





Uma Sequência de Atividades para o Ensino de Equações Diofantinas: Possibilidade para Ampliar a Base de Conhecimentos de Futuros Professores de Matemática

Marta Élid Amorim ^a
Ruy César Pietropaolo ^b
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão ^b
Angélica da Fontoura Garcia Silva ^b

^a Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Matemática – Campus Prof. Alberto Carvalho, Itabaiana, SE, Brazil

^b Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, São Paulo, SP, Brazil

Recebido para publicação em 15 aug. 2020. Aceito após revisão em 8 set. 2020

Autor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Um dos desafios na formação de professores de matemática é fazer a articulação entre os conteúdos estudados nas disciplinas na universidade e os temas da Educação Básica. **Objetivos:** analisar, à luz dos pressupostos estabelecidos por Ball, Thames e Phelps, a base de conhecimentos para o ensino de Equações Diofantinas de um grupo de futuros professores de Matemática, participantes de uma formação. **Design:** observou-se os princípios da metodologia *Design Experiments*. **Ambiente e participantes:** O estudo envolveu um grupo de dez estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de um campus da Universidade Federal de Sergipe. **Coleta e análise de dados:** Analisaram-se as reflexões do grupo de licenciandos, registros escritos e gravações de áudio, geradas pela vivência de uma sequência de ensino sobre Equações Diofantinas, que explorou a relação entre um conteúdo da Teoria dos Números e temas que seriam ensinados na Educação Básica. **Resultados:** Os resultados apontam que a vivência da sequência propiciou ao grupo de licenciandos reflexões sobre as dificuldades que estudantes da Educação Básica podem ter em situações envolvendo equações e sobre a forma como poderiam auxiliar seus alunos a superá-las. **Conclusões:** Ao longo do processo observaram-se avanços na compreensão do objeto matemático, ampliando a base de conhecimentos profissionais dos participantes sobre o tema. Este estudo mostrou a necessidade de um enfoque mais amplo nas discussões a serem promovidas na formação inicial de professores, para incluir e enfatizar a relação entre os conteúdos vistos nas disciplinas específicas de Matemática e aqueles que serão ensinados na Educação Básica. **Palavras-chave:** Formação Inicial; Conhecimento Profissional Docente; Ensino de Sequências; Equações Diofantinas.

Autor correspondente: Marta Élid Amorim. Email: martaelid@mat.ufs.br

A Sequence of Activities for Teaching Diophantine Equations: Possibility to Expand the Knowledge Base of Future Mathematics Teachers

ABSTRACT

Context: One of the challenges in the initial of mathematics teachers is to articulate the contents studied in the disciplines at the university with the themes of Basic Education. **Objectives:** to analyse, in the light of the assumptions established by Ball, Thames, and Phelps, the knowledge base for the teaching of Diophantine Equations of a group of future mathematics teachers participating in an experience of a teaching sequence. **Design:** the principles of the Design Experiments methodology were observed. **Environment and participants:** The study involved a group of ten students of the Mathematics Teaching Degree Course of a campus of the Federal University of Sergipe. **Data collection and analysis:** We analysed the reflections of the group of pre-service teachers, written records and audio recordings, generated by the experience of a teaching sequence on Diophantine Equations, which explored the relationship between a content of the Theory of Numbers and themes that would be taught in Basic Education. **Results:** The results show that the experience of the sequence provided the group of pre-service teachers with reflections on the difficulties that Basic Education students may have in situations involving equations and on how teachers could help students overcome them. **Conclusions:** Throughout the process, we observed advances in the understanding of the mathematical object, expanding the teaching professional knowledge base of the participants on the subject. This study concluded that a broader focus on the discussions to be promoted in the initial teacher education is needed to include and emphasise the relationship between the contents seen in the specific disciplines of Mathematics and those that will be taught in Basic Education.

Key words: Initial Education; Teaching Professional Knowledge; Teaching Sequence; Diophantine Equations.

INTRODUCTION

Visamos, com este artigo, apresentar e discutir os dados de uma pesquisa realizada no âmbito de uma disciplina da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública, à luz dos pressupostos estabelecidos por Ball, Thames e Phelps (2008), com a finalidade de estudar a base de conhecimentos para o ensino de Equações Diofantinas de um grupo de futuros professores de Matemática. Ao introduzir uma sequência sobre Equações Diofantinas aos licenciandos, buscamos mostrar um vínculo direto entre essas equações – parte integrante do conteúdo de disciplinas que abordam a Teoria dos Números, estudado na universidade, e temas propostos na Educação Básica – de modo a ampliar o conhecimento desse grupo para o ensino desse tema. Buscamos também discutir um caminho para desenvolver, em alunos da educação básica, habilidades para construir argumentos e provas sobre esse tema, sem necessariamente chegar à prova formal.

Para tanto, iniciamos com a apresentação de uma série de problemas que conduzem a uma única equação com mais de uma incógnita – equações que em domínio real seriam classificadas como indeterminadas e que em domínio inteiro podem ter um número finito de soluções no contexto do problema estudado. A tarefa proposta aos estudantes foi investigar equações dessa natureza, no conjunto dos números inteiros positivos, com o

uso de tabelas e em contextos próximos de situações reais e relacioná-las com o contexto adotado no âmbito da Teoria dos Números.

Buscamos revelar aos licenciandos uma abordagem que evidenciasse princípios norteadores de currículos que destacam a questão da contextualização dos conteúdos – não apenas no âmbito do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, mas também no universo de elementos culturais internos à Matemática. Nossa opção por Equações Diofantinas se justifica por ela se constituir em um contexto para

investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 540)

Essa competência referenda a importância de incluir, na formação inicial do professor, um trabalho que vise ao desenvolvimento de habilidades referentes à construção de argumentações e provas com seus futuros alunos. Por compartilhar desses princípios é que, para elaborar as atividades que compõem as situações de aprendizagem, nos baseamos em materiais que estão alinhados com essa proposta: *Caderno do Professor* (São Paulo, 2009a) e *Caderno do Aluno* (São Paulo, 2009b), além de *Experiências matemáticas* (São Paulo, 1995).

Em uma revisão bibliográfica não encontramos muitas pesquisas recentes que articulam o ensino de Equações Diofantinas à formação inicial de professores de Matemática. Dentre os trabalhos que se aproximam da nossa temática, citamos o de Oliveira (2010) e o de Cade e Paiva (2018). No entanto, a nossa investigação diferencia-se desses trabalhos não apenas quanto à metodologia, mas, sobretudo, pela ênfase que demos à questão das provas, pois reiteramos que essas equações se constituem em um contexto muito rico para explorar e discutir com os futuros professores a possibilidade de desenvolver no Ensino Médio esse aspecto mais formal da matemática.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em 1986, Shulman discutiu em um artigo que, nos Estados Unidos, as políticas públicas e as pesquisas sobre a base de conhecimentos necessários à docência não se detinham em questões sobre a origem das explicações dos professores para ensinar conteúdos específicos das disciplinas, nem sobre as fontes de analogias, metáforas, exemplos, demonstrações e reinterpretções do professor relativas aos objetos de ensino. Tampouco discutiam sobre a formação dada aos professores, de modo a favorecer a conexão entre os diversos temas da própria disciplina. Não havia reflexões sobre o comprometimento das estratégias pedagógicas quando o professor não apresentasse as habilidades referentes a determinados conteúdos.

A despreocupação com essas questões na formação dos professores acarretava uma significativa “perda de ênfase” nos conteúdos específicos da disciplina a ser ensinada. Esse “abandono” foi denominado por Shulman (1986, p. 7) como “paradigma perdido” e, para resgatá-lo, esse educador propôs construir uma base de conhecimentos, prioritariamente, a partir do saber específico da disciplina – no nosso caso, a Matemática. As categorias do conhecimento do conteúdo necessário à docência, estabelecidas por Shulman (1986) para compor essa base de conhecimentos, são: Conhecimento do Conteúdo Específico, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e Conhecimento Curricular do Conteúdo.

Reconhecendo que os avanços teóricos sobre os conceitos que Shulman enunciara em 1986 eram relativamente pequenos para o ensino da Matemática, a pesquisadora Deborah Ball e seus colaboradores – Grupo de Michigan – passaram a trabalhar com o conceito de “Mathematical Knowledge for Teaching”, ou seja, Conhecimento Matemático para o Ensino. Consideraram questões do tipo: Como as ideias de conhecimento pedagógico do conteúdo são incorporadas na prática? O que aprendemos com este conceito e o que ainda precisa ser desenvolvido a partir dele?

Para responder a essas questões, Ball, Thames e Phelps (2008) basearam-se em pesquisas sobre elas e na observação da prática docente de matemática, e subdividiram o Conhecimento do Conteúdo Específico em Conhecimento do Conteúdo Comum, Conhecimento do Conteúdo Especializado e Conhecimento do Horizonte do Conteúdo; e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo foi subdividido em Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes; Conhecimento do Conteúdo e do Ensino; e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo, que serão aqui definidos e exemplificados de acordo com os temas que fazem parte do nosso estudo.

O Conhecimento do Conteúdo Comum refere-se ao conhecimento do conteúdo matemático de determinado tema que não é específico para os que exercem a atividade docente, mas todos aqueles que o aprenderam deveriam ter. Ou seja, o Conhecimento do Conteúdo Comum é aquele inerente ao cidadão. Implica, por exemplo, em realizar cálculos corretos e resolver corretamente problemas matemáticos. É um conhecimento necessário para os professores, mas não é exclusivo deles, e pressupõe-se que o professor deve dar conta, minimamente, de conhecer e saber utilizar todos os conceitos e procedimentos matemáticos a ele pertinentes, previstos no currículo dos estudantes.

Um exemplo do Conhecimento do Conteúdo Comum referente às Equações Diofantinas seria o conhecimento necessário para resolver, por meio de estratégias pessoais, um problema como: “Para agrupar 13 ônibus em filas de 3 ou 5 em uma garagem, quantas filas poderão ser formadas de cada tipo, mesmo sem saber que a equação que traduz esse problema é denominada Equação Diofantina?”. Não fariam parte desse conhecimento os teoremas e todas as propriedades relacionados a essas equações.

Ball, Thames e Phelps (2008) ponderam que a habilidade para estudar e aplicar matemática não é suficiente, em geral, para o ensino da matemática e consideram importante o Conhecimento do Conteúdo Especializado. Discutem que, na formação de professores, dever-se-ia levar em conta “como” os professores precisam conhecer os

conteúdos a serem ensinados e “como” e “quando” os professores precisam usar esse conhecimento na prática.

O Conhecimento do Conteúdo Especializado para o professor de matemática difere tanto daquele necessário ao matemático – aquele que produz conhecimento novo em matemática – quanto daquele do cidadão comum, visto que está relacionado com a atividade docente. Esse conhecimento envolve, por exemplo, a análise de erros e daquilo que facilita ou dificulta uma tarefa proposta; o uso de abordagens “não padrão” que podem funcionar em determinadas circunstâncias; a explicação de procedimentos e do “porquê” de os algoritmos e as técnicas ensinadas funcionarem.

No que tange ao Conhecimento do Conteúdo Especializado do professor que ensina ou ensinará Equações Diofantinas, é importante, por exemplo, que ele saiba definir e identificar essas equações, enunciar e interpretar o teorema que possibilita afirmar quando uma Equação Diofantina tem ou não solução e obter a solução geral, caso exista. Além disso, devem fazer parte do Conhecimento do Conteúdo Especializado os conteúdos relacionados ao tema, mesmo que esses não façam diretamente parte daqueles a serem ensinados pelo professor, mas dos quais ele fará uso para facilitar sua argumentação e favorecer a compreensão do aluno. No caso de Equações Diofantinas, esse conhecimento contribuiria para o professor conhecer argumentos que envolvessem números primos, critérios de divisibilidade e algoritmo de Euclides, por exemplo.

Outro aspecto que o grupo de Michigan leva em consideração quando se refere ao Conhecimento do Conteúdo Específico é o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo, necessário ao professor para que ele possa destacar os pontos-chave do conteúdo; fazer conexões; orientar seus alunos a avançar a partir de suas próprias conjecturas, preservando os princípios matemáticos; e familiarizá-los com a linguagem e a estrutura próprias da disciplina.

Podemos identificar, na sequência para o ensino das Equações Diofantinas, que, do nosso ponto de vista, a proposta permite que o professor trabalhe a organização de informações numéricas em tabelas, generalizações de regularidades e investigações de propriedades de múltiplos e divisores por meio da resolução de problemas.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), implica o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e leva em consideração que a compreensão da Matemática desses estudantes está relacionada às experiências por eles vivenciadas, o que permite ao professor prever e interpretar erros e buscar estratégias para sua superação. Por exemplo, propor a estudantes de licenciatura que analisem produções elaboradas por alunos a respeito de resolução de problemas envolve o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, no âmbito da formação inicial do professor, visto que nesse momento o licenciando pode analisar as causas dos erros e sugerir ações para que os alunos superem suas dificuldades.

Em relação ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, Ball, Thames e Phelps (2008) referem-se ao fato de que o trabalho da docência requer do professor a seleção, a organização e a elaboração de atividades. Esse conhecimento implica analisar as

vantagens e as desvantagens de abordagens e representações e de diferentes métodos e procedimentos.

Segundo Campos e Pietropaolo (2013, p. 65, grifos no original),

em complementação ao *conhecimento pedagógico*, o *conhecimento do conteúdo e do ensino* combina a compreensão de conteúdos específicos da Matemática com a compreensão de assuntos pedagógicos que podem interferir no processo de ensino e aprendizagem. Diz respeito à capacidade de organização da instrução, à avaliação das vantagens de utilizar determinadas representações e exemplos e à decisão e escolha de encaminhamentos para a abordagem de um conteúdo.

Sob essa perspectiva, o professor poderá organizar uma sequência de ensino em que a resolução de problemas esteja presente, partindo de experimentações das conjecturas, passando por exemplos que justifiquem a necessidade de avançar para validar resultados. Portanto, é necessário para o professor não apenas o Conhecimento do Conteúdo Especializado e do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, mas também o conhecimento para elaborar situações e escolher materiais didáticos.

Para completar a base de conhecimentos para o ensino, Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam o Conhecimento do Conteúdo e Currículo, que é necessário ao professor para ajudá-lo a articular o conteúdo ensinado com os conteúdos curriculares de anos anteriores e posteriores ou aqueles estudados simultaneamente em outras disciplinas. Inclui-se nessa categoria o conhecimento das diretrizes e recomendações curriculares para a introdução e o desenvolvimento dos conteúdos.

Estas categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008) fundamentaram a concepção inicial do nosso projeto e balizaram a análise dos dados coletados na pesquisa de campo.

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No desenvolvimento deste estudo foram adotados alguns pressupostos da metodologia *Design Experiments*, na perspectiva de Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble (2003). Segundo esses pressupostos, na fase prospectiva, buscaram-se elementos para a concepção e a realização de uma abordagem de noções relativas às Equações Diofantinas, com o propósito de investigar os conhecimentos dos licenciandos sobre a proposição, para turmas da educação básica, de problemas cujas soluções envolvem a resolução dessas equações.

Tratamos, neste trabalho, da relação da Teoria dos Números com os conteúdos relativos ao eixo dos Números, hoje prevista pela *Base Nacional Comum Curricular* (Brasil, 2018). Sugerimos situações de aprendizagem que favorecessem discussões de ideias contidas no eixo dos Números, relacionadas aos significados de Divisibilidade,

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum. A Teoria dos Números nos propiciou ferramentas a serem adaptadas para a análise de diferentes estratégias para o ensino desses conceitos e/ou procedimentos: resolução de problemas envolvendo Equações Diofantinas e seus significados; discussão da importância do ensino de Equações Diofantinas na Educação Básica; prova de Teoremas para obter soluções para as Equações Diofantinas foram alguns dos temas propostos para fomentar a discussão sobre a importância de estabelecer relações entre o que é aprendido na universidade e o que é ensinado na educação básica.

Como a metodologia *Design Experiments* tem um propósito duplo – metodologia de ensino e de pesquisa – e permite a investigação no próprio contexto de construção e/ou desenvolvimento do conhecimento, que é de nosso interesse, optamos por utilizá-la. A avaliação contínua dos resultados parciais no *Design* permite

as reformulações necessárias ao projeto, no decorrer do experimento, até que sejam trabalhados todos os pontos que, eventualmente, se constituam em entraves ou em concepções equivocadas do conteúdo que está sendo explorado. Elabora-se uma versão inicial do projeto, não definida completamente, que é revista e aprimorada, ao longo do experimento, em função dos resultados que vão sendo observados. (Corbo, 2012, p. 199)

Cabe destacar que esse processo cíclico de elaboração, análise, revisão e reinvenção das atividades, proposto como a fase reflexiva do *Design* e adotado ao longo do experimento, resultou na “criação” de uma pequena “teoria” – pequena, porque é restrita para o tema –: Equações Diofantinas. Essa “teoria”, ou seja, essa sequência, é aqui explicitada e justificada.

A formação teve duração de quatro semanas, com dois encontros semanais de duas horas cada e contou com a participação de 10 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática¹. As referências aos participantes são feitas por (A), (B), ... (J), a fim de salvaguardar as suas identidades.

A seleção, a elaboração e a organização das situações de aprendizagem foram feitas de maneira que proporcionassem, aos futuros professores de Matemática, um espaço para discussão e reflexão sobre o estabelecimento de vínculos entre diferentes abordagens desse conteúdo.

Na proposição das situações, as discussões entre os participantes de cada equipe permitiram a reflexão dos estudantes sobre as atividades vivenciadas e, posteriormente, a oportunidade de buscar também com os integrantes das outras equipes soluções para as dificuldades. Cabe destacar que, embora as discussões tenham sido realizadas no interior de cada equipe e com os demais participantes da formação, relatórios parciais foram elaborados individualmente ao final de cada encontro. Além desses, cada estudante

¹ Esta pesquisa solicitou avaliação ética pelo sistema CEP/CONEP e obteve aprovação.

entregou um relatório ao final de toda sequência. Esse conjunto de dados nos permitiu conduzir a análise a partir de diferentes pontos de vista, conforme prevê a fase retrospectiva do *Design*.

A análise dos dados obtidos pelos registros escritos e gravações de áudios, a nosso ver, subsidiaram a compreensão de ideias fundamentais relativas aos processos de ensino e aprendizagem das noções e dos procedimentos matemáticos envolvidos nessa sequência, e são, portanto, passíveis de nova aplicação a outros grupos de professores e futuros docentes.

Finalmente, outra razão que julgamos importante para explicar nossa opção por essa metodologia diz respeito à fundamentação teórica que amparou a realização de nosso estudo, no que se refere à formação de professores. Conforme referido anteriormente, as categorias de conhecimentos necessários ao ensino, propostas por Ball, Thames e Phelps (2008), serviram-nos como baliza para a concepção do projeto inicial e para as modificações que se mostraram necessárias no decorrer de nossa investigação. Além disso, foram parâmetros para avaliação dos resultados parciais e finais de nosso experimento.

SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM E SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nesse trabalho, cada atividade proposta pelo pesquisador tem o objetivo de fomentar discussões, promover (re)significações sobre os temas abordados, gerando assim uma situação de aprendizagem. A esse conjunto de atividades é que chamamos de Sequência de Atividades.

Optamos por apresentar as atividades que compõem a sequência para, posteriormente, proceder à análise dos dados da pesquisa.

A primeira situação de aprendizagem foi realizada ao longo de duas semanas e a primeira atividade proposta, Atividade 1, para efeito de análise, envolveu o planejamento e a apresentação de sequências para o ensino de temas relacionados a Equações Diofantinas, denominadas microaulas. Cada equipe apresentou notas de aula e plano de ensino sobre um dos temas: Divisibilidade, Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC).

Feitas as apresentações, solicitamos que os estudantes, individualmente, escrevessem um relatório apresentando uma análise crítica das atividades e das metodologias adotadas pelas equipes.

Apoiados em Ball, Thames e Phelps (2008), propusemos essa atividade com a intencionalidade de analisar os conhecimentos explicitados pelos licenciandos, no que se refere à abordagem para o ensino, e fomentar a discussão de temas que favoreceriam as relações entre os conteúdos das microaulas e Equações Diofantinas, elementos que estão associados ao Conhecimento de Conteúdo e do Ensino e ao Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

Em seguida, propusemos outra atividade – Atividade 2 –, composta por duas partes. Inicialmente, os licenciandos apresentariam uma solução para cada uma das cinco situações-problema envolvendo Equações Diofantinas Lineares, e, logo depois, exporiam uma proposta para desenvolver essa atividade com alunos do 8.º ano, antiga 7.ª série. Com essa proposta tínhamos o objetivo de identificar não apenas o Conhecimento do Conteúdo Comum, ao analisarmos as respostas dos licenciandos às situações-problema, mas também o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo, a partir das articulações feitas por eles entre as equações e outros conteúdos. As situações sugeridas estão na Figura 1.

Figura 1

Situações-problema envolvendo Equações Diofantinas Lineares. (Adaptado de São Paulo, 2009a)

<p>Situação 1: Para agrupar 13 ônibus em filas de 3 ou 5 em uma garagem, quantas filas poderão ser formadas de cada tipo?</p> <p>Situação 2: Quantas quadras de vôlei e quantas quadras de basquete são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se fossem 77 alunos? (Dado: uma partida de basquete é disputada por 5 jogadores, e uma de vôlei, por 6).</p> <p>Situação 3: Um laboratório dispõe de duas máquinas para examinar amostras de sangue. Uma delas examina 15 amostras de cada vez, enquanto a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas podem ser acionadas para examinar 2 000 amostras?</p> <p>Situação 4: Um caixa eletrônico disponibiliza para saque apenas notas de R\$ 20,00, R\$ 50,00 e R\$ 100,00. Se um cliente deseja sacar R\$ 250,00, de quantas maneiras diferentes ele poderá receber suas notas?</p> <p>Situação 5: Deseja-se adquirir um total de 100 peças dos tipos A, B e C, sendo que os preços unitários das peças são R\$ 1,00, R\$ 10,00 e R\$ 20,00, respectivamente. Se dispomos de R\$ 200,00 para a compra, quantas e quais são as possibilidades de compras que podemos fazer?</p>
--

Para a resolução das situações-problema, esperávamos, no primeiro momento, que os licenciandos construíssem tabelas a partir da observação de padrões e regularidades e, dessa forma, identificassem as soluções. No entanto, o recurso das tabelas tornar-se-ia limitado diante dos problemas em que os coeficientes da equação são números muito grandes, o que justificaria a inclusão de uma discussão sobre o algoritmo geral para encontrar as soluções de uma Equação Diofantina, caso existam. Ao propor uma abordagem dessa atividade em uma sala de aula da Educação Básica, acreditávamos que os licenciandos pudessem sugerir algo que, além de levar os alunos a identificar padrões e regularidades, também fizesse conexões entre as situações-problema propostas e a ideia de múltiplos, divisores e máximo divisor comum.

Depois da sistematização dessa atividade, apresentamos aos sujeitos da nossa pesquisa uma proposta de abordagem para a Atividade 2, proposta no *Caderno do Professor* do Estado de São Paulo, conforme exposta na Figura 2, para que eles analisassem e apresentassem objetivos para essa atividade, se aplicada para alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental – Atividade 3.

Essa situação de aprendizagem poderia contribuir para a nossa compreensão sobre o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino dos licenciandos e sobre o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

Figura 2

Proposta do Caderno do Professor para a Atividade 2. (São Paulo, 2009a, p.54)

Resolução do exemplo 2

Montaremos uma tabela que nos permita avaliar possibilidades para v e b de tal forma que se atenda à restrição $12v + 10b = 80$ (na sequência, analisaremos o caso $12v + 10b = 77$).

Linha	Nº de pares de times de vôlei (v)	Nº de pares de times de basquete (b)	Total de alunos ($12v + 10b$)
1	0	0	0
2	0	1	10
3	0	2	20
4	0	3	30
5	0	4	40
6	0	5	50
7	0	6	60
8	0	7	70
9	0	8	80
10	1	0	12
11	2	0	24
12	3	0	36
13	4	0	48
14	5	0	60
15	6	0	72
16	5	2	80

Com as nove primeiras linhas da tabela, descobrimos uma solução do problema, que é $v = 0$ e $b = 8$. Note que o padrão seguido nas nove primeiras linhas não foi continuado, porque na nona linha já se atingiu 80, que é o número de alunos da escola na primeira situação proposta no enunciado do problema. Da 10ª à 15ª linha, identificamos que não há solução quando $b = 0$. O padrão com $b = 0$ não prosseguiu para além da 15ª linha, porque na linha seguinte já

ultrapassaríamos 80 alunos. Por fim, buscando combinações de resultados da última coluna cuja soma seja 80, encontraremos mais uma solução para o problema, que é $v = 5$ e $b = 2$. Esse problema apresenta, portanto, soluções do tipo (v,b) , que são $(0,8)$ e $(5,2)$.

Dando continuidade à análise desse exemplo, é fácil perceber que não existe solução para a equação $12v + 10b = 77$. Uma justificativa razoável para isso é a seguinte:

- ▶ os múltiplos de 10 terminam sempre em 0, portanto, $10b$ tem algarismo das unidades igual a zero;
- ▶ os múltiplos de 12 terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8, portanto, $12v$ termina em algarismo das unidades igual a um desses números;
- ▶ decorre dos itens anteriores que a soma $12v + 10b$ termina em 0, 2, 4, 6 ou 8 e, como 77 tem algarismos das unidades igual a 7, $12v + 10b$ nunca será igual a 77.

Pode-se demonstrar que:

Uma equação diofantina $ax + by = c$ tem solução inteira se, e somente se, o máximo divisor comum entre a e b for um número que divide c .

O teorema que acabamos de enunciar garante a existência de soluções inteiras (inclui os negativos). Lembramos que nos cinco exemplos que estamos analisando, nos interessam as soluções inteiras positivas. Ou seja, sua aplicação em problemas desse tipo exige que se faça uma análise com critério, porque pode ser que a equação tenha uma solução com inteiros negativos e, nesse caso, essa solução não interessaria para o problema em questão.

Posteriormente, propusemos a Atividade 4, que consiste na demonstração do teorema de existência de soluções inteiras de uma Equação Diofantina e do algoritmo para busca dessas soluções, caso existam. Optamos por discutir a prova formal com os licenciandos, por compartilhar das ideias defendidas por Garnica (1996): nos cursos de formação de professores devem ser expostas todas as nuances do tema – leitura crítica e técnica. Esse autor defende que a prova rigorosa deve ser implementada na formação dos professores, não apenas em disciplinas de conteúdo específico, mas também em

disciplinas pedagógicas, visto que essa é uma questão que envolve a prática científica e poderia influenciar a prática pedagógica.

Outro fato que levamos em consideração, também de acordo com Garnica (1995), é que o professor deve conhecer mais do que aquilo que irá ensinar – conhecimentos que esse pesquisador denomina de “estoque suplementar”. Visando ampliar o repertório de argumentos e escolher abordagens mais adequadas para os alunos é que optamos por discutir com o grupo a prova formal desses resultados. Discutimos também, a partir dessa atividade, que nem sempre é possível chegar à prova formal de um teorema com alunos da educação básica, mas existe a possibilidade de propor atividades que lhes permitam levantar conjecturas e buscar generalizações a partir da observação de padrões.

Esses aspectos nos levaram a discutir com o grupo de licenciandos questões do Conhecimento Especializado do Conteúdo, visto que defendemos que a demonstração formal do teorema de existência de soluções inteiras de uma Equação Diofantina e do algoritmo para busca dessas soluções não necessariamente faz parte daqueles conteúdos a serem ensinados pelo professor, mas esse conhecimento facilitará sua argumentação para favorecer a compreensão do aluno.

Ao final do trabalho com as quatro atividades aqui descritas, os estudantes foram solicitados a propor um plano de ensino direcionado a alunos da Educação Básica para o ensino das Equações Diofantinas – Atividade 5, com o objetivo de identificar suas escolhas e justificativas de atividades que favoreçam os alunos a conjecturar, testar e generalizar a partir da observação de regularidades e padrões.

Vale ressaltar que, ao elaborarmos a Sequência de Atividades, apesar da nossa intencionalidade de identificar, em cada uma das atividades propostas, certos tipos de conhecimentos, em todas as situações de aprendizagem foi possível reconhecer elementos das diferentes categorias da base de conhecimentos proposta por Ball, Thames e Phelps (2008). Inclusive, os licenciandos tomaram como referência as suas vivências enquanto estudantes da Educação Básica e estagiários nas disciplinas obrigatórias da Licenciatura para inferir sobre as suas atitudes nas situações que lhes foram propostas e expor seus conhecimentos sobre o conteúdo e os estudantes.

ANÁLISE ACERCA DAS SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM

Esta seção reporta a análise que fizemos das discussões no decorrer do processo formativo. Levamos em conta o agrupamento em pares das categorias de Ball, Thames e Phelps (2008), por entender que essa análise seria mais promissora pela complementaridade entre os pares escolhidos, a saber: Conhecimento do Conteúdo Comum e Conhecimento do Conteúdo Especializado; Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino; Conhecimento do Horizonte do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

Conhecimento do Conteúdo Comum e Conhecimento do Conteúdo Especializado

Os licenciandos, ao tentarem resolver as situações-problema relacionadas às Equações Diofantinas, não se preocuparam, pelo menos não no primeiro momento, em explicar suas soluções a alunos da Educação Básica. Ao analisarem em que medida utilizaram os conteúdos das microaulas na resolução das questões propostas na atividade, os licenciandos apresentaram as suas estratégias, como podemos observar nos excertos a seguir:

Eu utilizei um pouco de critérios de divisibilidade e também fiz por tentativas, pois foi a maneira que eu achei mais fácil para resolver a atividade. (Lic. H)

De certa maneira eu acabei usando um pouco dos conteúdos das microaulas, mas de maneira indireta, acabei utilizando mais a tentativa e erro, assim fui tentando possibilidades. (Lic. A)

As minhas resoluções das três últimas questões foram de certa forma rudimentares e um pouco “braçais”, mas em vários passos conjecturei alguns padrões que iam aparecendo utilizando critérios de divisibilidade. (Lic. E)

Não tinha certeza de nada, assim a forma como explicar para o aluno se tornava inviável, pois não tinha nenhuma fundamentação que me garantisse aquilo, apenas suposições, porém as respostas me pareceram satisfatórias. (Lic. G)

Eles utilizaram estratégias pessoais, como a de tentativa e erro, por exemplo, para encontrar as respostas corretas para os problemas. Apesar de não conhecerem esse tipo de equação, pelo menos não pelo nome de Equação Diofantina, não tiveram muitas dúvidas em interpretar e descrever a equação que modelava o problema. Entretanto, apresentaram maiores dificuldades para encontrar todas as soluções possíveis para o problema e descrever um critério para essa busca.

Resolvidas as questões, os estudantes foram levados a refletir sobre como abordariam esse tema com alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. Acreditamos ter sido esse o ponto alto da atividade proposta, pois os licenciandos se deram conta de que o Conhecimento do Conteúdo Comum, que nos permite apresentar respostas corretas, assim como preconizam Ball, Thames e Phelps (2008), não é suficiente para o ensino. Vemos, nos depoimentos exemplares a seguir, que a proposição dessa atividade favoreceu a reflexão sobre um dos conhecimentos necessários ao professor para o ensino, o Conhecimento do Conteúdo Comum.

[...] entre todas as reflexões, a maior delas é que eu não sei como explicar algumas daquelas (situações) a alunos desta série (8.º ano). (Lic. I)

A minha maior dificuldade foi dar justificativas que servissem de auxílio para os alunos, afinal, a minha resolução baseou-se em tentativas e, através delas, busquei restringir algumas soluções, mas talvez os alunos não compreendessem o que

estava tentando explicar e, ao invés de auxiliá-los, dificultasse sua aprendizagem. (Lic. F)

Em particular as resolvi, utilizando mais critérios de divisibilidade, mas senti muita dificuldade na hora de formalizar minha ideia de forma compreensiva para o público alvo (alunos do 8.º ano), então achei que minhas respostas e explicações ficaram um pouco soltas. (Lic. J)

Essas falas são exemplares de que, apesar de os licenciandos encontrarem estratégias válidas para a resolução das situações apresentadas, consideravam, assim como Ball, Thames e Phelps (2008), que resolver problemas de maneira correta não é suficiente para promover o seu ensino. Da mesma forma, Zeichner (1993, p. 38) afirma que “saber de uma dada disciplina não é, por si só, suficiente para ser capaz de a ensinar”. Podemos observar também que os futuros professores, apesar de, em uma abordagem inicial, terem utilizado tentativas para resolver os problemas, não consideraram legítima essa estratégia para propor aos seus futuros alunos. Talvez tivessem a expectativa de apresentar, para os problemas propostos, uma solução mais formal, que envolvesse um conhecimento ou procedimento específico para aquele tipo de problema. No entanto, acreditávamos que eles iriam considerar esse um bom caminho para levar seus futuros alunos a identificar regularidades, estabelecer conjecturas, testar hipóteses, comparar resultados.

Outro momento em que os licenciandos puderam refletir sobre o saber ensinar foi na sistematização das conclusões do grupo. As falas dos licenciandos (J) e (I) ratificam que falta articulação entre o Conhecimento do Conteúdo Comum e o Especializado (Ball, Thames & Phelps, 2008):

[...] depois de observar as respostas, pude perceber que usei intuitivamente alguns conceitos, sem saber que estava usando, e que a minha linha de raciocínio, principalmente nas duas primeiras questões, estava de acordo com o raciocínio da solução sugerida, mas me faltou encontrar um jeito para explicar minha solução.

(Lic. J)

[...] percebi que a forma com que se propõe a resolução assemelha-se com a ideia do que eu tentei fazer, porém a forma com que sistematizou ficou muito melhor para o entendimento dos alunos. (Lic. I)

A atividade 3 favoreceu a ampliação do Conhecimento do Conteúdo Especializado, visto que licenciandos passaram a conhecer novos argumentos, novas maneiras de encontrar e representar soluções, utilizando linguagem matemática adequada para o ensino.

[...] eu não sabia o que eram Equações Diofantinas e também não tinha o conhecimento dessa forma de introduzir o assunto; logo, o conhecimento adquirido foi matemático e pedagógico. (Lic. I)

A atividade acabou trazendo um conhecimento novo que foi as Equações Diofantinas no ponto de vista matemático. [...] as equações diofantinas é, pelo pouco que vi, uma ótima ferramenta no auxílio à resolução de problemas. (Lic. A)

Entretanto, eu não tentaria fazer um algoritmo para ver se teria solução para depois procurá-las, embora a ideia fosse de grande proveito. (Lic. C)

No que tange ao conteúdo Equações Diofantinas, sob o ponto de vista de Ball, Thames e Phelps (2008), podemos inferir que os licenciandos ampliaram tanto o Conhecimento do Conteúdo Especializado como também o Comum, uma vez que o Licenciando I, assim como o Licenciando A, explicitou que antes de vivenciar a sequência proposta não as conhecia e, tampouco, sabiam sobre o seu ensino.

Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino

No que diz respeito à análise do ponto de vista do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e do Conhecimento do Conteúdo e Estudantes (Ball; Thames; Phelps, 2008), a nossa sequência propiciou aos licenciandos momentos de reflexão, nas equipes e no grupo, sobre a necessidade de conhecer diferentes atividades, formas de representação e abordagens materiais, com o intuito de fazer escolhas adequadas à turma à qual se destina a instrução.

Dessa forma, mesmo com pouca experiência no que se refere à prática na sala de aula e ao trato com os estudantes, os licenciandos, tomando como referência as suas vivências enquanto estudantes da Educação Básica e estagiários nas disciplinas obrigatórias da Licenciatura, inferiram sobre as suas atitudes nas situações que lhes foram apresentadas.

Quando solicitados a responder às situações problema, os licenciandos mostraram-se preocupados em encontrar as respostas corretas, sem levar em conta os conteúdos envolvidos e/ou o contexto em que poderiam trabalhar essas situações com alunos da Educação Básica.

Para o licenciando (G), a proposta apresentada na Atividade 3 para discussão dessas situações-problema, com o uso da tabela para representar os dados, facilita a visualização e pode favorecer o entendimento do aluno, como podemos constatar em sua fala: “[...] a solução mostrada [Atividade 3] é de fácil entendimento para o aluno, principalmente quando coloca na tabela, pois fica visível para os alunos” (Lic. G).

Essa é uma manifestação representativa para o grupo, visto que muitos fizeram referência a essa maneira de representar os dados como facilitadora do aprendizado e da discussão das soluções dos problemas. Os depoimentos dos licenciandos (J) e (I) ratificam a nossa análise.

Em suma, a Atividade 3 nos dá a dica de tentar organizar os resultados em tabela, o que pode facilitar muito a visualização do problema para os alunos. (Lic. I)

[...] mas, vendo a sugestão da resposta, percebi que as soluções são feitas por tentativa e erro, que é o caso da tabela, a qual achei muito eficiente para a ocasião, pelo fato do público serem alunos do 8.º ano, uma vez que, para o entendimento dos mesmos, é necessário que as coisas sejam experimentadas e comparadas, fatos que a tabela explora muito bem. (Lic. J)

O licenciando (J) destaca a importância de o aluno fazer as experimentações, conjecturar, testar as hipóteses, comparar. Ou seja, analisa a atividade como potencialmente rica para ser aplicada na Educação Básica, tomando como critério a questão de o aluno construir o seu próprio conhecimento a partir de experimentações. Esse fato nos faz inferir sobre a ampliação do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008), pelo licenciando (J).

Porém, alguns dos futuros professores mostraram-se descrentes com o bom desempenho dos alunos.

Na 7.ª série (8.º ano) os alunos ainda não têm preparo intelectual para lidar com equações de várias incógnitas. Só esta atividade não dá suporte para que os alunos criem seus próprios problemas envolvendo Equações Diofantinas. (Lic. E)

Podem não ter domínio de determinados conteúdos e consequentemente não conseguem encontrar métodos que os auxiliem na resolução, além de talvez não ter maturidade e conhecimento suficiente para resolvê-las. (Lic. F)

[...] a solução mostrada [Atividade 3] é de fácil entendimento para o aluno, principalmente quando coloca na tabela, pois fica visível para os alunos. Essa atividade é um desafio para uma turma do 8.º ano, caso não diga quais ferramentas usar. Mesmo com as ferramentas, em minha opinião, ainda é difícil. Lic. G)

Reconhecemos, assim como Manrique (2005), Pietropaolo (2002) e Pires (2002), que os professores são geralmente resistentes a mudanças, pois suas concepções e crenças, construídas ao longo de sua vida escolar, funcionam como obstáculos no processo de reflexão sobre novas ideias.

Conhecimento do Horizonte do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo

Apesar de as Equações Diofantinas não estarem explícitas no currículo, os licenciandos (J) e (E) expõem motivos que justificariam o estudo do tema.

[...] pois é algo que vemos frequentemente e se aplica no dia a dia, ou seja, os alunos trabalham com equações diofantinas sem perceber. Assim, esse estudo ajudará os alunos fora de sala de aula. (Lic. J)

Se mostrarmos ao aluno que o que ele estuda agora o ajudará em conteúdos futuros, será uma maneira natural de motivação. Na questão de aplicações, acredito ser bem interessante usar esses assuntos em outros conteúdos da matemática, reforçando assim a beleza desta ciência. (Lic. E)

O licenciando (E), em sua fala, defende a ideia de contextualizar conteúdos com a própria matemática. Um exemplo desse fato, presente em nossa sequência, é a contextualização do MDC e dos Critérios de Divisibilidade com a existência de soluções inteiras de uma Equação Diofantina e o algoritmo para encontrar as soluções, caso existam. Na fala do licenciando (I), observamos também esse fato.

A resolução do problema 2 segue o mesmo raciocínio da [resolução do problema] anterior, porém aqui ele já abordou o conceito de equação diofantina, e agora eu também já sei do que se trata. Mas aplicar explicitamente o conceito de MMC e MDC não me veio à mente na hora da resolução, apenas depois discutindo com alguns amigos. (Lic. I)

O que observamos na fala anterior é que falta aos futuros professores o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo (Ball, Thames & Phelps, 2008), no que se refere às Equações Diofantinas, para que possam fazer as conexões entre os conteúdos. Os licenciandos a seguir ratificam a nossa afirmação, quando analisam as suas resoluções das situações problema:

Quanto à utilização do MMC e MDC, não utilizei e acredito que ninguém tenha usado, uma vez que não ficou nítida a sua utilização. (Lic. C)

Foi necessário utilizar os Critérios de Divisibilidade e fatoração, mas de maneira indireta, pois não foi dado de maneira explícita, não foi citado que para realizar o exercício seria necessário utilizar os conteúdos, mas por mim foi utilizado. (Lic. F)

[...] Mas acabei demorando muito e não consegui responder todas. E que por isso, a minha primeira impressão foi que algumas delas não estavam num nível adequado para uma quinta série, por exemplo. Quando foi apresentada a proposta de resolução e que o conteúdo a ser aplicado ficou evidente, acabei mudando a minha opinião [...]. (Lic. A)

Os licenciandos trazem consigo experiências de resolver os exercícios de determinado conteúdo imediatamente depois de este ter sido explicado pelo professor. Dessa forma, não é comum decidir quais conteúdos utilizar na resolução de um problema, mas sim aplicar um conjunto de conceitos e propriedades do último conteúdo estudado. Por exemplo, não encontramos tentativas de soluções dos licenciandos que mobilizassem o estudo do gráfico da função linear gerada pela Equação Diofantina. Isso pode ser consequência do fato de, muitas vezes, ser apresentada apenas a teoria matemática e suas aplicações imediatas, sem analisar outras propostas de soluções.

Os depoimentos que seguem mostram que os licenciandos ampliaram os conhecimentos do ponto de vista curricular e das conexões entre os conteúdos, o que pode propiciar aos seus futuros alunos uma discussão rica envolvendo Equações Diofantinas.

Do ponto de vista matemático aprendi a relacionar melhor alguns assuntos e ver o quanto o conhecimento de um assunto pode facilitar na resolução de determinada questão, que aparentemente não necessita de tal assunto. (Lic. J)

[...] através delas é possível que o aluno desenvolva um maior raciocínio lógico, além de permitir que o mesmo possa refletir e retirar suas próprias formas de solucionar determinadas equações retomando conteúdos já vistos por ele. (Lic. F)

Ao fazer a relação entre conteúdos, os licenciandos reforçam a ideia de relacionar o conteúdo estudado com anteriores, mas pouco destacam a importância de dar ênfase a pontos-chave para o estudo de assuntos que ainda estão por vir. Para o licenciando (E): “Deve-se ter cuidado ao abordar esse tema no ensino fundamental. Acredito que não é mais importante de que seus antecessores, MMC, MDC e divisibilidade, porém, aplicar conhecimentos adquiridos pelos alunos em novos conteúdos é bem interessante”. Em outro trecho, esse mesmo licenciando cita os conteúdos posteriores, porém não os articula com o assunto atual, mas toma-os como motivadores para o estudo deste: “Do ponto de vista pedagógico, mostra um caminho a ser trilhado pensando no sentido de usar conteúdos recém-passados e motivar outros”.

Em sua fala, o licenciando (E) revela reconhecer a necessidade do conhecimento do horizonte e curricular do conteúdo (Ball, Thames & Phelps, 2008). Zeichner (2003, p. 47) também defende que “os educadores precisam conhecer sua disciplina e saber transformá-la de modo a ligá-la àquilo que os alunos já sabem, a fim de promover mais compreensão”. O que verificamos é que não está presente nas manifestações dos licenciandos a reflexão sobre estratégias para ensinar, a alunos que não os possuam, os conhecimentos prévios necessários para o aprendizado. Ou seja, ainda não faz parte das preocupações desse grupo o modo de fazer com que os alunos avancem, mesmo sem dominar toda a matemática das séries anteriores.

CONCLUSÕES

Em nosso processo formativo interpretamos registros, diálogos e reflexões dos futuros professores, participantes da pesquisa, a respeito da sequência de atividades para o ensino de Equações Diofantinas na Educação Básica, utilizando ideias defendidas pelos pesquisadores Ball, Thames e Phelps (2008) sobre o conhecimento docente. Essa adoção nos permitiu a construção da sequência e a análise mais aprofundada dos dados em decorrência das condições desse processo, cujos pressupostos foram o favorecimento de ponderações dos licenciandos e as interações entre eles.

Reiteramos que os futuros professores de Matemática ampliaram sua base de conhecimentos, segundo as categorias definidas por esses pesquisadores a respeito de Equações Diofantinas, sobretudo em relação ao Conhecimento Especializado do Conteúdo, ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e ao Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

As reflexões que fizemos ao longo desta pesquisa nos levaram a conjecturar que o estudo do tema Equações Diofantinas deveria ganhar especial atenção nos cursos de Licenciatura em Matemática, tanto nas disciplinas da área de ensino como nas de conhecimento específico.

O viés da proposição de problemas envolvendo esse tema, a partir de conjecturas e experimentações, deveria ser privilegiado não apenas nas disciplinas pedagógicas. Ou seja, as disciplinas de conteúdo matemático não estariam, a nosso ver, isentas de propiciar, como meio para a aprendizagem dos futuros professores, a articulação entre a teoria matemática e as aplicações pertinentes ao contexto da educação básica. É preciso garantir que os licenciandos vivenciem, no período da sua formação, experiências próximas daquelas que irão utilizar em sua prática docente.

Da mesma forma, o futuro professor também precisaria vivenciar situações que permitissem a experiência das dificuldades vividas pelos estudantes quando estes começam um trabalho envolvendo equações. Isso lhe permitiria perceber e compreender essas dificuldades e refletir sobre estratégias que pudessem auxiliar seu aluno a enfrentá-las e a superá-las.

Em virtude de todo o exposto, é nosso ponto de vista que, dada a importância da argumentação e da prova para a compreensão e a ampliação de conteúdos, seu estudo não pode estar vinculado a um único aspecto que privilegie o conhecimento específico, sob pena de provocar a elaboração de uma concepção desprovida de significado. Isto é, a abordagem desse tema deve considerar todas as nuances, toda a complexidade inerente à construção desse conhecimento.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Os autores M. E. A e R. C. P foram responsáveis pela elaboração e aplicação da sequência de ensino e, em parceria, com as autoras M. E. E. L. G e A. F. G. S discutiram os resultados, estruturaram e escreveram o artigo.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Os dados que sustentam os resultados desta investigação serão disponibilizados pela autora correspondente, M. E. A, mediante solicitação razoável por email.

REFERÊNCIAS

- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base: Ensino Fundamental*.
- Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Cade, N. V. L., & Paiva, M. A. V. (2018). Saberes De Equações Diofantinas Lineares Emergentes nas Interações em Grupo de Uma Licenciatura em Matemática. *Interdisciplinary Scientific Journal*, 5, 245-255.
- Campos, T., & Pietropaolo, R. C. (2013). Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. Em R. Borba, & C. Monteiro, *Processos de ensino e aprendizagem em educação matemática* (pp. 55-91). Ed. Universitária da UFPE.
- Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 9-13.
- Corbo, O. (2012). *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica*. Tese de Doutorado, Universidade Bandeirante de São Paulo-UNIBAN/SP, Pós-graduação em Educação Matemática, São Paulo.
- Garnica, A. V. (1995). *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática (Doutorado em Educação Matemática)*. Tese de Doutorado, UNESP, IGCE, Rio Claro.
- Garnica, A. V. (1996). Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na Formação do professor de Matemática. *Zetetiké*, 4, 7-28.
- Manrique, A. L. (2005). *Processo de formação de professores em Geometria: mudanças em concepções e práticas*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP, Pós-graduação em Educação, São Paulo.
- Mateus, M. E. A (2015). *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica*. Tese de Doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN/SP, Pós-graduação em Educação Matemática, São Paulo.
- Oliveira, S. A. (2010). *Uma Exploração Didática das Equações Diofantinas Lineares de Duas e Três Incógnitas Com Estudantes de Cursos de Licenciatura em Matemática*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - PUC Minas, Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Belo Horizonte.
- Pietropaolo, R. C. (2002). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Revista*, 9(11), 34-48.

Pires, C. M. (2002). Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. *Educação Matemática em Revista*, 9(11A, Edição especial), 44-56.

São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. (1995). *Experiências matemáticas: 5.ª a 8.ª séries do 1.º grau*. VITAE; SE; CENP.

São Paulo. Secretaria da Educação. (2009a). *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 7.ª série* (Vol. 3). (C. g. Fini, M. I.) Secretaria da Educação.

Shulman, L. (1986). Those who understand: the knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Zeichner, K. M. (1993). *A formação reflexiva de professores: ideias e práticas*. Educa-Professores.

Zeichner, K. M. (2003). Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno: possibilidades e contradições. Em R. L. Barbosa, *Formação de educadores: desafios e perspectivas* (pp. 35-55). Editora da UNESP.