

# Errores Manifestados por Estudiantes de Secundaria al Realizar Tareas de Modelización Matemática

Karen Porras <sup>a</sup>  
Elena Castro-Rodríguez <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Universidad Nacional, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Matemática, Heredia, Costa Rica

<sup>b</sup> Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, Spain

*Recibido para publicación el 15 oct. 2020. Aceptado tras revisión el 12 mar. 2021*  
*Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

## RESUMEN

**Antecedentes:** En Costa Rica, desde el 2012, los escolares se forman en modelización por ser parte fundamental del currículo educativo. **Objetivo:** Identificar y caracterizar los errores en los que incurren un grupo de estudiantes de Educación Secundaria de Costa Rica cuando aplican las fases del proceso de modelización matemática al resolver tareas de proporcionalidad directa. **Diseño:** Mediante un enfoque cualitativo, específicamente un estudio de casos pues pretende estudiar interpretaciones sociales de los participantes. **Entorno y Participantes:** Las tareas de modelización se aplicaron a 24 estudiantes del nivel de séptimo de Educación Secundaria de la provincia de San José en Costa Rica, siendo este nivel donde se profundiza el tema de proporcionalidad directa y los participantes han sido instruidos en tareas de modelización desde la educación primaria. **Recopilación y Análisis de datos:** Se recolectó información a través de las producciones escritas de los participantes, la observación de los investigadores y la realización de entrevistas. Se llevo a cabo un análisis de contenido, utilizando la categorización propuesta por Abrate et al. (2006) para el análisis de errores matemáticos. **Resultados:** Los participantes no aplicaron todas las fases del proceso de modelización matemática, se obtiene una mayor presencia de errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales y asociaciones incorrectas al resolver el modelo matemático. **Conclusiones:** Se concluye que los errores detectados en este trabajo son elementos de reflexión, avance y retroalimentación que deben incentivar la búsqueda de estrategias por parte de los docentes que ayuden a resolver las deficiencias presentes cuando los estudiantes resuelven actividades de modelización.

**Palabras clave.** Errores; modelización matemática; educación secundaria; proporcionalidad directa.

---

Autor correspondiente: Karen Porras Lizano. Email: [karen.porras.lizano@una.cr](mailto:karen.porras.lizano@una.cr)

## ABSTRACT

**Background:** In Costa Rica, since 2012, school children are trained in this skill, as a fundamental part of the educational curriculum. **Objective:** Identify and characterize the errors stated by a group of students from Costa Rica when they apply the stages of the mathematical modeling process on simple proportionality tasks. **Design:** Through a qualitative approach, specifically a case study as it aims to study the social interpretations of the participants. **Setting and Participants:** The modeling tasks were applied to 24 students of the seventh level of Secondary Education in the province of San José in Costa Rica, this level being where the subject of direct proportionality is deepened and the participants have been instructed in tasks of modeling throughout primary education. **Data collection and analysis:** Information was collected through the written productions of the participants, the observation of the researchers and the conduct of interviews. A content analysis was carried out, using the categorization proposed by Abrate et al. (2006) for the analysis of mathematical errors. **Results:** The students did not apply all the stages of the mathematical modeling process, a higher frequency of errors due to incorrect or accidental calculations and incorrect associations were obtained when solving the mathematical model. **Conclusion:** We conclude the errors detected in this work are elements of reflection, progress, and feedback that should encourage the search for strategies by teachers that help solve the deficiencies present when students solve modeling activities.

**Keywords:** Errors; mathematical modeling; secondary education; direct proportionality.

## RESUMO

**Antecedentes:** Na Costa Rica, desde 2012, os alunos são treinados em modelagem, pois é uma parte fundamental do currículo educacional. **Objetivo:** Neste trabalho propomos identificar e caracterizar os erros incorridos por um grupo de estudantes costarrriquenhos ao aplicar as fases do processo de modelagem matemática na resolução de tarefas de proporcionalidade direta. **Desenho:** Utilizando uma abordagem qualitativa, especificamente um estudo de caso, especificamente um estudo de caso, uma vez que visa estudar as interpretações sociais dos participantes. **Cenário e participantes:** As tarefas de modelagem foram aplicadas a 24 alunos do sétimo nível do Ensino Médio da província de San José na Costa Rica, sendo este nível onde se aprofunda o tema da proporcionalidade direta e os participantes são instruídos em tarefas de modelagem desde o ensino fundamental. **Coleta e análise de dados:** As informações foram coletadas por meio das produções escritas dos participantes, da observação dos pesquisadores e da realização de entrevistas. Foi realizada análise de conteúdo, utilizando a categorização proposta por Abrate et al. (2006) para a análise de erros matemáticos. **Resultados:** Entre os resultados destaca-se que os participantes não aplicaram todas as fases do processo de modelagem matemática, uma maior presença de erros por cálculos incorretos ou acidentais e associações incorretas foi obtida na resolução do modelo matemático. **Conclusões:** Conclui-se que os erros detectados neste trabalho são elementos de reflexão, evolução e retroalimentação que devem

encorajar a procura por parte dos professores de estratégias que ajudem a resolver as deficiências presentes quando os alunos resolvem as atividades de modelação.

**Palavras-Chave:** Erros; modelagem matemática; Educação secundária; proporcionalidade direta.

## INTRODUCCIÓN

La educación debe asumir el reto de dotar a los estudiantes de destrezas y habilidades para desenvolverse en una sociedad globalizada. Específicamente, la educación matemática es fundamental para desarrollar competencias del siglo XXI, como el pensamiento crítico o la resolución de problemas. En este ámbito competencial, la modelización matemática adquiere un papel relevante (Blum & Niss, 1991; Bosch, García, Gascón & Higuera, 2006; Lesh & Doerr, 2003), sirviendo como herramienta en diversos campos científicos como la ingeniería, nanotecnología, economía, biología o arte, al usar los modelos matemáticos para resolver problemas complejos (Sriraman & Lesh, 2006).

Actualmente, la modelización matemática se ha convertido en una habilidad fundamental a desarrollar en los escolares, muestra de ello es su presencia en documentos curriculares de diversos países (Araya, 2016) o la celebración anual del concurso internacional de modelización matemática para estudiantes (The International Mathematical Modeling Challenge). En el ámbito de la investigación, la modelización ha recibido una atención creciente en la comunidad internacional a través de números especiales dedicados a este tópico en revistas como ZDM(2006 (2-3), 2018 (1-2)), AIEM (2020 (1)) y UNO (2015 (69)), la celebración anual del congreso internacional de modelización matemática (International Conference on Mathematical Modeling and Analysis), o los grupos de trabajo en congresos como el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) y específicamente, en España el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Uno de los países donde la enseñanza de la modelización matemática se está promoviendo desde hace años es Costa Rica. En el año 2012, en el sistema educativo costarricense se realizaron modificaciones del plan de estudios de matemática tanto a nivel de primaria como a nivel de secundaria (Ministerio de Educación Pública, 2012). Una de estas modificaciones fue la inclusión de la modelización matemática como parte fundamental del currículo. En este contexto, según el Sexto Informe del Estado de la Educación del

Programa Estado Nación (PEN, 2017), el 56% de las lecciones que se corresponden anualmente a la materia de matemáticas se pierden en actividades ajenas al aprendizaje. Por tanto, es necesario administrar adecuadamente el tiempo de enseñanza para incrementar las oportunidades de aprendizaje de contenidos matemáticos, y en consecuencia mejorar la preparación para su futuro profesional (López, Molina & Castro, 2017).

Para administrar el delimitado tiempo, es fundamental conocer los errores de los estudiantes con el fin de planificar y proporcionar una enseñanza que se anteponga a ellos (Magen-Nagar, 2016). Visualizando los errores como elementos que brindan información relevante acerca del proceso aprendizaje (Fernández & Brey, 2012), y tras la inclusión de la modelización matemática como parte fundamental del currículo de Costa Rica, este estudio tiene como objetivo identificar y caracterizar los errores en los que incurren un grupo de estudiantes de Costa Rica cuando aplican las fases del proceso de modelización matemática al resolver tareas de proporcionalidad simple.

## MARCO TEÓRICO

### *Errores en educación matemática*

Parte importante del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es el estudio de los errores que los estudiantes realizan (Rico, 1998). En educación matemática los errores han tenido connotaciones negativas, caracterizándose como “esquemas cognitivos inapropiados y perjudiciales para una determinada situación, son intentos no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación y no son solamente consecuencias de una falta específica de conocimiento o un despiste” (Socas, 1997, pp. 43-44). No obstante, a lo largo de las últimas décadas, han adquirido especial relevancia en el área, adoptando enfoques y aproximaciones diversas (Magen-Nagar, 2016; Rico, 1998; Socas, 2007). Rico (1998) considera los errores como una oportunidad, pues a partir de estos, los escolares expresan el carácter incompleto de su conocimiento y ayudan al docente a comprender y completar su conocimiento sobre el estudiante. Los errores son un punto de partida para proponer medidas para prevenir, detectar, atender y solventar las deficiencias que impiden avanzar a los estudiantes en su aprendizaje (Ruano, Socas & Palarea, 2008).

Dentro de las líneas de investigación actuales se encuentra el diagnóstico, análisis y documentación de los errores más comunes, así como su clasificación (Abrate, Pochulu & Vargas, 2006; Movshovitz-Hadar, Inbar &

Zaslavsky, 1987; Radatz, 1980). En este trabajo nos basamos en la clasificación propuesta por Abrate et al. (2006), apoyada en los estudios de Movshovitz-Hadar et al. (1987) y Radatz (1980), la cual contempla las siguientes categorías:

1. *Errores debidos al lenguaje matemático*: Se producen por una traducción incorrecta entre lenguajes, por ejemplo del lenguaje natural al lenguaje formal matemático o viceversa.

2. *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*: Se refiere a los errores cometidos por los estudiantes al procesar información presentada mediante imágenes espaciales o visuales (representaciones icónicas).

3. *Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas*: Son generados al aplicar reglas y propiedades que son válidas en contextos parecidos o relacionados, se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. En estas circunstancias, el alumno es consciente que la situación planteada es diferente de otras abordadas, no obstante, “inventa” nuevas reglas o las deforma, derivando la validez de las que conoce de otras situaciones para el caso que está tratando.

4. *Errores debidos a la recuperación de un esquema previos*: Se deben a la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de resolución de una situación, a pesar de que la tarea matemática es nueva. En estas instancias, el alumno no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido.

5. *Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales*: Son errores debidos a situaciones accidentales como añadir datos extraños o información inconsistente, el olvido de algún dato, respuestas innecesarias, descuido de información relevante en la lectura de un enunciado, tomar datos incorrectamente de una tabla, o cuando todo el procedimiento realizado de la tarea es correcto, pero la solución final no lo es. En este caso, si el estudiante revisara su trabajo o realizara el proceso de verificación de la solución podría darse cuenta del error.

6. *Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos (C6)*. Son causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información. De esta forma identificamos aquellas respuestas que se presentaron de manera aislada o casual, y de las que

no fue posible establecer el patrón de error, aún después de llevar a cabo una entrevista con el alumno.

7. *Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos:* En esta ocasión la causa del error es la carencia en aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, es decir, la falta del conocimiento previo necesario para construir una base conceptual más compleja. Por ejemplo, el error por desconocimiento de la temática involucrada. A diferencia de la categoría anterior (errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos), el estudiante carece del conocimiento previo necesario ya que no ha recibido enseñanza sobre él.

### ***Errores en actividades de modelización matemática***

La modelización matemática es entendida como el procedimiento que parte de un problema del mundo real, el cual requiere de simplificación para elaborar un modelo matemático, plantear conjeturas sobre este y utilizar la matemática como instrumento para elaborar una respuesta, finalizando, con el análisis de los resultados y su contraste con el problema inicial (López et al., 2017). Según Lesh y Doerr (2003), este proceso se desarrolla de forma cíclica a través de cuatro fases: descripción (la información relevante se comprende y se sistematiza), manipulación (se obtiene y resuelve el modelo matemático que representa el problema), predicción (se interpretan y analizan los resultados en relación con las condiciones del problema), y validación (se reflexiona y juzga la viabilidad de la solución del problema matemático). En las actividades de modelización, el pensamiento matemático del resolutor es involucrado en tareas complejas, requiriendo “describir, explicar, debatir, justificar, predecir, escuchar de forma crítica y cuestionar de manera constructiva” (English, 2007, p. 8), procesos esenciales para una vida profesional futura.

La complejidad de las tareas de modelización matemática, conlleva una serie de errores y dificultades en los que incurrir los estudiantes, que no han pasado desapercibidos por los expertos en el área. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones se han centrado en detectar y categorizar los errores cometidos en el proceso de resolución de problemas, existiendo escasas investigaciones que detecten errores cometidos en el proceso de modelización (Brown, Bossé & Chandler, 2016; Çalişici, 2018; Isik & Kar, 2012). En este sentido, se han realizado algunas investigaciones recientes con estudiantes en distintos niveles educativos como universitarios (Brown et al., 2016; Fernández

& Brey, 2012) y escolares de secundaria (Çalişici, 2018; Guerrero, 2016; Socas, Ruano & Hernández, 2016).

Dentro del nivel universitario, los estudios de Fernández y Brey (2012) y Brown et al. (2016) coinciden en detectar errores debidos a la interpretación incorrecta del lenguaje y la falta de verificación de la solución. En el caso de Fernández y Brey (2012), realizan una identificación y clasificación de los errores matemáticos de estudiantes de empresariales y dirección y administración de empresas, y los relacionan con las repercusiones que pueden ocurrir en su futura profesión. Se destacan errores ligados a contenidos matemáticos como el uso inadecuado de porcentajes y números decimales, desprecio de los decimales y errores en el cálculo de magnitudes de tiempo, entre otros. En este mismo nivel educativo, el trabajo de Brown et al. (2016) analiza la naturaleza de los errores de dos estudiantes universitarios en el contexto de la resolución de tareas en un entorno matemático dinámico. Los autores presentan una categorización de tres tipos diferentes de errores: dominio, proceso e interacción. Concluyen que los estudiantes generalmente necesitan más capacitación en el dominio de la resolución de problemas para complementar la instrucción en otros dominios de conocimiento y en muchos casos, esto puede requerir capacitación adicional del maestro en el ámbito de la resolución de problemas (Brown et al., 2016).

A nivel de secundaria, las investigaciones de Socas et al. (2016) y Guerrero (2016) realizan un análisis de los errores al resolver tareas de modelización matemática utilizando el modelo Socas (1997, 2007), el cual propone tres orígenes para los errores: actitudes afectivas, ausencia de sentido y obstáculo. En el primer estudio los resultados muestran que los estudiantes presentan grandes dificultades con el proceso de modelización, siendo el porcentaje medio de acierto 23,74%. En relación con las dificultades y errores, el origen más frecuente en la modelización es la ausencia de sentido, manifestándose en dos ámbitos diferenciados. En uno, viene ocasionado por aspectos que han quedado sin resolver en la Aritmética o la Geometría, y en otro, la ausencia de sentido se ha producido mayoritariamente por las características propias del lenguaje algebraico, en los procesos de Sustitución Formal y Generalización. En relación con las actitudes afectivas, consideran esencial buscar las razones por las que los alumnos no han respondido a algunas preguntas, siendo en muchas ocasiones los bloqueos ocasionados por las actitudes la principal causa del error.

En el estudio de Guerrero (2016), los estudiantes no tenían ninguna experiencia en el proceso de modelización. En sus resultados se obtiene que los

errores de mayor frecuencia son: la particularización, originado en la ausencia de sentido, pues el sistema conceptual previo es insuficiente para dotar de significado a la construcción de los nuevos conocimientos, es decir, no le encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico, pues siguen pensando numéricamente; y el modelo matemático incompleto debido a un descuido al resolver parcialmente los problemas, originado en las actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

El estudio de Çalişıcı (2018) determina dificultades de 34 estudiantes de séptimo año de educación secundaria presentan al resolver problemas de razón-proporción y proponen aplicar la técnica *envelope* para mejorar la comprensión y el éxito al resolver los problemas propuestos. Estos estudiantes con frecuencia presentan errores como el confundir la dirección de la operación en la reducción y expansión de los números al plantear la proporción, sin embargo, los estudiantes mejoran la rapidez y el éxito de la solución con la técnica propuesta en el estudio.

En resumen, la investigación de errores en el proceso de modelización se ha centrado en su detección y categorización (e.g., Brown et al., 2016; Çalişıcı, 2018; Fernández & Brey, 2012) así como las causas que los generan (Guerrero, 2016; Socas et al., 2016), mostrando que los estudiantes presentan sus deficiencias tanto en el contenido matemático como el manejo la resolución de problemas y las fases de la modelización matemática. Sin embargo, en ningún caso los estudiantes habían sido instruidos específicamente en el procedimiento de modelización matemática, lo que contribuiría a mejorar la enseñanza de este proceso, así como la detección y tratamiento de los errores de una forma crítica y constructiva (English, 2007). Dado que en el sistema educativo costarricense incluyó la modelización matemática como parte fundamental del currículo, en este trabajo nos centramos en un grupo de estudiantes de secundaria que han sido instruidos a lo largo de su educación con este enfoque. Específicamente, nos proponemos identificar y caracterizar los errores en los que incurren un grupo de estudiantes de Costa Rica cuando aplican las fases del proceso de modelización matemática al resolver tareas de proporcionalidad simple. Seleccionamos este contenido matemático ya que los estudiantes presentan dificultades relativas en él (Çalişıcı, 2018), además de ser un contenido obligatorio dentro del Programa de Estudios del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012).

## METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un carácter cualitativo, particularmente, es un estudio de caso colectivo pues involucra varios estudios de casos instrumentales con el fin de profundizar y construir el cuerpo teórico: sumar hallazgos, encontrar elementos comunes y diferencias, así como acumular información (Stake, 2010).

### *Participantes*

Esta investigación contó con la participación de 24 estudiantes de la provincia de San José en Costa Rica, con un estatus socioeconómico medio-bajo y con una edad promedio de 13 años. Seleccionamos el nivel de séptimo, por ser este nivel en el que se contempla el contenido de proporcionalidad simple según el Programa de Estudios del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012). A lo largo de la educación primaria, los estudiantes han trabajado tareas de modelización y han recibido instrucción sobre sus fases: descripción, manipulación, predicción y validación (Lesh & Doerr, 2003).

### *Actividades planteadas*

Las actividades de modelización matemática utilizadas para este estudio fueron validadas en procesos de investigación previos (Porras, 2013; Porras y Fonseca, 2015) y cumplen con los principios propuestos por Lesh y Doerr (2003) —significado personal, construcción del modelo, autoevaluación, documentación, prototipo simple y generalización del modelo— que las caracterizan como actividades de modelización matemática. La primera actividad planteada “Cocinando con mi mamá” (ver Figura 1) presenta un contenido de proporciones aplicado a la realización de una receta de cocina. Donde al incrementar las cantidades de los ingredientes dados, el estudiante debe determinar la cantidad correcta de 5,5 tazas de leche y 110 panecillos.

### Figura 1

*Actividad 1 Cocinando con mi mamá (Porras, 2013, pp. 114)*

La mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer un pan casero, la receta específica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes, para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho del pan casero, ella decide usar toda la harina con que cuenta y cuando la mide, descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y del resto de los ingredientes, de manera exacta, para cumplir con la receta. Como sabe que de Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así ¿Cuántas tazas de leche le dije que debería usar? Además ¿Cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la cantidad de ingredientes que usó?

Redacte un informe donde se describa el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Y conteste la siguiente pregunta ¿En cuáles otras

En la segunda actividad “Calculando mi mesada” (ver Figura 2) se ha de determinar el aumento que se debe realizar a su mesada, la cual tiene un monto de dinero que no ha cambiado desde hace diez años. Para resolver esta actividad, se brinda una tabla de artículos de precios de hace diez años y su precio homólogo en la actualidad. Se espera que el estudiante obtenga como respuesta correcta que el aumento de la mesada debe ser aproximadamente 3 veces más que la cantidad de ₡2000, es decir ₡6000.

## Figura 2

*Actividad 2 Calculando mi mesada (Porras & Fonseca, 2015, p. 56-57)*

¡Hola! Soy Mario, necesito tu ayuda con un precio de mi mesada. Cuando mi hermana Mariela recibía una mesada de ₡2000 pero eso fue hace 10 años. Ahora yo tengo 13 años. Mis padres me dan una mesada también. Creo que deberían de aumentarla teniendo en cuenta que las cosas cuestan más en la actualidad. En Costa Rica con ₡2000 ya no se puede comprar lo mismo que compraba mi hermana hace diez años.

Para probar mi hipótesis he recogido los precios de algunos artículos. De igual forma, he recogido los precios de los artículos similares en la actualidad.

¡Esto es lo que necesito de ti!

Usa la información de los precios actuales y de hace diez años para determinar ¿cuál debe ser el monto de mi mesada?. Justifica tu respuesta con razones lógicas. Mis padres no aceptarán argumentos emocionales.

Además explica el método de solución del problema que usaste con tus compañeros en situaciones similares lo que te ayudará a determinar cuáles deben ser sus precios en la actualidad.



Figura 1. Precios de Sateques hace 10 años



Figura 2. Precios de Sateques en la actualidad



Figura 3. Precio de PlayStation hace 10 años



Figura 4. Precio de PlayStation en la actualidad



Figura 5. Combo Papa Johns hace 10 años



Figura 6. Combo Papa Johns en la actualidad

## Procedimiento y recolección de datos

Durante la puesta en práctica de las actividades de modelización matemática, los 24 estudiantes participantes se dividieron en subgrupos. Para que el proceso fuese lo más natural posible, estos subgrupos fueron los mismos que se forman usualmente durante el desarrollo normal de clase.

Para la recolección de datos, en primer lugar, se aplicaron las actividades de modelización matemática (Figura 1 y Figura 2). Cada una de ellas necesitó de cuatro sesiones de 40 minutos. Al inicio de cada una de las sesiones, se realizó una presentación de las actividades, para familiarizar al estudiante con el contexto utilizado. Se le pidió que escribieran todas sus respuestas en un informe, también se recogió información de algunos

borradores de los procesos que los estudiantes realizaron. Con ello, recopilamos las producciones escritas de los procesos de los estudiantes. Además, durante esta aplicación se realizaron observaciones participantes, con el objetivo de obtener evidencias sobre los errores generados por los estudiantes al resolver las actividades. Una de las investigadoras estuvo presente durante el proceso como guía en la aplicación de las actividades, pues la finalidad principal era que los estudiantes resolvieran las actividades de forma autónoma. El profesor oficial del grupo participante contribuyó a proporcionar datos de los participantes y ayudar durante las grabaciones.

Con el fin de profundizar en las respuestas escritas, contrastar los datos y comprender respuestas ambiguas, se llevaron a cabo entrevistas. Estas se realizaron de forma individual a algunos de los estudiantes de los grupos participantes. Para ello, se seleccionó al azar a un estudiante de cada grupo, y se le realizaron preguntas relativas a los errores incurridos durante la resolución de las tareas. Para que los participantes tuvieran confianza durante el proceso la profesora fue la entrevistadora.

### *Análisis de los datos*

Se llevo a cabo un análisis de contenido de los datos obtenidos (Fraenkel, Wallen, & Hyun, 2011). Las categorías de errores utilizadas en el análisis están basadas en la categorización propuesta por Abrate et al. (2006), pues no hemos encontrado una clasificación para errores en tareas de modelización. Una vez categorizados fueron asociados a las fases de la modelización descritas en el marco teórico. La clasificación de errores de Abrate et al. (2006), está formada por siete categorías descritas anteriormente: Errores debidos al lenguaje matemático (C1), Errores debidos a dificultades para obtener información espacial (C2), Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas (C3), Errores debidos a la recuperación de un esquema previo (C4), Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales (C5), Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos (C6), Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos (C7).

## **RESULTADOS**

A continuación, se presentan los principales resultados organizados en dos apartados correspondientes a cada una de las actividades planteadas a los estudiantes.

### ***Errores presentes en las respuestas a la actividad 1***

Para la primera actividad (Figura 1) se contó con la participación de 24 estudiantes divididos en 9 grupos, 6 de estos estuvieron formados por 3 integrantes y 3 grupos por 2 estudiantes cada uno. Por lo que, se generaron 9 soluciones distintas de las cuales solo dos fueron correctas, específicamente las del primer y noveno grupo.

En la Tabla 1 se presenta la información de cómo los grupos de estudiantes implementaron las fases del proceso de modelización en la actividad 1.

Se observa que 6 de los nueve grupos, aplicaron la primera fase “descripción” del proceso de modelización, es decir comprendieron, ordenaron y sistematizaron la información propuesta en la tarea. En esta fase, dos de los grupos, específicamente el segundo y cuarto grupo, realizaron el planteamiento del modelo matemático de forma incorrecta, sin realizar ningún proceso previo más que una lectura de la tarea (ver imagen 1 de la Figura 3). Además, se destaca la respuesta dada por el grupo 3 en la que añadieron información inventada (cucharadas de sal, canela, etc.) que no proporciona la tarea original (ver imagen 2 de la Figura 3).

**Tabla 1**

#### *Implementación de fases de modelización en la actividad 1*

Fases de modelización	Evidencias	Grupos <sup>a</sup>
Descripción	Ordena y sistematiza la información en una tabla, esquema, dibujo o por etapas.	G1, G5, G6, G7, G8, G9
	No ordena la información, plantea directamente una operación.	G2, G4
	Inventa datos que no proporciona la tarea y ordena la información.	G3
Manipulación	Obtiene un modelo matemático y lo resuelve.	Todos
Predicción	Analizan e interpretan los resultados. Brindan una respuesta al problema.	G1, G2, G4, G5, G6, G7, G8
	Si resuelve la tarea, pero no interpreta los resultados.	G3, G9

Validación	Muestra una revisión preliminar al resolver la tarea.	G3, G4
	No muestra una revisión de la respuesta final incorrecta, se encuentran errores.	G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8
	Resuelven correctamente la tarea, pero no realizan una revisión de la respuesta.	G1, G9

<sup>a</sup> Los Gi para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

### Figura 3

*Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática*

leche  
¿Cuántas tazas debería usar?  
- 15 tazas de leche  $\rightarrow$  Multiplicamos  $5 \cdot 3 = 15$

¿Cuántos panecillos pudo preparar mi mamá con la harina?  
- La mamá de Carlos pudo preparar panecillos  $\rightarrow$  Multiplicamos  $20 \cdot 3 = 60$   
 $60 - 3 \cdot 5 = 15 - 10 = 5 - 2 = 3$

1. Calculamos que la mamá de Carlos ocupa 2/1 leche, se ocupan 3 huevos, un cuartito de sal, 2 cc de canela, 2 tazas de azúcar, 1 cucharada de polvora.  
2. 3 tazas de harina  
3. 20 panecillos.  
4. Usamos una hipótesis para cada ingrediente, a decir que calculamos lo que ocupábamos para cada uno lo que uno cree.  
 $2 \cdot 5 = 10 \div 5 - 3 = 2$

Para la segunda fase del proceso de modelización, manipulación, todos los grupos formularon un modelo matemático y lo resolvieron. Al analizar la información obtenida en esta fase se encontraron distintos errores para cada una de las siguientes categorías: errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales y errores debidos a la recuperación de un esquema previo. La Tabla 2 resume estos errores en los que los participantes incurrieron en la actividad 1, así como los grupos que realizaron cada uno.

**Tabla 2***Tipos de errores presentes en las respuestas a la actividad 1*

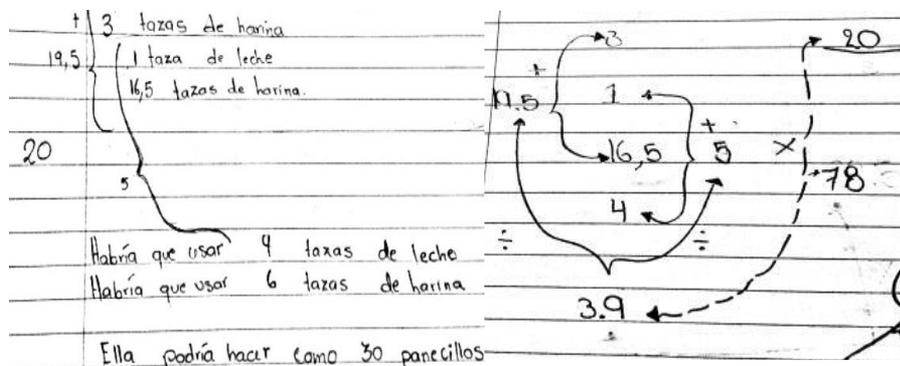
Categorías	Errores en la actividad 1	Grupos*
C3. Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas	Realizan operaciones aritméticas sin tener en cuenta el contexto.	G6, G4
C4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previo	Invento de datos: 4 tazas de leche.	G6
	Error al confundir la división de números naturales con la de los números decimales 16,5 entre 20.	G5
C5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales	Falta introducir una correspondencia $3=1$	G8
	Error al introducir la correspondencia $3 = 0,5$	G8
	Error al plantear la operación $16,5 \div 3$	G8
	Lectura incorrecta “una taza leche”.	G3, G4
	En la correspondencia $3=1$ , obtienen la mitad de 3, pero en la de 1 escriben “un cuarto” en vez de “mitad”.	G2
	Error al establecer la correspondencia $20=1$ , suman 7,5 en vez de 10.	G2
	Introducir datos inventados que no proporciona la tarea en forma consciente.	G3
C8. Otros		

\* Los  $G_i$  para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

La categoría errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas se observó en las respuestas del cuarto y el sexto grupo. En la respuesta del sexto grupo (Figura 4) se efectuaron operaciones sin tener en cuenta el significado de los datos. Por ejemplo, los estudiantes sumaron  $3+16,5$  sin observar que 3 representa la cantidad de tazas de harina y que estas tazas están dentro de las 16,5 tazas de harina.

#### Figura 4.

Ejemplo de error debidos a inferencias o asociaciones incorrectas.



Ante este proceso, se entrevistó a uno de los integrantes de este grupo para indagar en la respuesta dada por los estudiantes:

Profesora: *¿Qué operaciones realizaron para obtener el resultado de 19,5 que aparece en la solución del problema?*

Estudiante: *Sumamos 16,5 tazas de harina con 3 tazas de harina y esto nos dio como resultado 19,5 tazas de harina.*

Estudiante: *Luego sumamos 1 taza de leche con las 4 tazas de leche que nos dio 5 tazas de leche.*

Profesora: *¿Por qué usaron ese procedimiento?*

Estudiante: *Pues la idea era hacer más harina, hacer más ingredientes para obtener más pan.*

En la misma respuesta, los estudiantes del sexto grupo consideraron 4 tazas de leche que el enunciado de la tarea no menciona, y a esta cantidad le sumaron 1 taza de leche, obteniendo como resultado final 5 tazas de leche, lo que representa una inferencia incorrecta.

El grupo 4, planteó una respuesta similar en donde multiplicaron la cantidad de 20 panecillos por la cantidad de 3 tazas de harina, concluyendo que el resultado final 60 es la cantidad de panecillos correspondiente a 16,5 tazas (ver imagen 1 de la Figura 3), realizando asociaciones incorrectas.

Con respecto a la categoría errores debidos a recuperación de un esquema previo, un ejemplo lo encontramos en la respuesta manifestada por el grupo 5 presente en la Figura 5. En esta los estudiantes recurrieron al algoritmo

de la división de números naturales para efectuar la división de los números 16,5 entre 20, utilizando un esquema de conocimiento antiguo. Durante este proceso, estos participantes inventaron una técnica para poder resolver la operación, pues manifestaron no saber cómo hacerla. Asimismo, los estudiantes describen el proceso realizado de la siguiente manera: “Lo que nosotros razonamos fue dividir 16,5 de harina entre los 20 panecillos y el total que nos dio fue 825 panecillos”, confundiendo los números decimales con los números naturales.

En relación con la categoría errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, en la Figura 5, donde se expone la respuesta del grupo 8, los estudiantes presentan la correspondencia simbólica  $3=1$ , es decir tres tazas de harina que le corresponde a una taza de leche. La solución es incorrecta debido a que aparece 4 veces la correspondencia  $3=1$ , falta introducir una correspondencia más, por lo que se categoriza como cálculos incorrectos o accidentales. Otro error cometido fue introducir la correspondencia  $3 = 0,5$  donde en la parte derecha de la correspondencia dividen a la mitad la unidad, pero la parte izquierda se muestra invariante.

### Figura 5

*Ejemplos de errores de la actividad 1*

Harina	Leche	Pan	
3	1	20	$3=1$
			$3=1$
			$3=1$
			$3=1$
			$3=5$
$3 \times 16,5 = 5,5$		$5 \times 20$	
		100	

Otro ejemplo de este tipo de error del grupo 8 se evidencia en la Figura 5. Específicamente el producto 3 por 16,5 es incorrecto, pues lo que los estudiantes querían plantear era un cociente de la cantidad 16,5 entre 3 para las tazas de harina, lo que coincidirá en este caso con la cantidad correcta de tazas de leche. Estos estudiantes se equivocaron en el signo de la operación y en el orden de los elementos de ella, no en el resultado; siendo un descuido a la hora de escribir sus procesos.

Otro ejemplo de esta misma categoría se manifiesta en la respuesta del grupo 2, presente en las dos imágenes de la Figura 6, donde los participantes brindan como respuesta “5 tazas de leche y un cuarto de leche”, en donde inferimos que el estudiante considera que cada 3 tazas de harina equivalen a 1 taza de leche. Además, los estudiantes obtienen la mitad de las 3 tazas de harina, pero esta misma operación no es efectuada a 1 taza de leche, dado que escriben incorrectamente “un cuarto de leche o  $\frac{1}{4}$ ”. Para encontrar la cantidad de panecillos, los participantes aplicaron el mismo razonamiento utilizado al obtener la cantidad de leche pero se realiza incorrectamente, pues en el último paso se debía usar la mitad de 20 y no fue así.

### Figura 6

*Ejemplo de error debido al cálculo incorrecto al resolver la actividad 1*

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1,5 = 16,5$ 5 tazas de leche y un cuarto de leche.	$3 + 3 + 3 + 3 + 1,5$ <hr/> 1 <hr/> 2 $1/4$ <hr/> 3 <hr/> 4 <hr/> 5 <hr/> $20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 7,5$
--	--

Por otra parte, destaca la respuesta dada por el grupo 3 en la que añadieron información inventada (cucharadas de sal, canela, etc.) que no proporciona la tarea original, resolviendo la actividad utilizando los datos proporcionados por el problema y los inventados.

En la fase de predicción de modelización matemática, 7 de los nueve grupos interpretaron y analizaron los resultados en relación con los datos proporcionados en la tarea. Dos de los grupos, específicamente el tercer y noveno grupo omitieron esta fase, a pesar de que el noveno grupo brindó una de las dos soluciones correctas del problema, no brindó una interpretación de la respuesta. En la imagen 2 de la Figura 3, se presenta la solución del grupo 3 como ejemplo de este tipo de error.

En el caso de la fase de la validación, se obtuvo que durante el proceso de resolución de la tarea solo dos de los grupos, el tercer y cuarto grupo, descuidan información presente en el enunciado, al adquirir la cantidad de leche que menciona la tarea, este error se categoriza como un error accidental y se gesta en la segunda etapa del proceso de modelización. Los grupos arreglan su error logrando encontrar la cantidad de leche que ocupaban y brindan una

solución al problema. No se obtuvieron evidencias de la revisión de las respuestas finales, además en ellas se encuentran errores que se podrían haberse corregido si se hubiera realizado una reflexión y retroalimentación de las soluciones.

### Errores presentes en las respuestas de la actividad 2

Para la segunda actividad (Figura 2), participaron 22 estudiantes, 2 menos que en la anterior ya que no asistieron a clase el día de la aplicación. Se formaron 6 grupos de 3 integrantes y 2 grupos de 2 estudiantes cada uno, por lo que se generaron 8 respuestas distintas, todas ellas incorrectas.

En la Tabla 3 se presenta la información correspondiente a las fases del proceso de modelización matemática que realizaron los diferentes grupos de estudiantes al resolver la actividad 2.

**Tabla 3**

*Implementación de fases de modelización en la actividad 2*

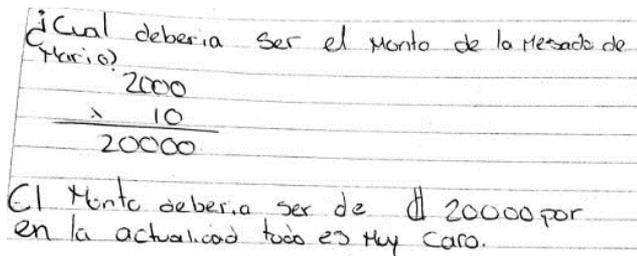
Fases de modelización	Evidencias	Grupos*
Descripción	Ordena y sistematiza la información en una tabla, esquema, dibujo o por etapas.	G1, G2, G4, G6, G7, G8
	No ordena la información, plantea directamente una operación.	G3, G5
Manipulación	tiene un modelo matemático y lo resuelve.	G1, G2, G3, G5, G7, G8,
	Resuelve parcialmente el modelo matemático.	G4, G6
Predicción	Analizan e interpretan los resultados. Brindan una respuesta al problema.	G3, G5, G7, G4
	Sí resuelve la tarea, pero no interpreta los resultados.	G1, G2, G6, G8
Validación	No se muestra una revisión de problema, se encuentran errores.	Todos

\* Los  $G_i$  para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

En la primera fase “descripción”, seis de los ocho grupos ordenaron y sistematizaron los datos de la tarea, algunos realizaron tablas y esquemas, entre otros. Dos de los grupos, el tercer y quinto grupo no simplificaron la información de la tarea, sino que directamente plantearon un modelo matemático en forma incorrecta. En la siguiente figura, se muestra la respuesta del grupo 3 como ejemplo.

### Figura 7

*Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática*



¿Cual debería ser el monto de la Mesada de Mario?

$$\begin{array}{r} 2000 \\ \times 10 \\ \hline 20000 \end{array}$$

El Monto debería ser de \$ 20000 por en la actualidad todo es muy caro.

Para la segunda fase, manipulación, seis de los ocho grupos crearon un modelo matemático y resolvieron este. El sexto grupo obtiene un modelo matemático distinto, para dos de los tres los artículos presentes en la tarea, dejando de lado uno de los artículos, por lo que se omite información relevante en la solución del problema. El cuarto grupo brinda una respuesta aproximada a la solución de la tarea (ver Figura 8), sin crear para esto un modelo matemático.

## Figura 8

*Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática*

180500 Play  
2800 bolso  
1360 pizza

¿cuál debe ser el monto actual de mi mesada?

debe ser 3000\$ por que en 2 semanas tiene para bolso el día días tiene para on 1er 3 y en 2 semanas tiene para PIZZA

Además, en esta fase se encontraron errores matemáticos que se clasificaron en tres categorías: errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, errores debidos a la recuperación de un esquema previo y errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales. En la Tabla 4 se resumen los distintos errores presentados, así como los grupos que realizaron cada uno.

**Tabla 4**

*Tipos de errores presentes en las respuestas a la actividad 2*

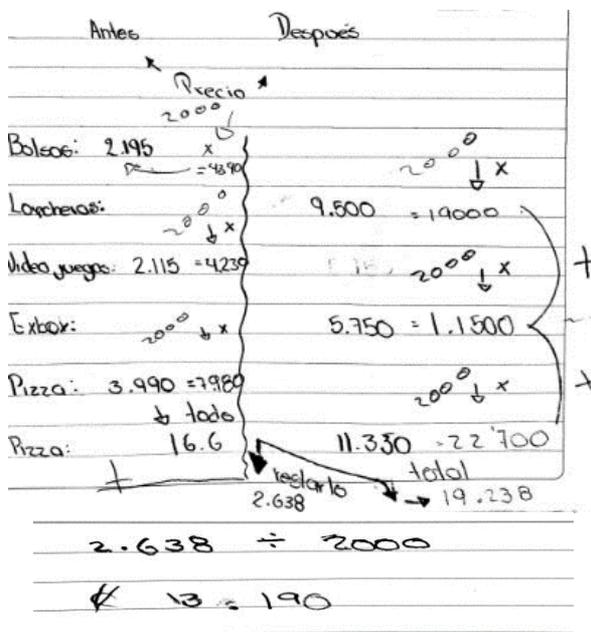
Categorías	Errores en la actividad 2	Grupos*
C3. Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas	Aumentos incorrectos.	G1, G3, G7, G5, G8
	Establecer 13,190 como una cantidad exacta.	G1
	Confundir el “punto” de las unidades de millar con la “coma” decimal.	G1
C4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previo	Error al efectuar la operación división de números naturales.	G7
C5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales	Tomar un dato mal de la tabla.	G2
	Escriben mal cantidad 13,190 cuando debió ser 1,3190.	G1

\* Los Gi para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

En cuanto a la categoría errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, esta fue la más común en las respuestas. Particularmente, 5 de los 8 grupos participantes en esta actividad, usaron operaciones sin un camino válido y concluyeron que el resultado final era el aumento al monto de la mesada que debía realizar. Un ejemplo, se muestra en la Figura 9 donde se presenta la respuesta propuesta por los estudiantes del grupo 1.

**Figura 9**

*Ejemplo de error del tipo asociaciones incorrectas al resolver la actividad 2*



Al analizar la información de la respuesta anterior se encuentra que, en los productos efectuados, los estudiantes confunden el punto que separa en las cantidades las unidades de millar, con la coma que separa la parte decimal, siendo esto una inferencia incorrecta. Además, que no hay un camino claro y argumentado que justifique el razonamiento utilizado por los estudiantes, por lo que se incidió en ella a través de una entrevista a los participantes del grupo.

Profesora: *¿Qué fue lo que hicieron en los primeros pasos de la solución?*

Estudiante: *Dividimos los precios en dos, los precios pasados y los precios actuales. Multiplicamos cada uno por ¢2000, pues al chiquito le daban ¢2000 y ahora los precios son más caros.*

Estudiante: *Sumamos todos los resultados de las multiplicaciones y los resultados los restamos, esto nos dio ¢2638.*

Estudiante *Luego, hicimos la división de  $2638 \div 2000$  que nos dio ¢13,190 que es una cantidad exacta.*

Estudiante *Esto lo hicimos para que nos diera una cantidad exacta, para lo que él va a comprar en una semana, porque el problema decía que cada semana le daban ¢2000, entonces había que aumentar la mensualidad.*

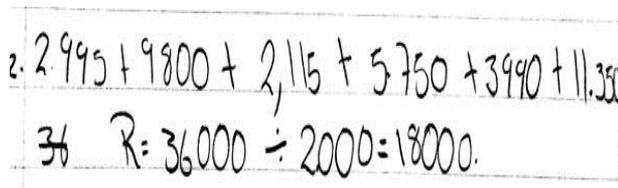
Así en los resultados anteriores se infiere incorrectamente que al multiplicar cada uno de los precios por el monto de la mesada para que Mario (personaje de la actividad) obtuviera más dinero. Otro de los errores se debe al realizar la diferencia de los totales de los precios, cada uno de estos multiplicado por ¢2000, y volver a efectuar la división por este mismo monto. Además, encontramos la afirmación de que el número 13,190 es una cantidad exacta, lo cual es también una falacia en su razonamiento.

Asimismo, observamos otros errores de asociaciones incorrectas como la respuesta presente en la Figura 7, donde para calcular el monto de la mesada de Mario, los integrantes del grupo 3 multiplicaron el monto de la mesada de hace 10 años por la cantidad de años que han trascendido, obteniendo ¢20000, asumiendo incorrectamente que el aumento es el mismo para todos los años.

A estos errores también añadimos el encontrado en la respuesta del grupo 7 presente en la Figura 10. En esta se suman los precios de los artículos actuales con los precios de los artículos hace 10 años, obteniendo como resultado ¢36000. Posteriormente, realizan el cociente por el valor de ¢2000 (monto que le brindaban de mesada a Mario), obteniendo como resultado final ¢18000. Los estudiantes concluyen que este monto es el aumento actual de la mesada de Mario: “A Mario le tienen que subir su mesada a ¢18000 por quincena por el presupuesto ha subido de precio”. Las respuestas del grupo 5 y 8 fueron muy similares a la descrita.

## Figura 10

Errores obtenidos solucionar la actividad 2 debidos a supuestos incorrectos



2.  $2.995 + 9800 + 2,115 + 5.750 + 3990 + 11.350$   
36  $R: 36000 \div 2000 = 18000.$

Con respecto a errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, clasificamos la respuesta del grupo 2 esta categoría. En una de ellas, los estudiantes efectuaron la suma de los montos de los artículos de hace 10 años, consideraron el precio de la cuota quincenal del artículo Playstation, que corresponde a  $\text{C}\$2115$ , pero al realizar el mismo procedimiento con los precios actuales, el grupo considera erróneamente la cuota de contado de  $\text{C}\$256750$ , en lugar de la cuota quincenal. Este proceso se reafirma con los datos proporcionados por la entrevista realizada a uno de los estudiantes del grupo participante:

Profesora: *¿Vieron que en las imágenes de los artículos de hace 10 años y los actuales de Playstation había dos precios, el precio por quincena y el precio por contado?*

Estudiante: *No profe, en la imagen de Playstation de hace 10 años solo vimos ese (señalando el  $\text{C}\$2115$ ) y en otro solo vimos el precio muy alto, el actual (refiriéndose al precio por contado del artículo de  $\text{C}\$256750$ ).*

Otro ejemplo de esta categoría se puede observar en la Figura 9 que presenta la solución realizada por el grupo 1. En ella observamos que al efectuar la operación  $2638 \div 2000$  se obtuvo como resultado incorrecto  $\text{C}\$13,190$ , pues debería ser  $\text{C}\$1,3190$ , equivocándose en la posición de la coma.

Al igual que la actividad 1, una de las respuestas de la actividad 2 presenta un error debido a la recuperación de un esquema previo, evidenciado en la Figura 10. En ella se presenta la solución realizada por el grupo 7, en la cual se visualiza la operación  $36000 \div 2000$  obteniendo como resultado incorrecto  $\text{C}\$18000$ , donde los estudiantes confunden la división anterior la operación  $36000 \div 2 = 18000$  y no son conscientes de que las operaciones son distintas.

En la tercera fase del proceso de modelización, la predicción del problema de modelización matemática, 3 de los nueve grupos después de resolver el modelo matemático y brindar una posible respuesta a este, brindaron una interpretación utilizando las hipótesis del problema (ver Figura 7 y Figura 8). Uno de los grupos, específicamente el grupo 4, no creó el modelo matemático, pero brindó una respuesta aproximada (ver Figura 8), efectuando posteriormente una interpretación de ella. Cuatro de los grupos no aplicaron esta etapa, evidencian solamente una solución numérica, sin significado en relación con las condiciones del problema (ver Figura 9).

Por último, en todas las soluciones propuestas fueron incorrectas, en ellas se muestran errores, por lo que ninguno de los grupos realizó una revisión exhaustiva de las respuestas realizadas, dejando de lado la aplicación de la cuarta fase del proceso de modelización, la validación de las respuestas obtenidas.

## **DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES**

Los datos obtenidos muestran que, en general, los grupos participantes no aplicaron todas las fases del proceso de modelización matemática. En relación con cada una de las fases, se encontró que, en ambas actividades, dos de los grupos omitieron la primera fase, descripción, plantearon directamente el modelo matemático sin realizar una sistematización previa de la información. Para la actividad 2, ocurrió lo contrario, dos de los grupos omitieron la construcción del modelo matemático y la resolución de este (segunda fase de la modelización matemática), pero sí ejecutaron la primera fase. En relación con la tercera fase, predicción, dos de los grupos en la tarea 1 y cuatro de los grupos en la tarea 2, omitieron esta fase al gestar una respuesta numérica, pero no una interpretación de ella, ni especificar el proceso para llegar hasta ella, lo que sugiere que han estado expuestos a una enseñanza donde se prioriza la respuesta final, y no el proceso hasta llegar a ella. Cabe destacar, que para la actividad 1, solo dos de las respuestas obtenidas fueron correctas, para la actividad 2, ninguna fue correcta. Finalmente, para la cuarta etapa, validación del proceso de modelización matemática, en la actividad 1 solo dos de los grupos realizaron una revisión preliminar al formular el modelo matemático, es decir durante la segunda fase. Sin embargo, ninguno de los grupos realizó una reflexión y juzgó la viabilidad de la solución final obtenida. De igual manera con la actividad 2, se no se aplicó la cuarta etapa del proceso de modelización.

Atendiendo a la clasificación de Abrate et al. (2006), en la primera actividad de modelización, la categoría de error más frecuente en las respuestas

fue errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales. Dentro de esta categoría, los grupos de estudiantes descuidaron información presente en el enunciado, cantidades necesarias en el proceso de resolución y no utilizaron todos los datos. En la segunda actividad, la categoría de error con mayor presencia en las respuestas fue errores debidos a asociaciones incorrectas (con respuestas de aumentos incorrectos). Coincidiendo con los resultados de Fernández y Brey (2012), Isik y Kar (2012) y Socas et al. (2016), otros tipos de errores corresponden a confundir el punto que separa en las cantidades las unidades de millar, con la coma que separa la parte decimal y resolver incorrectamente operaciones aritméticas básicas por recuperación de un esquema antiguo del conocimiento (como confundir la operación división con números naturales con la de cantidades decimales).

Los datos obtenidos en las entrevistas mostraron que, en gran parte de los errores pudieron haber sido superados si los estudiantes hubieran realizado la etapa de validación de la solución del problema, ya sea que se realice una revisión previa de los procesos matemáticos al final o durante el proceso cíclico de modelización. Este resultado, común con investigaciones previas (Fernández & Brey, 2012; Guerrero, 2016; Socas et al., 2016), parece ser un hecho habitual en diferentes niveles educativos, por lo que creemos necesario que la enseñanza incida en el manejo de esta fase (Brown et al., 2016; Fernández & Brey, 2012; Ruano et al., 2008; Socas et al., 2016). Al mismo tiempo, es necesario investigar cuales son las posibles causas de la no aplicación de esta fase por parte de los estudiantes (Socas et al., 2016).

Cabe destacar una de las respuestas, no corresponde a ninguna de las categorías de Abrate et al. (2006), en la que los estudiantes resuelven la actividad utilizando los datos del enunciado y datos inventados. Consideramos que la particularidad de esta respuesta es debida al tipo de actividad (modelización matemática) y la enseñanza sobre modelización que han recibido los estudiantes, en donde es usual encontrar tareas no rutinarias y abiertas (en las que hay que recoger datos y no hay una única solución correcta). En ese sentido, es necesario ampliar la investigación con un mayor número de estudiantes, pues las particularidades que presentan los estudiantes que han recibido enseñanza sobre modelización aún son desconocidas.

Interpretamos los resultados con la cautela que supone las limitaciones del trabajo, la especificidad del contexto donde se desarrolla la investigación, la muestra de participantes y el número de actividades no permite establecer generalizaciones. Sin obviar estas limitaciones, hemos obtenido información valiosa para mejorar la enseñanza de la modelización. A pesar de que los errores

dependen de la tarea presentada y de su contenido, las coincidencias detectadas con otros trabajos (Fernández & Brey, 2012; Guerrero, 2016; Isik & Kar, 2012; Ruano et al., 2008; Socas et al., 2016), muestran la necesidad de prestar especial atención a la prevención y tratamiento de los errores presentes en las representaciones y resolución de operaciones aritméticas. Los errores detectados en este trabajo son elementos de reflexión, avance y retroalimentación que deben incentivar la búsqueda de estrategias por parte de los docentes que ayuden a solventar las deficiencias presentes al resolver actividades de modelización. Además, es necesario hacer énfasis en la enseñanza de las etapas del proceso cíclico de modelización, con especial atención a la necesidad de reflexionar en el proceso seguido, la razonabilidad de la solución y su validación.

Finalmente, concluimos que es fundamental que los profesores analicen detalladamente la estructura del problema, previendo los posibles errores de los escolares (Çalışici, 2018; English, 2007; Socas et al., 2016), y propongan experiencias de aprendizaje significativas para el estudiante (Socas, 1997). En ese sentido, las actividades de modelización matemática son adecuadas por contener situaciones de la vida real cercanas al estudiante y estimular el pensamiento creativo y las habilidades de resolución de problemas.

## **AGRADECIMIENTOS**

Trabajo realizado con el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+I (MICINN).

## **DECLARACIONES DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES**

KPL ha contribuido con el estudio de errores y modelización matemática, el diseño, la implementación de las tareas, el análisis de los datos y redacción del texto final. EC-R ha revisado y corregido el diseño y análisis de datos, aconsejando sobre las situaciones concretas y ha colaborado en la redacción del texto final.

## **DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS**

Los datos se encuentran en los archivos de las autoras, siendo la encargada de su custodia y consulta por los interesados la primera autora.

## REFERENCIAS

- Abrate, R., Brate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1era ed.). Universidad Nacional de Villa María.
- Araya, R. (2016). STEM y modelamiento matemático. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 291-317.
- Bosch, M., García, F. G., Gascón, J. y Higuera, L. R. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Educación Matemática*, 18(2), 37-74.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and Links to Other Subjects. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Brown, M., Bossé, M. J. y Chandler, K. (2016). Student Errors in Dynamic Mathematical Environments, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17 (1), 1-27.
- Çalışıcı, H. (2018). Middle School Students' Learning Difficulties in the Ratio-proportion Topic and a Suggested Solution: Envelope Technique. *Universal Journal of Educational Research*, 6(8), 1848-1855. <http://doi.org/10.13189/ujer.2018.060830>
- English, L. D. (2007) Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. In Watson, J.; Adams, V. M. (Eds.) *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Mathematics Education Research Group of Australasia Annual Conference* (pp. 275-284). Tasmania: Universidad de Launceston.
- Fernández, A. y Brey, R. (2012). Errores en el aprendizaje de las matemáticas financieras. *Enseñanza de las ciencias*, 30(2), 73-92.
- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E. y Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. McGraw-Hill.

- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media. *Revista ciencias de la educación*, 26(47).
- Isik, C. Y Kar, T. (2012). The Analysis of the problems posed by the pre-service teachers about equations. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(9). <http://doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1>
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In: Lesh, R.; Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Lawrence Erlbaum.
- López, R.; Molina, M. Y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75-96.
- Magen-Nagar, N. (2016). Examining Teaching Based on Errors in Mathematics Amongst Pupils with Learning Disabilities. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 506-522.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de estudio en matemática para la educación general básica y el ciclo diversificado*.
- Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S. y Zaslavky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 18(1), 3-14. <http://doi.org/10.2307/749532>
- Porras, K. (2013). Modelaje matemático como método de investigación en las clases matemáticas. En: *Octavo Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora* (pp. 104-115). Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica. [https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/08\\_memoria\\_1.pdf](https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/08_memoria_1.pdf)
- Porras, K. y Fonseca, J. (2015). Aplicación de actividades de modelización matemática en la educación secundaria costarricense. *Uniciencia*, 29(1), 42-57.

- Programa Estado de la Nación. (2017). *Sexto Informe Estado de la Educación*. San José: Programa Estado de la Nación del Consejo Nacional de Rectores.
- Radatz, H. (1980) Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.
- Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Gómez, P.; Rico, L. (Eds.). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Stake, R. E. (2010). *Qualitative Research. Study how things work* (1era ed.).
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En: Rico, L. (Ed.). *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Horsori.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En: Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Socas, M., Ruano, M. R., Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 21-41.
- Sriraman, B. y Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 247-254.