformarlos en otros más simples" (p. 15).

Conjeturamos que: percibir, identificar y caracterizar la variación en diferentes contextos es el objeto fundamental del pensamiento variacional concordando con aportes expuesto por Dolores y Salgado (2009). De otro lado, el pensamiento variacional puede ser abordado desde la covariación a la hora de interpretar los fenómenos dinámicos y las razones de cambio, para Vasco (2002) "el objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo" (p. 4). Asumir este pensamiento desde esta perspectiva, involucra un cambio sustancial en la manera de abordarlo, implica considerar estas situaciones como sistemas en doble sentido donde se correlacionan las magnitudes de manera cuantificada y cualificada.

Carlson et al. (2002) indican, por un lado, que se debería dar un cambio de énfasis de una imagen coordinada de dos variables que cambian simultáneamente a una imagen coordinada de razón de cambio instantánea con cambios continuos en la variable independiente para funciones asociadas a situaciones dinámicas y por otro, que se deberían establecer los niveles en que los estudiantes se encuentran a la hora de abordar estos constructos y facilitar, en consecuencia, contenidos escolares que promuevan si no la superación, sí una compresión de qué niveles alcanzan aquellos.

En la misma tendencia de enfocar el abordaje del análisis de las situaciones dinámicas desde lo covariacional, Vasco (2002) resalta que: "el pensamiento variacional no consiste en saberse una definición de función, pues generalmente la definición de función es estática" (p. 103), tampoco es aprenderse las fórmulas o dibujar gráficas. Plantea entonces que el objeto de estudio del pensamiento variacional es la "covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación" (p. 104). Visto desde esta perspectiva, García (2016) presenta una definición para razonamiento covariacional:

> Actividad mental que implica la coordinación de dos cantidades, lo que a su vez hace necesario un seguimiento al valor de cada cantidad y de esta forma, darse cuenta de que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante (p. 22).

Niveles de Razonamiento Covariacional

Se reconocen cinco niveles de desarrollo de imágenes para la covariación, estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen. Carlson et al. (2002) hacen referencia a la comprensión de la covariación como "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades que cavarían" (p. 123), ello propone un cambio significativo a la forma tradicional de pensar en una variable que depende absolutamente de la otra. Asocian este concepto al conjunto de habilidades de raciocinio y conceptualizaciones que se involucran en la compresión de los fenómenos dinámicos, identifican los procesos cognitivos relaciona dos en el desarrollo del razonamiento covariacional y establecen un marco para la construcción de imágenes, las cuales incluyen acciones mentales que inciden en la interpretación y representación de las funciones asociadas a dichos eventos. En la tabla 1 presentamos una síntesis de estos niveles.

Tabla 1

Niveles de Razonamiento covariacional. (Carlson et al., 2003, p. 129)

Niveles	**Características**
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la

variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

En la tabla 2 mostramos cómo Carlson et al. (2002) asocian la covariación al conjunto de habilidades de raciocinio y conceptualizaciones que se involucran en la compresión de los fenómenos dinámicos. Identifican los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo del razonamiento covariacional y establecen un marco para la construcción de imágenes que incluyen acciones mentales que inciden en la interpretación y representación de las funciones asociadas a dichos eventos. Resaltamos esta herramienta, dado que permite un acercamiento a la caracterización que podría presentar un estudiante en dichos estadios, así como las acciones mentales requeridas y los comportamientos exteriorizados.

Tabla 2

Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. (Carlson et al., 2003, p. 128)

Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamiento**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (ej., *y* cambia con cambios en *x*).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio.

	con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos.

METODOLOGIA

La investigación se abordó desde el enfoque cualitativo, en el marco de la investigación-acción propuesta por Elliot (2000). Con un proceso inductivo en el que partimos de la exploración (documental y de campo) para pasar a una descripción de la realidad que posibilitó la formulación de perspectivas teóricas, comprensión de contextos e interpretación de estos. Se hizo análisis de libros de texto reportados en el programa de asignatura y que han sido de uso común en nuestro entorno, fueron confrontados con los diseños curriculares propuestos para la escuela secundaria en nuestro país, se revisó la malla curricular propuesta. Lo que nos llevó a plantear una intervención desde la planeación, elaboración y ejecución de una secuencia didáctica; donde condujéramos al estudiante a un primer acercamiento visual e intuitivo al concepto de función, partiendo del estudio de la variación, atendiendo a cuatro aspectos básicos: identificar magnitudes, variables (independiente-dependiente), el cambio y la razón de cambio, cuidando de no relacionarlos con la derivada, tema de enseñanza en la etapa final de la educación media en nuestro país.

Se desarrollaron actividades que permitieron analizar distintos escenarios de variación, qué magnitudes cambian, cuánto cambian, cómo cambian, que llevaron al estudiante a la necesidad de caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio y que posibilitan, a su vez, la exploración de los diferentes registros de representación que los alumnos utilizan para comprender dicha variación. Se tuvo en cuenta que los estudiantes alternaran los registros: verbal, tabular (numérico y analítico), requiriéndoles el tratamiento y conversión entre los mismos (gráfico y simbólico).

La investigación se desarrolló en cuatro fases: 1) Exploratoria: revisión documental, planteamiento y validación del problema de investigación. 2) Intervención: planeación, construcción y pilotaje. La investigación se realizó con 40 estudiantes de un grupo que cursa grado noveno. Elaboramos, piloteamos y aplicamos una prueba diagnóstica, los resultados nos permitieron tomar acciones para la elaboración de la secuencia didáctica (SD). 3) De intervención: aplicamos la SD al grupo de alumnos, recolectamos la información. 4) Análisis y resultados: mediante análisis inductivo se describe la información recogida, se plantean conclusiones y recomendaciones.

RESULTADOS Y ANALISIS

Diseño e implementación de la secuencia. La articulación de la secuencia didáctica con los libros de texto y la malla curricular nos permitió identificar que la enseñanza de las funciones no se corresponde generalmente con sus orígenes, privilegiando en cambio aspectos lógicos formales, como el registro $f(x)$ para expresar una función: la no identificación de cuál es la variable independiente y cuál la dependiente cuando se construye una tabla de valores. Procesos que se realizan mecánicamente, sin contextualizar al estudiante por qué la dependencia de una de ellas con respecto a la otra. Encontramos que se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos, de forma mecanicista, dejando de lado la formación de ideas variacionales. Si bien la introducción de ideas fundamentales del cálculo está planteada desde la escuela secundaria, esto no se alcanza en la práctica, por lo menos en la mayoría de las instituciones de nuestro entorno, lo que nos permite inferir que, los alumnos tienen su primer contacto con la matemática del cambio solo hasta que llegan a la universidad.

Tuvimos en cuenta que desde sus orígenes el cálculo muestra un análisis de la variación en los fenómenos dinámicos, caracterizado por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, que mantuvimos en el diseño de las actividades de la SD. En la clase previa a la implementación de la SD, se realizaron actividades relacionadas al comportamiento variacional de variables relacionadas, esto es, llevar al estudiante a reconocer cuándo una variable es independiente y cuándo otra obtiene resultados de la independiente, convirtiéndose en dependiente. Estos datos se registraron en tablas de valores que permitieran a los estudiantes visualizar la relación de dependencia e indecencia entre estas. Aquí los estudiantes dieron cuenta de procesos de indicaciones verbales, de coordinación de las dos variables (Carlson et al., 2002) reflejando acciones mentales del nivel 1 (AM1). Con descripciones en lenguaje "coloquial" que da cuenta de la diferencia entre las variables dependientes e independientes como la del estudiante E1: "*el nivel del agua cambia, porque a medida que se va llenando el tanque el nivel del agua aumenta*" o la del estudiante E4: "*la capacidad del tanque no cambia, porque el recipiente es sólido*" lo que nos permitió identificar niveles de comprensión de las magnitudes que varían y aquellas que no lo hacen.

Basados en esta experiencia creamos la SD planteada desde tres situaciones didácticas particulares: Magnitudes y variables, Registros de representación y Niveles de razonamiento covariacional. Para la primera, se presentaron situaciones cotidianas a los estudiantes en las que activaran saberes previos sobre magnitudes; reconocieran el concepto de magnitud y presentaran diferentes ejemplos de estas; asociaran el concepto de magnitud al de variable en situaciones dinámicas, con el objeto que lograran establecer la relación de cambio entre variables. Para la segunda: registros de representación, se buscó que los estudiantes hicieran uso adecuado del plano cartesiano (ubicación de pares ordenados y establecimiento de escalas); representar en tablas de datos valores de situaciones dinámicas; describir un fenómeno de variación a partir del lenguaje verbal; Usar una expresión algebraica para construir la representación tabular de situación de cambio. Para la tercera, buscamos que los estudiantes identificaran los niveles de razonamiento covariacional que usan para representar situaciones dinámicas; registraran el proceso de construcción del significado de covariación desde diferentes registros de representación.

Durante la aplicación de la primera situación se pudo evidenciar que después de la intervención, los estudiantes presentaron mayor habilidad para: identificar magnitudes presentes en situaciones dinámicas, determinar cuáles permanecían constantes y cuáles variaban. Se propuso unas imágenes con recipientes de diferente forma, pero de igual volumen. La idea que se les propuso fue que había tres llaves que emitían chorros de agua a la misma velocidad y volumen, se les pregunto cuál de estos recipientes se llenaría primero, cuál necesitaría más tiempo para llenarse, debían justificar sus respuestas. Aquí los estudiantes desarrollaron la habilidad para señalar las variables implicadas en dicho tipo de eventos, por ejemplo, pudieron identificar, además de las magnitudes diámetro, longitud del chorro, cantidad de agua y tiempo, otras que podrían ser consideradas: tamaño y forma del recipiente, definiendo cuáles datos representaban variables cuantitativas y cuáles cualitativas, diferenciando variables dependientes de independientes.

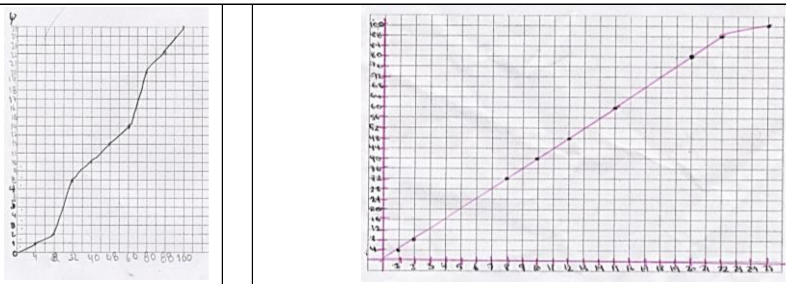
Un hecho particular que nos llamó la atención durante la aplicación de la situación dos, donde propusimos una tarifa telefónica, en relación con la distancia entre los escenarios y el tiempo de duración de la llamada, los estudiantes asignaron variables que no existían en las representaciones gráficas. Por ejemplo, el estudiante E2 indica la distancia como una variable representada en el plano cartesiano, lo cual no es correcto, ya que, aunque la distancia es una variable implícita en la situación el gráfico sólo presentaba como magnitudes correlacionadas al tiempo de duración de la llamada y el costo total. Luego de llevarlos a reflexionar, los estudiantes reconocieron y diferenciaron las magnitudes de la unidad de medida y establecieron relaciones de dependencia lógica como el caso del estudiante E1 que responde: "*No le contestaron*" y E2: "*No llamó o no le contestaron*" dan cuenta de ello. Aquí es evidente que los estudiantes claramente establecen la relación entre la variable costo total de una llamada y tiempo de duración de esta, sin embargo, persistió en E4 y E5 la confusión de señalar algunas unidades de medida, indistintamente de la magnitud.

Otro aspecto que deseamos resaltar, fue al presentar a los estudiantes situaciones de llenado de recipientes ovalados, con el mismo volumen que los cilíndricos rectos, contribuyó a la descripción del cambio de variables en situaciones dinámicas (AM2), el estudiante E1 menciona: "*Cuando es más cerrado, la gráfica es más parada y cuando se pone ancho la curva es más acostada*" y la de E3: "*Si el recipiente es angosto se llena más rápido y en la parte ancha se llena lento*" o E4: "*Cuando termina en punta se hace como una curva hacia arriba*". Con estas afirmaciones y los gráficos realizados por los estudiantes en el plano cartesiano, se puede establecer que, se pudo reconocer asociación de cambios de manera simultánea entre diferentes variables, evidenciando resultados significativamente mejores, que contribuyó a la descripción de cambio de variables en situaciones dinámicas AM2.

Con relación a la situación didáctica tres, niveles de razonamiento covariacional, asignamos a los estudiantes una fórmula y solicitamos darle valores para posteriormente realizar el gráfico en el plano cartesiano, solamente el 20% identificó fácilmente la variable independiente, asignándole el eje x. Con relación a la graduación de ejes, el 50% tomó los valores de la tabla obtenida y los ubicó directamente en el plano sin considerar una escala adecuada. En la *Figura 1* se evidencia como E4 toma los valores directamente del registro tabular y los ubica en el plano, sin embargo, indica los ejes *X* y *Y* adecuadamente. E5 ajusta la escala adecuadamente pero frente a la falta de espacio hace un salto en los últimos valores, ello incide en un gráfico impreciso.

Figura 1

Imagen del gráfico cartesiano de E4 (izq.) y E5 (der.)



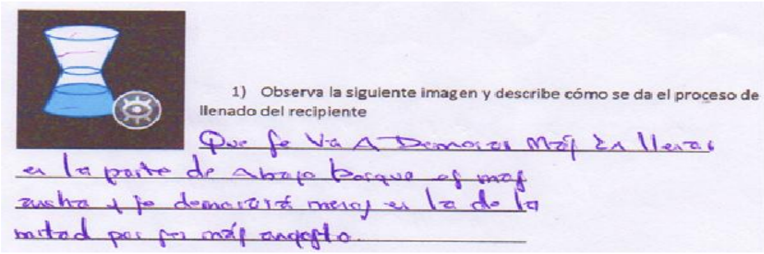
CONCLUSIONES

Repasamos con los estudiantes distintas maneras de expresar magnitudes y variables, los llevamos a identificar patrones de regularidad con el ánimo que identificaran cómo, cuándo, cuánto y dónde cambian, haciendo descripciones cualitativas, que, luego debían expresarse simbólicamente a través de tablas de valores, donde pudieran identificar cantidades fijas y variables. Lo que permitió identificar una aproximación al nivel 3, coordinación cuantitativa, donde las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Al respecto validamos la postura de Villa (2012) quien menciona que los niveles cuatro y cinco requieren desarrollos propios de "la matemática continua [límites y derivada] que permitan al estudiante una consciencia donde la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio" (p. 22). Elementos que están fuera del ámbito trabajado en esta investigación, (estudiantes de básica secundaria).

Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 fueron alcanzadas por la mayoría de los estudiantes dado que, lograron identificar magnitudes presentes en situaciones dinámicas y determinar cuáles permanecían constantes y cuáles variaban. Revisamos detalladamente cuáles estudiantes alcanzaban el nivel 3 (Coordinación cuantitativa), aquí se presentó la limitación de asociar el desempeño de este nivel, exclusivamente a la verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada, para la situación de llenado de tanques -comportamiento de crecimiento acelerado o desacelerado del fenómeno -AM3.1- Figura 2. y a la identificación de puntos importantes de la gráfica (puntos de inflexión y extremos) AM3.2 En términos de los estudiantes, esto se dio solamente como “más rápido o más lento”.

Figura 2

Registro verbal de la conciencia de cambio acelerado en E1



Las AM2 se discriminan en torno a la coordinación del sentido de cambio de la variable dependiente con relación a la independiente AM2, y la construcción de una representación gráfica que refleje el sentido de cambio AM2 (*Figura 3*). Frente a los avances señalados, la atención a los cambios instantáneos en otro tipo de situaciones dinámicas no se dio de la misma forma, por ejemplo, al analizar gráficas de temperatura y solicitar la descripción de estas, el 100% de los estudiantes se limitaron a indicar valores máximos y mínimos o a indicar valores de temperatura para meses diferentes, lo que permite inferir que se quedaron en la sola verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

Figura 3

Imágenes de los gráficos cartesianos realizados por E1 y E2 frente a situaciones de llenado de recipientes

Cuando presentamos a los estudiantes magnitudes y variables (independientes- dependientes); con el ánimo que distingan e identifiquen cuáles eran magnitudes y cuáles variables; y, entre las variables, cuáles eran independiente y cuáles dependientes, los alumnos recurrieron, en general, a sus conocimientos previos, trabajando la idea de cambio como variación de algo. Se observó que identificaron la representación gráfica con una situación de cambio en la altura de llenado de recipiente. La mayor dificultad fue usar los registros de representación (tabular y gráfico). Interpretación, diferenciación de las nociones de magnitud y variable los confundía, al punto de no poder establecer en cual eje ubicar la variable independiente de la dependiente. En este sentido, sus concepciones sobre aspectos relacionados con el concepto de función se revelaron bastante pobres.

Los estudiantes presentaron dificultades para enfrentar situaciones que implican la covariación de dos cantidades (magnitud) y manejo de diferentes registros representación de esas magnitudes (tablas, presentación en la recta numérica, en el plano cartesiano). Mezclaban unidades de longitud con las de temperatura en un mismo registro. No distinguían que deben tratarse por separado, dado que representan situaciones diferentes, (las presentaban en una misma tabla, y las operaban como si fueran semejantes.) De igual forma la modelación de situaciones dinámicas en diferentes registros de representación tabular, cartesiano, verbal y simbólico fue bastante débil durante la aplicación de las situaciones didácticas uno y dos.

En la situación tres integramos los registros de representación (escrito, tabular, gráfico), invitando a los estudiantes a usar fórmulas que incorporen las variables presentadas en las tablas que habían construido. Buscábamos que expresaran esta información en el plano cartesiano, mirando qué tipo de grafica resultaba, sin embargo, este es un tema que amerita mayor trabajo con este tipo de población. Por último, llevamos los invitamos a evaluar el trabajo realizado con el objeto pudieran validar, comparar, ajustar y si fuere necesario corregir lo construido por ellos, para luego formalizar los temas tratados.

Durante la situación tres, se presentó una función definida algebraicamente, cuyo objetivo principal fue que trabajaran con los cambios expresados en las tablas de valores que construyeron a partir de la obtención de las diferencias (incrementos) y de los cocientes entre estas diferencias. Aquí, se presentaron muchas dificultades para la resolución de esta actividad, las ideas que se buscaban generar surgieron en varios aspectos: en los fenómenos que cambian a cada instante, es posible calcular la velocidad de llenado en determinado intervalo, pero ese resultado no alcanza para determinar el comportamiento preciso de los cambios. Los alumnos reflexionaron sobre el hecho de que la velocidad de llenado del tanque no es la misma que la media y por lo tanto no se puede calcular de la misma manera. El planteo en el registro numérico facilitó el cálculo de los espacios recorridos y las velocidades medias. Se sorprendieron ante la forma de cálculo planteada en el primer inciso, haciendo coincidir instante inicial con final. Con respecto a la interpretación de la tabla, dada la imposibilidad de usar la estrategia anterior, les pareció natural asignar variaciones de tiempo para el llenado de tanques de diferente forma pero que tienen el mismo volumen.

Para establecer si un estudiante alcanzaba el nivel 3 (Coordinación cuantitativa) se presentó la limitación de asociar el desempeño de este nivel, exclusivamente a la verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada-comportamiento de crecimiento acelerado o desacelerado del fenómeno-AM3.1-(Figura 3), y a la identificación de puntos importantes de la gráfica (puntos de inflexión y extremos) AM3.2. En términos de los estudiantes, se dio solamente como "*más rápido o más lento*".

Compartimos la posición planteada por Mateus-Nieves y Moreno (2021) "estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado" (p. 44986). Decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral, 2004). De ahí que consideramos, también, los registros de las observaciones del docente y de un colaborador presente en el aula durante el desarrollo de la secuencia. Esto fue un aporte valioso para describir los distintos momentos de interacción, qué dudas surgieron a lo largo de la resolución de las actividades, cómo respondían los alumnos a las preguntas del docente.

RECOMENDACIONES

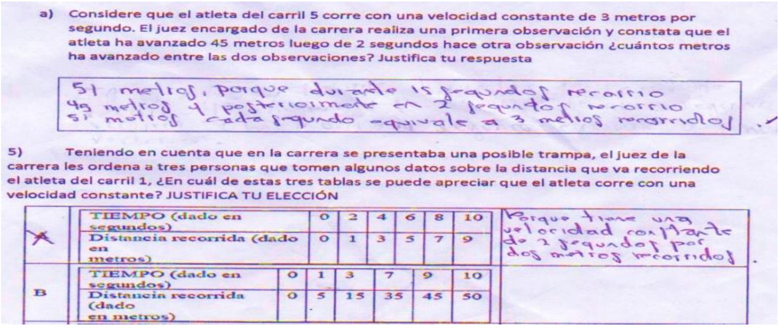
Un elemento fundamental que se puede atribuir a los mejores niveles de desempeño del razonamiento covariacional está asociado con la manipulación de diferentes registros de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico. De acuerdo con Duval (1999) la tranformación entre registros, pese a ser una “actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos” (p. 46), posibilita la apropiación del objeto matemático en tanto contribuye a la coordinación interna de registros permitiendo verlo como uno solo y no como diferentes objetos.

Las actividades de las situaciones didácticas planteadas deben permitir a los estudiantes descripción verbal de las situaciones propuestas. De acuerdo con Deulofeu (1991) “cada una de las representaciones permite expresar un fenómeno de cambio [sin embargo] debemos considerar en primer lugar la descripción verbal, utiliza el lenguaje común para darnos una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional” (p. 61). Con relación a esta subcategoría, se recomienda privilegiar el uso del registro verbal para realizar descripciones de fenómenos, se partía de allí, tanto para garantizar la compresión de la situación como para introducir al estudiante al evento dinámico, a pesar que el lenguaje coloquial sea el que les permita comprender lo que desean expresar.

Se recomienda hacer a los estudiantes un tránsito entre diferentes registros, presentar actividades que impliquen el uso del registro verbal, pasar al tabular y al gráfico. La Figura 4 muestra el tránsito entre dos registros que utilizó uno de los estudiantes de la muestra en este trabajo.

Figura 4

Actividad de E27 en la que se presenta el tránsito entre dos registros de representación



a) Considere que el atleta del carril 5 corre con una velocidad constante de 3 metros por segundo. El juez encargado de la carrera realiza una primera observación y constata que el atleta ha avanzado 45 metros luego de 2 segundos hace otra observación ¿cuántos metros ha avanzado entre las dos observaciones? Justifica tu respuesta

51 metros. porque durante 15 segundos recorrio
45 metros y posteriormente en 2 segundos recorrio
51 metros cada segundo equivale a 3 metros recorridos.

5) Teniendo en cuenta que en la carrera se presentaba una posible trampa, el juez de la carrera les ordena a tres personas que tomen algunos datos sobre la distancia que va recorriendo el atleta del carril 1, ¿En cuál de estas tres tablas se puede apreciar que el atleta corre con una velocidad constante? JUSTIFICA TU ELECCIÓN

A	TIEMPO (dado en segundos)	0	2	4	6	8	10	Porque tiene una velocidad constante de 2 segundos por dos metros recorridos.
	Distancia recorrida (dado en metros)	0	1	3	5	7	9	
B	TIEMPO (dado en segundos)	0	1	3	7	9	10	
	Distancia recorrida (dado en metros)	0	5	15	35	45	50	

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

EMN dirigió el proyecto de investigación y la organización del presente manuscrito. EMM desarrolló in situ la investigación y contribuyó con el borrador inicial de este manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente (EMN), previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Cabezas, C., & Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria, IX(6),* 13-26.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato.* Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2003), Mathematics Education: A vision of its evolution, *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 255-270.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while mode. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352-378.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *EMA*, 121-156.

Deulofeu, J. (1991). El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas. *CL&E*, 77-86.

Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (coordinador). *El futuro del cálculo infinitesimal*. V, 155-181. Iberoamérica.

Dolores, C., & Salgado, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*, 63-74.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME, 9.1*, 143–168.

Elliot, J. (2000). *La investigación acción en educación.* Ediciones Morata.

Garcia, M. (2016). *Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo*. Ed. Universidad de Antiquia.

ICFES. (2016). *Cuadernillo de prueba Saber 9°.* Ministerio Nacional de Educacion.

López, J. & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. en Lestón, Patricia (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2008, 21, 308-318.

Mateus-Nieves, E. & Devia, H. (2021). Development of Mathematical Thinking Skill from the Formulation and Resolution of Verbal Arithmetic Problems. *Acta Scientiae.* ISSN: 2178-7727. Acta Sci. (Canoas), *23*(1), 30-52, Jan./Feb. 2021. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5845.

Mateus-Nieves, E. & Hernández, W. (2020). Significado global de la integral articulando su complejidad epistémica. *UNION, Revista Iberoamericana de educación Matemática*. ISSN: 1815-0640. *XVI*(60), 196-211.

Mateus-Nieves, E. & Moreno, E. (2021). Use of microlearning as a strategy to teach mathematics asynchronously. *International Journal of Development Research*, *11*(3), 44984-44990. https://doi.org/10.37118/ijdr.21333.03.2021.

MEN. (2014). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional.

Moreira, M., & Rodriguez, M. (2002). Modelos mentales y modelos conceptuales en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. *Revista Brasilera de Pesquisa em Educación en ciencias*, 37-57.

Muñoz, J. (2015). *Diseño de una propuesta metodológica que contribuya a la enseñanza del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, apoyado en el proceso de resolución y planteamiento del problema.* Tesis de maestria, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Medellín, Colombia.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM Mathematics Education, 41*(4), 481-492.

Vargas, V., Reyes, A., & Cristóbal, C. (Agosto de 2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática, 28*(2), 59-83.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. 68-77. Ministerio de Educación.