ACTA SCIENTIAE
ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6220

Estrategias de Futuros Profesores de Matemáticas Al Articular Representaciones de una Función

Tulio Amaya De Armas[a]
Eduardo Carrasco Henríquez[b]
Humberto Álvarez Sepúlveda[c]

[a] Institución educativa Madre Amalia de Sincelejo, Colombia
[b] Departamento de Educación Básica de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
[c] Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

Received for publication 24 Oct. 2020. Accepted after review 12 Aug. 2021
Designated editor: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Diferentes investigaciones han evidenciado las dificultades que presentan los futuros profesores de matemáticas para articular los elementos de una función, en particular sus diferentes representaciones, lo que ha motivado este estudio. **Objetivo**: analizar la articulación que futuros profesores de matemáticas, hacen de las representaciones semióticas y significados parciales de la noción función. **Diseño:** Se utilizó un diseño cualitativo. **Entorno y participantes**: La muestra de informantes estuvo conformada por 37 futuros profesores de matemática de una universidad chilena. **Recolección y análisis de datos**: Para recoger la información se aplicaron entrevistas basadas en las respuestas dadas por los futuros profesores al resolver situaciones problema que involucran relaciones funcionales, de las que debían producir y conectar sus representaciones, tanto con elementos conceptuales, como del contexto sociocultural. La información se procesó utilizando la técnica análisis de contenido. **Resultados:** Los resultados evidencian buen estado de desarrollo de la dimensión matemática del conocimiento didáctico-matemático de los participantes. Respecto al conocimiento didáctico, mientras unos lograron articular adecuadamente los significados parciales de función, y las representaciones producidas, otros muestran limitaciones, al no poner al servicio del conocimiento matemático, el conocimiento con el que potencialmente pueden llevar a cabo situaciones de enseñanza, estableciendo pocas conexiones entre los elementos de las representaciones producidas, con elementos conceptuales y socioculturales correspondientes. **Conclusiones:** Se concluye sobre la necesidad de implementar estrategias que les permitan a los futuros profesores, articular los significados parciales y las representaciones de una función, con elementos

Autor correspondiente: Tulio Amaya De Armas. Email: tuama1@hotmail.com

conceptuales y socioculturales, que los lleve a visionar potenciales actividades de enseñanza de este concepto.
Palabras claves: Futuros profesores; Articulación; Función; Representaciones semióticas; Significados parciales de la noción función.

Estratégias de futuros professores de matemática ao articular representações de uma função

RESUMO

Contexto: Diferentes investigações têm mostrado as dificuldades que os futuros professores de matemática apresentam para articular os elementos de uma função, em particular suas diferentes representações, o que motivou este estudo. **Objetivo**: analisar a articulação que os futuros professores de matemática fazem das representações semióticas e significados parciais da noção de função. Design: Um design qualitativo foi usado. **Design**: Um design qualitativo foi usado. **Ambiente e participantes**: A amostra de informantes consistiu de 37 futuros professores de matemática de uma universidade chilena. **Recolha e análise dos dados**: Para recolher as informações, foram aplicadas entrevistas a partir das respostas dadas pelos futuros professores na resolução de situações-problema envolvendo relações funcionais, das quais estes deviam produzir e ligar as suas representações, tanto com os elementos conceptuais como com o contexto sociocultural. As informações foram processadas por meio da técnica de análise de conteúdo. **Resultados**: Os resultados mostram um bom estado de desenvolvimento da dimensão matemática do conhecimento didático-matemático dos participantes. No que diz respeito aos conhecimentos didáticos, enquanto uns conseguiram articular adequadamente os sentidos parciais da função e as representações produzidas, outros apresentam limitações, por não colocarem a serviço do conhecimento matemático, o saber com o qual potencialmente podem realizar situações de ensino, estabelecendo poucos. conexões entre os elementos das representações produzidas, com os correspondentes elementos conceituais e socioculturais. **Conclusões**: Conclui-se sobre a necessidade de implementação de estratégias que permitam ao futuro professor articular os significados e representações parciais de uma função, com os correspondentes elementos conceituais e socioculturais, que os leve a vislumbrar potencialidades pedagógicas desse conceito.
Palavras-chave: Futuros professores; Joint; Função; Representações semióticas; Significados parciais de função.

INTRODUCCIÓN

El diseño y análisis de actividades con fines de enseñanza, y, que a menudo comprenden tareas cognitivas complejas, no es sencillo, ya que en matemáticas el acceso al objeto de estudio es exclusivamente semiótico, y toda actividad matemática consiste en la transformación de una representación en otra representación (Duval, 2017). Por lo que, orientar un proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático función, requiere de quien lo haga, que tenga bien desarrollado su pensamiento funcional con fines didácticos, y dominar diferentes significados de esta noción (Biehler, 2005). Necesita, además, tener gran dominio de situaciones de variación y cambio, que faciliten la generalización de patrones y leyes que vinculen la visualización, exploración, manipulación y uso de múltiples formas de representación (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), que faciliten una solución socialmente compartida, de situaciones que involucren este concepto (Dolores, 2013). Según Dolores (2013) y Kieran et al. (2016), el estudio de situaciones de variación y cambio es imprescindible para estructurar y desarrollar el razonamiento algebraico, e indispensable para el acceso al cálculo. Asimismo, el estudio de las funciones a través de sus múltiples formas de representación, ayudan al docente a favorecer en quien aprende, una construcción integral de este concepto, y a minimizar sus dificultades en el proceso de construcción del mismo (Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Esto porque cada representación proporciona información diferente del objeto, lo que facilita que, en cada una de ellas se muestren distintos aspectos, que, aunque pueden diferir en su apariencia, en su conjunto conducen a un significado integral de éste, por lo que se requiere de la coordinación y el funcionamiento en sinergia de dos o más de sus representaciones, como base para su conceptualización (Duval, 2017; Siegler et al. 2013).

A pesar de la importancia de la noción función como articulador curricular, en los planes de estudio de matemáticas (Steele et al., 2013), y como herramienta modelizadora, tanto estudiantes, como profesores en formación, presentan vacíos y limitaciones conceptuales con su aprendizaje (Amaya, 2020). Pues, diversos estudios (Even, 1998; Amaya et al., 2016; Bueno & Pérez, 2018), han reportado dificultades en su comprensión, asociadas con su enseñanza y su aprendizaje. Algunas de esas dificultades se relacionan con el desconocimiento, producción o articulación de los registros y representaciones de esta noción (Panaoura et al., 2016), en todos los niveles académicos, así como con su uso consciente en contextos socioculturales (Amaya, 2020), y, en los procesos de su enseñanza y aprendizaje se prioriza lo procedimental, dejándose de lado su desarrollo conceptual (Dolores, et al., 2018).

Lo anterior podría resultar problemático, si se tiene en cuenta que la incomprensión de las representaciones de un objeto matemático, por parte de quien orienta el proceso de enseñanza y aprendizaje, hace que éstos no puedan asignar significados específicos a los objetos que orientan. Lo que en el caso de la noción función, puede derivar en concepciones variadas de su significado, concibiéndola asociada a las distintas representaciones que, de ella se puedan reproducir (Adu-Gyamfi & Bossé, 2014; Rojas, 2015), llevándolos a confundir el objeto representado con su representante (Duval, 2017). Tal confusión según Amaya (2020) se debe a que la función no se estudia de manera integral, lo que se estudian son representaciones aisladas, y desconectadas de ésta.

Como puede apreciarse, el abordaje de las funciones a través de sus múltiples representaciones, juega un papel muy importante en la comprensión del concepto, y si quien orienta el proceso de enseñanza, no hace un estudio adecuado, que facilite que el aprendiz visiones diferentes significados y haga la integración de sus registros y representaciones, pueden generarse obstáculos que limiten su aprendizaje, y el de otros conceptos más avanzados, que requieren la comprensión previa de éste.

La pregunta que orientó el proceso de investigación fue: cómo los futuros profesores de matemática, articulan las representaciones semióticas y los significados parciales de la noción función. El trabajo fue motivado por la inquietud de los autores por obtener resultados que facilitaran comprender cómo los futuros profesores de matemáticas, producen y articulan representaciones de relaciones funcionales, así como, el análisis que hacen de los sistemas semióticos emergentes producidos, considerados elementos fundamentales, para que puedan utilizar con fines de enseñanza, la noción función. Dicho análisis enfatiza la necesidad de implementar estrategias didácticas que posibiliten a los profesores en formación, hacer un abordaje de las funciones a través de sus registros y representaciones, y articular sus elementos, de tal forma que, les permitan proyectar potenciales actividades de enseñanza, que faciliten en sus futuros estudiantes, la reconstrucción y articulación de diferentes significados de esta noción. Esto, entre otras cosas, porque el entrenamiento explícito de futuros profesores sobre diferentes dimensiones de los significados de una función, les permite basar su enseñanza en múltiples significados del concepto, de forma que faciliten un aprendizaje global de éste, al reestructurar y enriquecer los significados parciales que asocien con el concepto (Biehler, 2005). Asimismo, según Zarhouti et al. (2014), el uso de registros y representaciones, además de facilitar la comprensión integral del concepto, facilitan el análisis de las producciones de los estudiantes, por lo que su entendimiento constituye un aporte a los procesos evaluativos en matemáticas.

APROXIMACIONES TEÓRICAS

Sobre el conocimiento didáctico-matemático

El profesor, además del dominio de la dimensión que acredite su conocimiento matemático (conocimiento común y ampliado), debe saber cómo enseñar (conocimiento didáctico), es decir, paralelamente debe desarrollar su dimensión didáctica (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008). La dimensión matemática, le permite al profesor escoger tareas apropiadas y resolverlas utilizando distintos procedimientos, adecuándolas al nivel educativo donde enseña, además, producir diversas representaciones del objeto matemático que enseña y poder vincularlo con otros objetos matemáticos de ese nivel o de niveles tanto anteriores, como posteriores (Ball et al., 2008; Pino-Fan & Godino, 2015).

En cuanto a la dimensión didáctica, facilita al profesor, saber cómo enseñar: hacer transposiciones didácticas adecuadas a quienes enseña, articular los elementos de las diferentes representaciones, que de un objeto logre producir (Amaya et al., 2016). Asimismo, le permite comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático, proporcionar diversas argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática y, además, proyectar y prever las posibles dificultades que se susciten en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje (Pino-Fan et al., 2015). Todos estos conocimientos debe poderlos articular con las teorías de aprendizaje, y los elementos curriculares (Steele et al., 2013), que le permitan entender las necesidades cognitivas y ontogenéticas de quien aprende y tomar decisiones basadas en los logros de sus estudiantes.

En relación con las tareas que el profesor propone a sus alumnos, además de ser apropiadas a sus capacidades, deben permitir gestionar su discurso (NCTM, 2000) y una interacción permanente en el aula, para que éstos ganen seguridad y autonomía. De esta manera, para que dichas tareas logren comprometer al estudiante en un proceso de solución, deben ser de interés para él y muy asociadas al contexto donde se desarrollan los aprendizajes (Dolores, 2013). Un proceso con estas características podría ser la clave para la comprensión de los saberes involucrados en una clase de matemáticas (Rojas, 2015).

Para lograr lo anterior, es necesario introducir las transformaciones didácticas necesarias para que el estudiante dedique el tiempo necesario a resolver las actividades que se le planteen, hasta llegar a poner en paralelo los elementos de las diferentes representaciones del objeto matemático que se estudie. Esto puede ser un fuerte determinante del éxito del proceso, ya que según Pino-Fan et al. (2017) en la capacidad del profesor de producir representaciones semióticas de los objetos matemáticos estudiados y en la posibilidad de establecer conexiones entre ellas, podría estar la clave para que el estudiante pueda asignarle significados y sentido a tales objetos y llevarlos a procesos comprensivos adecuados. Pero el mismo docente debe dominar tales conocimientos, así que, en su proceso formativo, necesita ganar la versatilidad representacional que le permita realizar conexiones entre representaciones de un mismo objeto, haciendo las interacciones conceptuales y procedimentales correspondientes (Thomas, 2008), y, en su interacción con pares, valide las actividades didácticas que diseñe, sus soluciones, y proyecten potenciales formas de desarrollarlas.

Registros y representaciones semióticas

La semiótica es la disciplina que estudia los sistemas de signos con intención comunicativas (Rojas, 2015), y la noesis es todo acto cognitivo que facilite la comprensión de un concepto (Peirce, 1974). Duval (2017) considera que la noesis no es posible sin la semiosis, además, según Peirce (1974) toda experiencia de una persona ya viene semiotizada, por lo que es natural que, si se emprende un estudio con intención comunicativa, éste lleve asociado un sistema de signos, pues los objetos matemáticos son ideas abstractas que no se pueden manipular directamente, lo que puede manipularse son sus representaciones, por lo que es fundamental el estudio de los registros y las representaciones semióticas como único medio de acceso a los conocimientos matemáticos (Duval, 2017).

Las representaciones semióticas son construcciones por medio de signos con las que las personas exteriorizan sus representaciones mentales (Duval, 2017), y los registros son los contenedores que permiten configurar dichas representaciones (Amaya, 2020), éstos tienen sus propias reglas y sistemas de signos, aunque algunas reglas y signos son compartidos con otros registros. Las representaciones de un objeto admiten dos tipos de transformaciones: tipo conversión y tipo tratamiento. Una transformación es tipo conversión, cuando se hace cambiando de registro, es decir, las transformaciones se hacen por elaboración semántica, al cambiar de registro se cambian también los símbolos y las reglas, sin cambiar el significado del objeto que se representa. Una transformación es tipo tratamiento, cuando se hace al interior de un registro, con sus símbolos y reglas, sin embargo, pueden hacerse, tanto por elaboración semántica: cuando se cambian los símbolos al hacer la transformación, como por modificación sintáctica: cuando se mantiene el mismo sistema de símbolos y éstos solo se manipulan, al realizar operaciones indicadas, o se continúa con un procedimiento previo.

De acuerdo a lo anterior, toda actividad matemática consiste en la transformación de una representación en otra representación, ya sea por conversión o por tratamiento. Sin embargo, la idea matemática o el concepto están ocultos, codificados en sus representaciones, pero no hay una correspondencia uno a uno entre un objeto matemático y cualquiera de sus representaciones, encontrándose características particulares del objeto en cada una de ellas. Así pues, todas las representaciones no contienen la misma información, por lo que ninguna de ellas representa al objeto en su totalidad, pero algunos elementos pueden coincidir en diferentes representaciones (Duval, 2017). Esto hace necesario el estudio del mayor número de representaciones, y hacer coincidir los elementos identificables en varias de ellas, para poder articular las características globales del objeto en estudio, de la manera más integral posible.

Cuando los elementos de dos representaciones coinciden, y tienen el mismo orden de aprehensión, éstas son congruentes, de lo contrario se dice que son incongruentes (Duval, 2017). En algunos casos, la falta de congruencia, impide a quien aprende, articular los elementos de los objetos matemáticos, ocasionando diferencias de significado para un mismo objeto; asociándolo, al registro o la representación donde lo logre producir (Rojas, 2015). Esto condiciona la relación entre los objetos matemáticos y sus diversos registros y representaciones, y la forma de acceder a ellos, ya que, de la conciencia de su uso, por parte de quien orienta los procesos de enseñanza y aprendizajes, va a depender en gran medida, la comprensión conceptual por parte de los estudiantes (Pino-Fan et al., 2017).

Las funciones y sus configuraciones epistémicas

El concepto de función ha sido fundamental en el desarrollo de la humanidad (Hitt, 1998), y según Rey et al. (2008), su génesis se fundamenta en el desarrollo del concepto de número. Los elementos básicos que constituyen una función son los conjuntos de valores que pueden adquirir sus variables (Dolores, 2013), y los parámetros que la componen, los cuales pueden ser ostensibles en algunas de las representaciones que la modelan. Algunas de las configuraciones epistémicas reportadas por Amaya (2016, p.33) son:

- Como una relación de correspondencia entre variables: relación en la que a cada valor en la variable de entrada le corresponde uno y sólo un valor de la variable de salida.
- Como correspondencia entre elementos de dos conjuntos: una regla en la que cada elemento del conjunto de partida debe estar relacionado con un único elemento del conjunto de llegada.
- Como regla de asignación: a cada valor de la variable independiente se le hace corresponder un único valor de la variable dependiente.
- Como conjunto de pares ordenados: una función f es un conjunto de pares ordenados (a, b) $\in$ f, con la condición de que la primera componente no se repite en ningún par del conjunto, y que para todo elemento a del dominio de f, existe un elemento b del codominio de f, tal que (a, b) $\in$ f.
- Como relación entre dominio e imagen: paso de un estado inicial a un estado final o transformado: relación que a cada número perteneciente al dominio D, le asocia un único resultado numérico de entre las imágenes f(x).
- Como criterio de la recta vertical: si se traza una recta vertical por cualquier parte del plano, si la recta corta la gráfica, la corta en una sola parte, de lo contrario la gráfica no representa una función.

Muy de la mano de las configuraciones epistémicas de la noción función, en determinados periodos históricos, movilizados para resolver situaciones problema que las involucran, están sus significados parciales (Pino-Fan et al., 2011), pues, ambos han estado presentes en la evolución de este concepto. Pino-Fan et al. (2019), reportan que la noción función, en su desarrollo histórico, ha tenido al menos seis significados parciales: i) la función como correspondencia; ii) la función como relación entre magnitudes variables; iii) la función como representación gráfica; iv) la función como expresión analítica; v) la función como correspondencia arbitraria; y vi) la función a partir de la teoría de conjuntos.

También, asociado a las configuraciones epistémicas y a los significados parciales de la noción función, están las relaciones funcionales, las cuales son funciones identificables en un contexto concreto determinado, que facilitan el desarrollo de habilidades de pensamiento funcional, entendido como el proceso mental referido a las formas en que una persona piensa al relacionar cantidades variables, para resolver un problema cotidiano.

La noción función como uno de los elementos fundamentales para el estudio del cálculo, por su naturaleza variacional, requiere para su estudio, de situaciones de variación y cambio. El cambio se refiere a la medida en que una magnitud se modifica en relación a otra o a sí misma, y, la variación está relacionada con la cuantificación del cambio, o con la descripción o medida de una característica cambiante en un proceso. Dolores (2013) y Rey et al. (2008) consideran fundamental que se pueda comprender el modo en que las funciones cambian y cómo se relacionan sus elementos, y éstos con otros elementos curriculares y socioculturales, así como, la relación entre sus diferentes registros y representaciones. Por lo que es esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones, recurrir a los contextos socioculturales como contenedores de las relaciones funcionales. El recurso a relaciones funcionales para estudiar funciones, facilita un análisis covariacional entre sus variables (Hitt & Morasse, 2009), pues permite, centrar el estudio en la covariación interdependiente de dos cantidades, y analizar, el efecto de un cambio en los valores del dominio sobre los del rango o viceversa, y según Thompson y Carlson (2017), el entendimiento de la función como covariación es fundamental para el desarrollo matemático de los estudiantes.

Así como ha sido dispendioso el desarrollo del concepto de función (Wills et al., 2014), los procesos de su enseñanza y aprendizajes, también lo han sido (Font, 2011). El análisis de dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones, por parte de quien enseña es necesario, pues, esto permite minimizar los desajustes en el proceso de aprendizaje, y podría evitar el establecimiento de obstáculos epistemológicos, en quien aprende, al respecto, Bueno y Pérez (2018) consideran que, a través de transposiciones didácticas apropiadas, es posible minimizar los obstáculos que han aparecido históricamente con el aprendizaje de las funciones.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Tipo de estudio

Es un trabajo cualitativo y exploratorio, donde se analizó la articulación entre representaciones y significados parciales de la noción función, hechas por estudiantes de un programa de formación de profesores de matemáticas, mientras resolvían situaciones problema que involucran funciones, y proyectaban la forma de orientar una clase con dichas situaciones. La intención era que los futuros profesores reflexionaran sobre cómo conectar las matemáticas que están aprendiendo en los cursos de matemáticas en su programa formativo, con la forma de proyectar potenciales actividades de enseñanza utilizando funciones, que les permitan vincular sus conocimientos adquiridos, con las necesidades de aprendizaje de sus futuros estudiantes (Feikes & Schwingendorf, 2008). Con este fin se les puso a trabajar con relaciones funcionales, que facilitaran conectar, los elementos de las representaciones de las funciones involucradas, tanto con elementos conceptuales, como con elementos del contexto sociocultural. Con esto se pretendía extraer información sobre la comprensión que los futuros profesores tenían sobre la noción función, en interacción con sus propios compañeros, y en el acercamiento al conocimiento socialmente compartido y aceptado por la comunidad de educadores de matemáticas (Arcavi, 2020), reflexionaran sobre la forma de enseñarlo.

Muestra de informantes

La muestra de informante la conformaron 37 estudiantes de un programa de Pedagogía en educación media en matemáticas de una universidad chilena. La muestra se seleccionó intencionalmente, teniendo como criterios de inclusión que cada participante estuvieran cursando la asignatura Didáctica del cálculo, la cual es orientada por uno de los investigadores. Esta asignatura se ofrece en el programa, en el segundo semestre del tercer año de la carrera, y tiene como prerrequisitos las asignaturas Introducción al álgebra, Introducción al análisis, Análisis discreto, Análisis continuo e Integrales y aplicaciones. Estos profesores en formación al momento de recoger la información ya habían cursado, las asignaturas Introducción a la didáctica, Didáctica de la aritmética, Didáctica de la geometría, Didáctica del álgebra, y, además, dos de las cuatro prácticas pedagógica que se ofrecen en el programa, y, solo les faltaba realizar la práctica profesional. El programa tiene una duración de 9 semestres.

En el desarrollo de la asignatura Didáctica del Cálculo, los futuros profesores interactuaron, mientras resolvían situaciones que involucran funciones, preparaban y/o simulaban clases para estudiantes de enseñanza media, con dichas actividades. En el desarrollo de tal asignatura la atención se centró en los conocimientos y habilidades que un profesor de matemáticas pudiera necesitar para lograr una instrucción que facilite, de la mejor manera, el aprendizaje de los estudiantes (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Ball et al., 2008; Pino-Fan & Godino, 2015). Fue un proceso interactivo y dinámico, de colaboración entre pares, por lo que se prestó para resaltar y fortalecer los avances, corregir y tratar de minimizar errores cometidos en el proceso de solución de las situaciones, y de la proyección de las clases. Según Schoenfeld (2011), tradicionalmente este tipo de enseñanza diagnóstica, no se lleva a cabo con los aprendices para profesor, y luego de su graduación, les toca empoderarse de ello por su propia cuenta, sin embargo, lo considera indispensables como parte fundamental de su proceso formativo.

Recolección de la información

La información se recogió durante el segundo semestre de 2019, y para recogerla se aplicaron entrevistas semiestructuradas basadas en tareas (Goldin, 2000), las cuales se aplicaron a grupos de tres o cuatro futuros profesores, conformados libremente. Los encuentros se realizaron en la clase de Didáctica del Cálculo, con una duración de dos horas cada uno. Como entrevistadores participaron tres profesores: el titular de la asignatura y dos invitados, quienes rotaban en los grupos de trabajo, haciendo las entrevistas y registrándolas en vídeos. En cada encuentro, a cada subgrupo de futuros profesores, se les pidió escoger una situación con la que debían trabajar, y mientras la resolvían, o luego de resolverla se les iban haciendo preguntas basadas en las respuestas dadas a la tarea. Se indagó sobre los elementos producidos, las relaciones entre ellos y cómo utilizarlos para proyectar una clase para estudiantes de enseñanza media, utilizando dicha situación.

Instrumentos utilizados para recoger la información

En el proceso de selección y diseño de las actividades, en conjunto con los profesores en formación, se creó un banco de situaciones problema, indagando en reportes o artículos de investigación (Arce et al., 2004), libros (Farfán, 2012; Dolores, 2013) y material clasificado a disposición del público en la web (Godino et al., 2003; Secretaría de Educación Pública, 2004). Se buscaban actividades específicas que facilitaran a los futuros profesores, contextualizar las funciones con fines de enseñanza (Biehler, 2005). En el proceso de búsqueda, se escogieron aquellas actividades, que mejor se ajustaran al trabajo didáctico con funciones, por facilitar la producción de un gran número de sus representaciones, y el establecimiento de conexiones con elementos conceptuales y del contexto sociocultural (Amaya, 2016).

A continuación, en las Figura 1 y 2 se presentan un par de las situaciones seleccionadas por los futuros profesores, para el trabajo que aquí se reporta.

Figura 1

Primer ejemplo de las situaciones que se presentaron y de las cuestiones por las que se indagó.

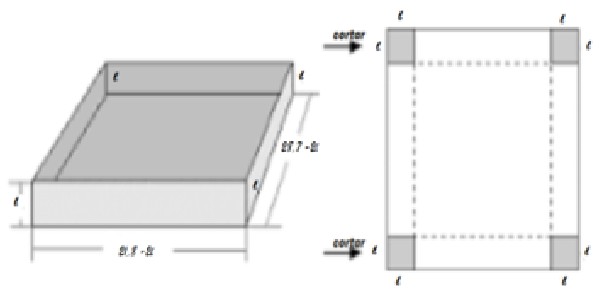
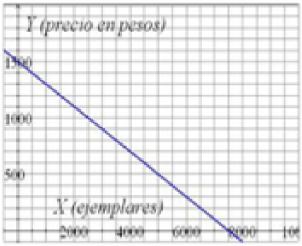
Enunciado:
Situación 1. Se quiere construir una caja sin tapa, utilizando una hoja de papel tamaño carta (21,8cm×28,7cm), al quitar en las esquinas cuadraditos de lado ℓ. doblando los pliegues hacia arriba, hasta formar la caja como se ilustra en la siguiente figura.

Cuestiones por las que se indagaron ¿Cuáles son las dimensiones de la caja, si se quiere que su volumen sea máximo? ¿Cómo sabes que esas dimensiones te dan el máximo volumen? ¿Qué elementos son comunes entre las representaciones encontradas para el volumen? E interprétalos. ¿Cuál es el dominio y el rango para la relación funcional que modela el volumen de la caja? ¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles permanecen fijas (son constantes)? ¿Qué relación de dependencia existe entre las variables? ¿Cuál es el área lateral de la caja? ¿Qué relaciones puedes establecer entre las representaciones del área lateral? ¿Cuál es el dominio y el rango para la relación funcional que modela el área lateral de la caja? ¿Existe algún tipo de relación de dependencia entre el volumen de la caja y su área lateral?

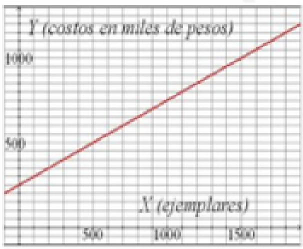
Figura 2.

Segundo ejemplo de situaciones que se presentaron y de las cuestiones por las que se indagó.

Enunciado:

Situación 2. Una persona planea hacer una edición especial de una de las obras de Gabriel García Márquez, titulada "Relato de un náufrago". La función que relaciona el precio y el número de ejemplares está dada por la primera gráfica, en tanto que sus costos se describen en la segunda gráfica.





Cuestiones por las que se indagaron

¿Cuántos ejemplares se deben producir para que el precio por ejemplar sea de $1200 y $1400 pesos respectivamente?
¿Cuál es el costo de producción de 300, 800, 1200, 1700 y 2100 ejemplares respectivamente?
¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener una ganancia de $700.000 y $800.000 pesos respectivamente?
¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuales son fijas?
¿Qué relación de dependencia existe entre las variables?
¿Cuál es el dominio y el rango para las relaciones funcionales que modelan el precio, los costos y las ganancias respectivamente?
¿Cuáles son los precios máximo y mínimo al cual se pueden vender los ejemplares que se produzcan, si se gota la edición?
¿Cuántos ejemplares se deben tirar?
¿Qué ganancia obtendrá? ¿Cuánto tendrá que invertir en la edición?
¿Qué elementos comunes puedes distinguir entre las representaciones que encontraste para el precio, los costos y para las ganancias respectivamente?
¿Es posible que el editor tenga la misma ganancia vendiendo diferentes números de ejemplares? ¿Cuántos? Explica la situación.
¿Para qué cantidad de ejemplares producidos, las ganancias son iguales a los costos de producción?
¿Qué relaciones puedes establecer entre las representaciones del precio, los costos y las ganancias?

El enunciado de ambas situaciones corresponde a una relación funcional, la situación 1, está planteada en una combinación de los registros coloquial y figural como registro principal; y aunque este tipo de cajas como empaques, ya están en desuso, desplazados por nuevos modelos generados por computador, su utilidad con fines didácticos, sigue vigente, por facilitar la producción de un gran número de sus representaciones (Amaya, 2020), lo que facilita conectarlas entre sí, y con elementos conceptuales y socioculturales. La situación 2, está planteada en una combinación de los registros coloquial y gráfico.

A continuación, se describen algunas transformaciones y se muestran varias representaciones de la relación funcional de la situación 1, en los registros figural, tabular, gráfico y algebraico, como registros auxiliares, y se señalan algunos elementos comunes en varias de ellas. El orden de producción de las representaciones lo decide quien las produce, por lo que éste puede ser cualquiera.

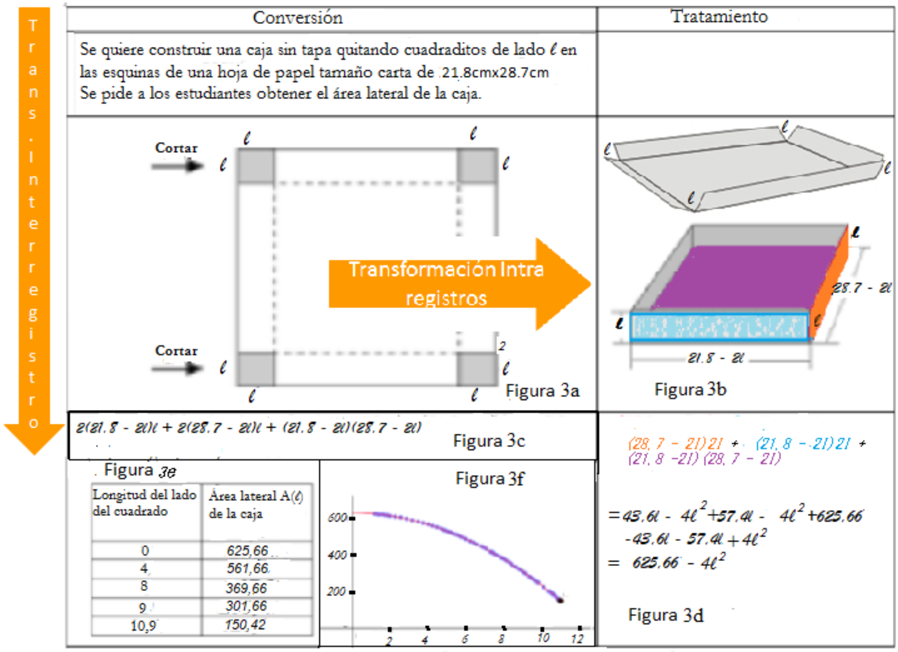
Al comenzar a manipular la hoja y quitar cuadraditos en las esquinas se tiene una representación fenomenológica como primer registro auxiliar, ya que ésta, corresponde al suceso generado al manipular la hoja, hasta obtener la caja que se pide construir (Amaya & Medina, 2013). Cuando se pliegan los lados hacia arriba para formar la caja, se hace una transformación tipo tratamiento, ya que no se ha salido del registro fenomenológico, pasando de una caja de altura cero (0), a otra de altura l. Al tratar de ilustrar figuralmente la situación descrita anteriormente, se pasa del registro fenomenológico al figural, a través de una transformación tipo conversión, obteniéndose un dibujo como el de la Figura $3a$, y al seguir manipulando la hoja hasta obtener una caja como la mostrada en la Figura $3b$, las transformaciones realizadas son tipo tratamiento, ya que se hacen sin abandonar el registro figural.

Si se toma la caja construida en el registro fenomenológico, o la representación figural mostrada en la Figura1, como registro principal, y se utiliza la definición de área de un rectángulo, por conversión se obtiene una representación algebraica del área lateral de la caja, como la que se muestra en la Figura $3c$; las trasformaciones realizada en este paso, por ser tipo conversión, se hacen por elaboración semántica, por lo que implican un cambio de registro y de símbolos. Al realizar sucesivas transformaciones tipo tratamiento, como las mostradas en la Figura $3d$, se llega a la expresión $A(l) = 625{,}66 - 4l^2$, que es una representación algebraica simplificada del área lateral.

Además de producir las representaciones del objeto en estudio, es posible establecer congruencias (Duval, 2017) entre los elementos ostensibles en algunas de ellas, es decir, es posible hacer un análisis comparativo entre algunos de los elementos de dos o más representaciones en diferentes o en el mismo registro (Pino-Fan et al., 2017). En este caso, al comparar los elementos de las representaciones producidas, se puede apreciar que en las Figuras $3b$ y $3d$, los elementos de igual color en ambas, son equivalentes, por lo que, las representaciones mostradas en dichas figuras son bastante homogéneas. En las representaciones tabular (Figura $3e$), gráfica (Figura 3f) y analítico algebraico (Figura $3d$), se pueden evidenciar elementos como A (0) y A (10.9), del registro analítico-aritmético, que en el registro cartesiano serían A (0, 625.66) y A (10.9, 150.42) respectivamente. No obstante, la concavidad de la función, sólo es ostensible en la representación gráfica, por lo que, respecto a esta característica, la representación gráfica (Figura 3f), resulta heterogénea con las demás representaciones.

Figura 3.

Transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento del área lateral de una caja sin tapa.



Por otra parte, son muy pocos los elementos ostensibles en el registro coloquial, lo que hace pensar que las representaciones producidas en éste, resultan bastante heterogéneas con las demás representaciones. Esta falta de homogeneidad es solo aparente, ya que, en el paso a paso de las trasformaciones, van apareciendo elementos comunes a varias representaciones, y es el registro coloquial el que permite establecer las articulaciones entre registros y representaciones. Es decir, una vez desarrollada cierta fluidez perceptual por parte de quien orienta el proceso (Rau et al., 2017), es necesario que éste desarrolle también, cierta fluidez verbal, y argumente sobre los elementos comunes, visibles en varias representaciones producidas del objeto estudiado, para poder conectarlas, con elementos conceptuales y socioculturales, que faciliten su articulación, y asignación de significados y sentidos, que permitan afectar positivamente la arquitectura cognitiva de quien aprende.

Esta relación entre los objetos matemáticos, sus diversas representaciones y los contextos socioculturales como contenedores de las relaciones funcionales, condiciona su relación, ya que las transformaciones en matemáticas no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación (Pino-Fan et al., 2017). Además, porque los procesos de asignación de significado y sentido para dichos objetos, requieren del establecimiento de congruencias entre las diferentes representaciones, con elementos de la representación fenomenológica asociada al objeto estudiado.

Tratamiento y análisis de la información

Tratando de ganar fiabilidad en la información recogida, se hizo una interacción triádica, entre las respuestas de los futuros profesores, las cuestiones por las que indagaron los investigadores, y el conocimiento puesto en juego (Koichu & Harel, 2007). En las respuestas de los futuros profesores, se centró la atención en los significados parciales de función movilizados al resolver la tarea (Pino-Fan, et al., 2019), y en las transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento, que lograran producir de las representaciones de una función y las conexiones que lograran establecer (Duval, 2017), tanto con elementos conceptuales, como socioculturales (Amaya et al, 2016). A partir de la identificación de estos elementos se analizaron, tanto los avances logrados, como los errores conceptuales de los participantes. En la Tabla 1, se muestran las categorías de análisis previas, utilizadas para revisar el trabajo que aquí se reporta.

Tabla 1

Categorías de análisis e indicadores o criterios utilizados para el análisis.

Categorías de análisis	Pautas o Criterios para el análisis
Trabajo colaborativo en la solución de las tareas y simulación de las clases	a) Valoración del trabajo, tanto propio, como de los compañeros b) Involucramiento en la solución de las tareas c) Reconocimiento de sí y del otro como formador social
Características de las soluciones dadas a las tareas	a) Identificación e interpretación de los elementos de la función

	b) Significados de la función movilizados en la solución de la tarea
Características de los sistemas semióticos emergentes producidos	a) Producción de diferentes registros y representaciones. b) Relación entre el registro de partida utilizado y el significado de función movilizado en la solución de la tarea. c) Conexiones entre representaciones, y de éstas con elementos conceptuales y socioculturales correspondientes

El procesamiento de la información oral, así como de la escrita, se hizo a través de la técnica análisis de contenido, de acuerdo a la agrupación de ideas básicas por criterios temáticos o temporales, o por segmentación de unidades (Bernárdez, 1995). Posteriormente se describieron cualitativamente las características de los hallazgos y se analizaron frente a los referentes teóricos consultados. En la presentación de los resultados se escriben las etiquetas G_i, donde $i = 1, 2, ...,10$ corresponde al i-ésimo grupo de trabajo, en los que se subdividió a los futuros profesores participantes en este estudio.

RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Respecto al trabajo colaborativo, en cada encuentro los futuros profesores, aunque estuvieran reunidos en grupos, cada uno trataba de resolver individualmente la situación seleccionada, y enseguida discutían sus soluciones. En este proceso de solución individual de las situaciones, similar a lo reportado por Gonzato et al. (2011), la totalidad de los profesores en formación logró resolver parcialmente la tarea, la mayoría se mostraban inseguros de sus soluciones, las cuales debían validar con los compañeros que tenían los mejores promedios académicos en el desarrollo de la carrera, o con los profesores. Notándose que valoraban mejor el trabajo de unos compañeros que el de otros, e incluso, que el propio. Ya como grupos, compartían los fragmentos elaborados por cada participante, y cada uno trataba de armar una solución más integral, y con ésta, de defender su postura ante las preguntas de los profesores, pero solo los miembros de los grupos G_3 y G_6, a partir del tercer encuentro, hicieron soluciones conjuntas, con la participación de todos los miembros de su grupo. Este tipo de trabajo en equipos es fundamental en el desarrollo formativo de un profesor de matemáticas, ya que según Kaur et al.

(2020), aprender matemáticas es una actividad social que implica una amplia interacción entre pares, trabajando colaborativamente alrededor de un problema.

En relación con las características de las soluciones dadas a las tareas, los resultados muestran algunos aspectos comunes a todos los grupos de profesores en formación: al iniciar el trabajo con cada situación, todos presentaron dificultades para identificar algunos elementos de la función, como dominio, rango, interceptos, puntos máximos o mínimos, y características como crecimiento, decrecimiento y concavidad. Además, hacían inferencias sobre crecimiento (decrecimiento) o máximos (mínimos), con dos o tres valores que mostraran esa tendencia. Con el pasar del tiempo, las dificultades fueron menores, y estos elementos eran identificados con cierta facilidad, y fueron más cuidadosos al hacer inferencias.

Respecto a los significados parciales de función movilizados en las soluciones dadas por los subgrupos de futuros profesores, el registro principal en que se presentó cada relación funcional, determinó el significado parcial de función utilizando. Así, uno de los significados de función más utilizados de inicio, fue el de función como relación entre magnitudes variables, quizás, porque el proceso de construcción paso a paso de las relaciones funcionales, lo favoreció; y en la solución dada a cada situación combinaron varios significados parciales de función, manteniendo patrones similares de las combinaciones de dichos significados en cada solución. Por ejemplo, los miembros de los subgrupos G_3, G_6, G_9 y G_{10} combinaron los significados parciales de función como relación entre magnitudes variables, como correspondencia arbitraria y como representación gráfica. Así, trabajando con las relaciones funcionales que modelan el área lateral y el volumen de la caja sin tapa, construyeron sus cajas y compararon con sus compañeros, cuál caja tenía el mayor volumen. Luego de construir cada uno un par de cajas, al comparar y discutir con sus compañeros, pronto concluyeron que seguir haciendo nuevas cajas y comparando su volumen, no era el proceso más eficiente para encontrar el volumen máximo, por lo que con un patrón de la fórmula que permite hallar el volumen de un paralelepípedo, los miembros de G_6 encontraron una expresión algebraica, empezaron a darle valores e hicieron una tabla y una gráfica, y al analizarla encontraron un máximo. Los miembros de G_3 utilizando dicho patrón, comenzaron a probar con varios valores y de esta forma obtuvieron el volumen máximo buscado, seguidamente, con el patrón utilizado, encontraron una expresión algebraica que les permitió hallar el volumen de una caja de aristas de cualquier dimensión. Mientras que los miembros de G_9, como en Amaya (2020), del registro fenomenológico hicieron una conversión al analítico-algebraico, y este último lo utilizaron como registro principal, y a partir de las representaciones obtenidas en este registro, obtuvieron las otras representaciones que lograron producir. A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista realizada a los miembros de G_9, al resolver el problema de construir una caja sin tapa.

> *Entrevistador: Explíquenme ¿Cómo hicieron para encontrar todos esos datos?*
>
> *Estudiante 5: Realmente solo hicimos dos cajas, y con la caja apliqué la fórmula y después iba remplazando los valores y anotándolos.*
>
> *Entrevistador: ¿Cómo encontraron la formula?*
>
> *Estudiante 5: Como en el cuadro vemos que a los cuatro lados de la hoja se le está quitando x, vemos que en el ancho (21,8), se debe quitar una x a cada lado, es decir 2x, y en lo largo también, y como el volumen de una caja es largo por ancho por profundidad, entonces sería* $V(x) = (28.7 - 2x)(21.8 - 2x)x$*. Con esta ecuación fuimos remplazando x aquí –señaló la fórmula-, y encontramos los valores del volumen que anotamos.*
>
> *Entrevistador: ¿Cómo saben que esos datos corresponden a una función?*
>
> *Estudiante 4: Porque la gráfica tiene una sola línea, y si pasamos una recta vertical solo la corta en una parte.*
>
> *Entrevistador: ¿Cuál es el dominio?*
>
> *Estudiante 4: El dominio va de cero a 10.9, porque como la función tiene tres factores, cuando x =0, el producto da cero y cuando x = 10.9 también da cero.*
>
> *Entrevistador: Pero cuando x = 14.35 también da cero*
>
> *Estudiante 5: Sí, pero en ese punto no es esta función- y señaló la gráfica- porque no puedo cortar cuadraditos de más de 10.9 centímetros en esta hoja.*
>
> *Entrevistador: ¿Cómo relacionan los puntos que tienen anotados, con los de la gráfica y con las cajas que van construyendo?*

Estudiante 3: Eso es el volumen, cada punto contiene el alto de la caja, que es el tamaño del cuadrito, y el volumen de la caja.

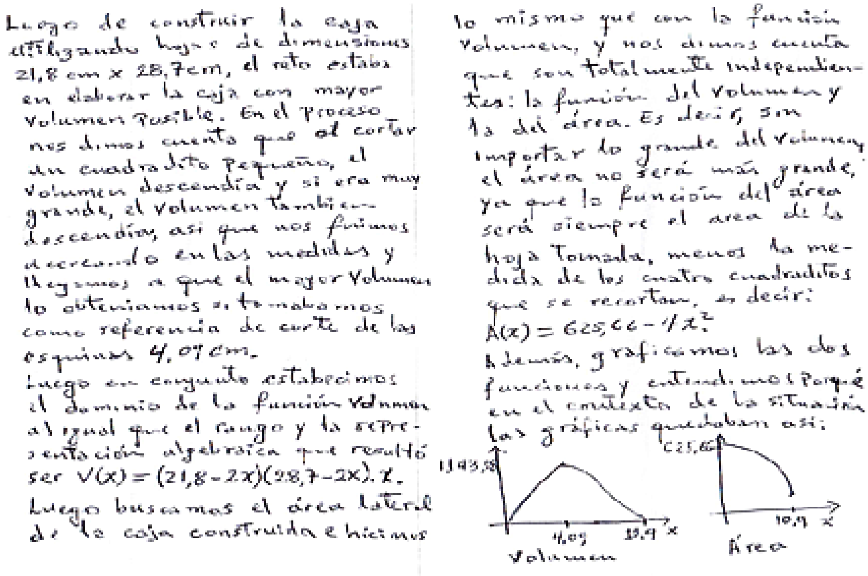
Entrevistador: Podrías señalar un ejemplo de lo que estás diciendo

Estudiante 3: Si, el punto que estoy señalando aquí es el punto (1, 528) que corresponde a x = 1cm y un volumen de 528,66 que corresponde a una caja de un centímetro de alto y 528 el volumen.

Los miembros de los subgrupos G_3, G_6 y G_{11}, también comunicaron como dominio $D_v = [0,\ 10.9]$, y como rango $R_v = [0,\ 1143.08]$, mencionando que: *la función de variable generalizada, no es equivalente a la relación funcional estudiada, pues no tienen el mismo dominio ni el mismo rango. Ya que la función de variable generalizada, asociada no tiene restricción de ningún tipo, ni en su dominio ni en su rango, ambos conjuntos coinciden con los números reales. Mientras en la relación funcional, su dominio está determinado por las dimensiones de los lados de los cuadraditos cortados, acotados por las dimensiones del ancho de la hoja, por lo que tiene un máximo en su dominio, y también tiene dos mínimos relativos correspondientes a los extremos del intervalo de variación que representa el rango*. En la producción de estos futuros profesores (G_3, G_6, G_9 y G_{11}), se evidencian avances significativos en la articulación de su conocimiento didáctico-matemático sobre funciones, pues, utilizaron articuladamente elementos matemáticos primarios, haciendo argumentos justificados, desde donde se vislumbran potenciales actividades de enseñanza (Ball, et al., 2008; Zarhouti et al., 2014). Esto se hace evidente al analizar los elementos matemáticos primarios (Godino et al., 2006) presentes en sus soluciones, pues los miembros de G_6 lograron resolver la tarea, utilizaron diferentes estrategias de solución, realizando diversas representaciones de las funciones involucradas, relacionando elementos de varias representaciones y dando argumentos bastante adecuados, como se puede apreciar en su manuscrito mostrado en la Figura 4. Además, puede apreciarse en las respuestas de los miembros de G_9, que señalaron elementos comunes entre las representaciones producidas, relacionaron las dimensiones de los cuadraditos cortados, con sus cajas asociadas, como elementos correspondientes, tanto a la secuencia de puntos, como a los puntos que conformaban la gráfica, estableciendo claras congruencias entre las representaciones producidas.

Figura 4

Manuscrito realizado por miembros de G_6 al modelar la relación funcional del volumen y el área lateral de la caja sin tapa.


Luego de construir la caja utilizando hoja de dimensiones 21,8 cm x 28,7cm, el reto estaba en elaborar la caja con mayor volumen posible. En el proceso nos dimos cuenta que al cortar un cuadradito pequeño, el volumen descendía y si era muy grande, el volumen también descendía, así que nos fuimos acercando en las medidas y llegamos a que el mayor volumen lo obteníamos si tomabamos como referencia de corte de las esquinas 4,07 cm.

Luego en conjunto establecimos el dominio de la función volumen al igual que el rango y la representación algebraica que resultó ser $V(x) = (21,8-2x)(28,7-2x).x$.

Luego buscamos el área lateral de la caja construida e hicimos lo mismo que con la función volumen, y nos dimos cuenta que son totalmente independientes: la función del volumen y la del área. Es decir, sin importar lo grande del volumen, el área no será más grande, ya que la función del área será siempre el área de la hoja tomada, menos la medida de los cuatro cuadraditos que se recortan, es decir:

$A(x) = 625,66 - 4x^2$

Además, graficamos las dos funciones y entendimos porqué en el contexto de la situación las gráficas quedaban así:

En la situación donde debían hallar el área lateral, un grupo significativo de profesores en formación (G_1, G_3, G_4, G_6, G_7, G_9, G_{10} y G_{12}), para encontrar una expresión algebraica y enseguida su gráfica, utilizaron información encontrada al hallar el volumen de la caja, combinando el significado de función como relación entre magnitudes variables, el de función como correspondencia arbitraria y el de función como representación gráfica. Como en Chinnappan y Thomas (2001), cambiaron de registro de partida, estableciendo el registro analítico como registro principal, y a partir de éste obtuvieron las otras representaciones que lograron producir.

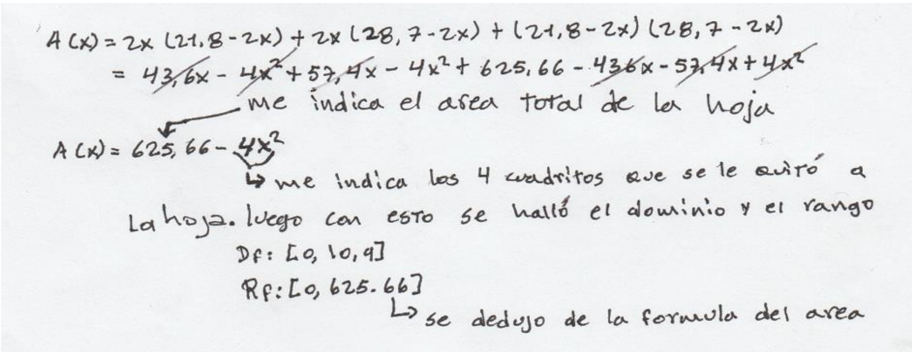
En el análisis de relación de dependencia entre el volumen de la caja y su área lateral, varios grupos de profesores en formación (G_1, G_3, G_5, G_6, G_{10} y G_{12}), pronto se dieron cuenta que el volumen de una caja es independiente de su área lateral, como lo manifiesta G_6 en el manuscrito mostrado en la Figura 4, en donde describen con mucha soltura sus procesos realizados. Se nota en su descripción, un conocimiento didáctico-matemático sólido, en el sentido de

Pino-Fan y Godino (2015), pues, logran articular varios elementos de las representaciones producidas con elementos conceptuales y socioculturales.

Asimismo, los grupos G_7 y G_{12}, además de producir representaciones bastante adecuadas, lograron establecer congruencias entre los elementos equivalentes en varias de ellas, como se muestra en el manuscrito de G_7 (Figura 5). En la descripción hecha por G_7 se muestran los procedimientos realizados, las representaciones que obtuvo y las congruencias que establece entre los elementos de las representaciones, esto se evidencia cuando dicen "*625.66 me indica el área total de la hoja,* $4x^2$ *me indica los 4 cuadraditos que se le quitó a la hoja. Luego con esto se halló el dominio y el rango:* $D_f = [0,\ 10.9]$ y $R_f = [0,\ 625.66]$ *se dedujo de la fórmula del área*". A pesar que los miembros de G_7 cometen un error al comunicar el rango de la función área lateral, el hecho de comunicar el dominio y el rango de la relación funcional en lugar del dominio y rango correspondientes a la función de variable generalizada, es un verdadero avance, ya que generalmente esto constituye un conflicto epistémico en el sentido de Font (2011) y Godino et al. (2006), que parece tener su origen en la falta de uso del conocimiento ampliado, al servicio del conocimiento común (Pino-Fan & Godino, 2015).

Figura 5

Parte del manuscrito de G_7 al describir el proceso de construcción del área lateral de las cajas.



$A(x) = 2x(21.8-2x) + 2x(28,7-2x) + (21,8-2x)(28,7-2x)$

$= \cancel{43,6x} - \cancel{4x^2} + \cancel{57,4x} - 4x^2 + 625,66 - \cancel{43,6x} - \cancel{57,4x} + \cancel{4x^2}$

me indica el area total de la hoja

$A(x) = 625,66 - 4x^2$

me indica los 4 cuadritos que se le quitó a la hoja. luego con esto se halló el dominio y el rango

Df: [0, 10,9]

Rf: [0, 625.66]

se dedujo de la formula del area

El hecho de que los miembros de G_7 pudieran producir diversas representaciones semióticas del objeto matemático estudiado, hayan podido establecer conexiones entre ellas y comunicarlo como lo hicieron, es un indicador, en el sentido de Duval (2017) y Panaoura et al. (2016), de que el objeto matemático función, en estos estudiantes está bien fundamentado.

Por su parte, los subgrupos G_2, G_5, G_8 y G_{11} en sus soluciones combinaron el significado de *función como relación entre magnitudes*, *como representación gráfica,* y *como correspondencia arbitraria*. En el caso del problema de la edición facsimilar del libro Relato de un náufrago, partiendo de un análisis visual de las gráficas, hicieron una tabla de valores y una secuencia cartesiana con puntos, tanto para los Precios y los Costos, como para las Ganancias y, a partir de la manipulación de valores cambiantes, fueron estableciendo la noción de cantidades variables y de relación de dependencia entre ellas (Ruiz-Higueras, 1994). Pero construir tales representaciones, no les facilitó que vieran en ellas, el objeto matemático función, volvieron a las gráficas, y desde ahí, pudieron explicar que los datos corresponden a una función, usando para ello, la configuración epistémica de la recta vertical. Es decir, el solo análisis covariacional cuantitativo, les resultó insuficiente para aceptar los valores producidos como representantes de una función, pero al hacer el análisis covariacional cualitativo, y correlacionarlos, les permitió concebir de manera más integral el concepto función (Rolfes, 2018), y articular sus significados, con elementos de la representación coloquial. A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista realizada a los miembros de G_2 al resolver el problema de la edición facsimilar del libro Relato de un náufrago:

> Entrevistador: ¿Cómo encontraron el dominio y el rango?
>
> Estudiante 2: Fue muy difícil encontrar el dominio y el rango si la función no tiene x ni y.
>
> Entrevistador: Pero cuéntenme ¿cómo lo hicieron?
>
> Estudiante 2: Bueno, fue que nos pusimos a analizar las gráficas y caímos en cuenta que teníamos un eje X y un eje Y, así que enseguida dije, el dominio son los ejemplares y el rango el precio, y en esta otra –señaló la gráfica de Costos- el dominio también los ejemplares y el rango los costos.
>
> Entrevistador: ¿Cuál fue el dominio y el rango que encontraron?
>
> Estudiante 3: El dominio en ambas va de menos infinito a más infinito, y el rango, también.
>
> Entrevistador: ¿Cómo encontraron esos valores?

Estudiante 1: Es que tanto la gráfica de los precios, como la de los costos son funciones lineales, y con un par de puntos de cada una sacamos las ecuaciones.

Entrevistador: Pero ¿cómo a partir de las ecuaciones obtuvieron el dominio y el rango de ambas funciones?

Estudiante 3: Porque sabemos que, en una función lineal, el dominio y el rango son los números reales, porque no hay ninguna restricción para x.

Entrevistador: Díganme entonces ¿qué significa que se produzcan menos dos ejemplares?

Estudiante 3: Hmmm, no tiene sentido, espere y revisamos nuevamente, ..., Mire según la gráfica, el dominio en ambas va de cero a 8.000, y el rango, para los Precios de cero a 1.500, y en la de Costos, ya le digo, …, de cero a 4.002.941.

Entrevistador: ¿Cómo obtuvieron esos valores?

Estudiante 3: Utilizando la herramienta trazar gráficas del programa Derive.

Entrevistador: ¿Y cómo saben que los datos corresponden a funciones?

Estudiante 1: Es que revisamos las gráficas, y se ve que cada valor de x, tiene un valor en y, y solo uno.

Entrevistador: ¿Dónde pueden ver eso en la información que tienen?

Estudiante: Porque si y tuviera dos valores diferentes para un mismo x, estuviera uno arriba del otro y eso no se puede en una función, es decir, se ve que, y solo toma un valor por cada x, en cada gráfica. Es decir, para cada número de ejemplares hay un solo precio y un costo, y esa es la definición de función.

Entrevistador: ¿Cuáles son los precios máximo y mínimo al cual se deben vender los ejemplares que se produzcan, para obtener ganancias?

Estudiante 2: El precio mínimo es cuando se producen 270 ejemplares, y el máximo de cuando se producen 4.700.

Entrevistador: ¿Cuál es la ganancia máxima que se obtendrá? Y ¿Cuántos ejemplares se deben tirar?

Estudiante 2: La ganancia máxima es de $1.000.000, y se da cuando se producen y venden 2.517 ejemplares

Entrevistador: ¿Cómo obtuvieron esos valores?

Estudiante 3: Como ya le dije profesor, usando la herramienta trazar gráficas del programa Derive.

Estudiante 2: Explíquenme ¿cómo lo hicieron?

Estudiante 3: Hicimos las gráficas de costos, Ingresos y Ganancias en un mismo plano en Derive, y para responder esas preguntas, con trazar gráficas se hizo el seguimiento a cada una y en los puntos que va mostrando están las respuestas.

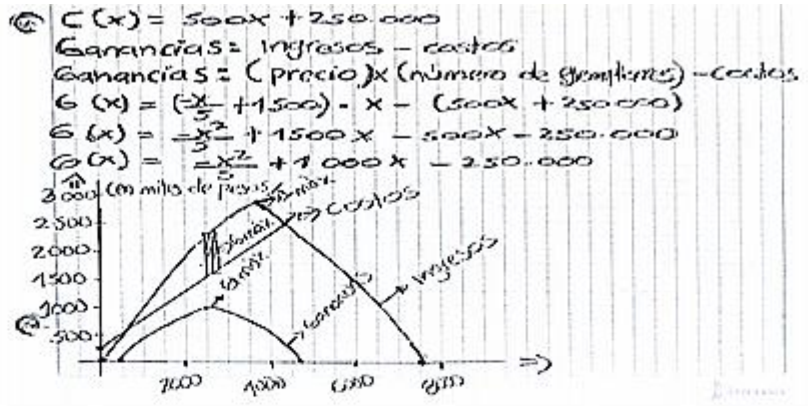
Entrevistador: ¿Y para los máximos y mínimos por qué no usaron derivadas?

Estudiante 1: Así lo comenzamos a hacer, pero como la clase es para estudiantes del nivel medio, ellos no nos entenderán si usamos derivadas, e ilustrándoselo gráficamente sí.

Puede apreciarse que los miembros de G_2, sus respuestas iniciales las basaron en criterios aprendidos previamente, los que en algunos casos los llevaron a cometer errores, pero que, en el paso a paso de la entrevista, fueron minimizando (Koichu & Harel, 2007). Además, produjeron y exploraron diferentes representaciones de las relaciones funcionales (Figura 6) haciendo un análisis covariacional, tanto cuantitativo, como cualitativo (Rolfes et al., 2018), e hicieron cálculos numéricos analizando los cambios que se sucedieron, y también explorando visualmente los gráficos, basando sus respuestas en la inspección visual sin incluir valores precisos de las funciones. Esto les permitió hacer un análisis, tanto estático de relaciones puntuales, como dinámico de los elementos de las funciones involucradas. Según Rolfes et al. (2020), el uso de representaciones dinámicas, ayuda a que los estudiantes comprendan mejor las funciones, y Thompson y Carlson (2017), consideran que la combinación de representaciones estáticas y dinámicas juega un papel fundamental en la enseñanza del concepto de función en la escuela, en este caso, los llevó a visionar potenciales actividades didácticas (Zarhouti et al., 2014), con el uso de herramientas matemáticas computacionales, como Derive. Soluciones similares a la de G_2, también las dieron G_5, G_8 y G_{11}.

Figura 6.

Manuscrito de G_2 al dar solución a la situación de edición facsimilar de Relato de un náufrago.



A estos futuros profesores (G_2, G_5, G_8 y G_{11}), se les facilitó coordinar los elementos de las representaciones que habían producido, es decir, se evidenció el establecimiento de congruencias entre los elementos de las representaciones producidas hasta entonces (Duval, 2017; Siegler et al., 2013). Asimismo, en sus procesos de solución, dieron sentido y razonaron adecuadamente sobre el conocimiento matemático que será objeto de enseñanza, y contrario a lo reportado por Dreher y Kuntze (2015), prestaron atención a lo significativo de este conocimiento para ser enseñado. En palabras de Schoenfeld (2011), pusieron al servicio del conocimiento matemático, el conocimiento con el que potencialmente pueden llevar a cabo situaciones de enseñanza, estableciendo ricas conexiones entre los elementos de las representaciones producidas (Panaoura et al., 2016). Notándose en sus soluciones, muy buen dominio de su conocimiento matemático, ya que las situaciones las resolvieron con facilidad, produciendo y articulando adecuadamente varias representaciones (Figura 6), entre ellas: analítico-aritmética, analítico-algebraica, gráfica, figural y cartesianas, vinculando el tema con elementos conceptuales y socioculturales.

CONCLUSIONES

Respecto a la pertinencia del marco teórico utilizado, se puede decir que los procesos de solución desarrollados por los futuros profesores, fueron favorecidos por la integración que lograron hacer de los registro y representaciones, así como de los significados parciales de función utilizados al resolver las situaciones problema (Kaur et al., 2020). Notándose que cuando las funciones se aprenden con fines de enseñanza, el panorama es diferente (Biehler, 2005), ya que no es solo comprender para sí, además, se debe visionar la forma de orientar para que otros comprendan.

En sus soluciones, este grupo de futuros profesores, recurrió a varios registros, pero todos utilizaron dos de ellos: el analítico-algebraico para producir otras representaciones, y el gráfico, para definir la función (Steele et al., 2013), y como base para analizar los sistemas semióticos emergentes (Amaya, 2020), pues en estos registros pudieron evidenciar características relevantes de las representaciones (Rolfes et al., 2018), que facilitaron identificar sus elementos, así como su articulación con elementos conceptuales y socioculturales correspondientes. El análisis covariacional también dependió de las características relevantes ostensibles en cada registro y representación, facilitándose más los registros figurales, gráficos y cartesianos para el análisis covariacional cualitativo, y los tabulares y analíticos para el cuantitativo, mientras que el registro coloquial, fungió como elemento de enlace.

El uso de relaciones funcionales despertó en los futuros profesores, una componente intuitiva, muy vinculada al contexto sociocultural, lo cual le dio consistencia y sentido al trabajo realizado con las situaciones utilizadas (Arcavi, 2020). Esto facilitó la integración de significados parciales de la noción función, y el establecimiento de conexiones fuertes entre lo concreto y lo abstracto, al identificar, en elementos del contexto sociocultural, elementos conceptuales correspondientes, como sucedió con la longitud de los lados de los cuadraditos cortados (alto de la caja), los cuales relacionaron con la variable x, y el dominio de la función.

El estado de desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de este grupo de profesores en formación sobre funciones, evidencia buen estado de desarrollo de la dimensión matemática, y limitaciones en algunos, en su conocimiento didáctico. Respecto a la dimensión matemática, lograron resolver adecuadamente las tareas, producir varias representaciones de las relaciones funcionales estudiadas y relacionar conceptos de varios niveles, y, respecto a la componente didáctica, mientras unos lograron articular adecuadamente los significados parciales de función, y las representaciones producidas, incluso usando representaciones dinámicas, otros produjeron las representaciones, sin lograr articularlas.

Los resultados invitan a implementar, algún tipo de estrategias, en los procesos instructivos, que faciliten, que este grupo de profesores, logren la mejor coordinación posible de los elementos de los sistemas semióticos emergentes resultantes en los procesos de estudio, ya que según Wilhelmi et al. (2015) no basta con que los profesores hagan un uso operativo de las funciones, además, necesitan del conocimiento especializado para su enseñanza, que les posibilite comprender potenciales conflictos de aprendizaje, de los estudiantes que orienten, y que puedan diseñar situaciones que permitan resolverlos.

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación, análisis de la información y corrección de este artículo fue el siguiente: T.A.D. 40 %, H.A.S. 30 % y E.C.H. 30 %.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE LOS DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, T.A.D.

REFERENCIAS

Adu-Gyamfi, K. & Bossé, M. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 167-192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x .

Amaya, T. (2020). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores de matemáticas en el desarrollo de una clase utilizando funciones. *Revista Bolema*, *34*(66), 110-131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06 .

Amaya, T. (2016). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función*. [Tesis de doctorado]. https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0

Amaya, T. & Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Revista Educación Matemática*, *25*(2), 119-140.

Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática, 28*(3), 111-144. https://doi.org/10.24844/EM2803.05 .

Arcavi, A. (2020). Learning to Look at the World Through Mathematical Spectacles—A Personal Tribute to Realistic Mathematics Education. In: M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 83–95). Springer.

Arce, J., Torres, L., Ramírez, M., Valoyes, L., Malagón, M., & Arboleda, L. (2004). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación*. Universidad del Valle.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual.* Universidad Complutense de Madrid.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.) *Meaning in mathematics education* (pp. 61-81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_5 .

Bueno, S. y Pérez, O. (2018). Prácticas actuales de la idoneidad epistémica y cognitiva del concepto función real de una variable real en carreras de ingeniería. *Revista Educación Matemática*, *30*(2), 202-231. https://doi.org/10.24844/em3002.08 .

Chinnappan, M., & Thomas, M. (2001). Prospective teachers' perspectives on function representation. In J. Bobis, B. Perry, & M. Mitchelmore (Eds.) *Numeracy and beyond (Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia) (pp.* 155–162). Merga.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada (2da ed.)*. Díaz de Santos.

Dolores, C., Rivera, M. & García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(3), 369-389. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050 .

Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89–114. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8 .

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano (2da ed.)*. Universidad del Valle.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80063-7 .

Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Gedisa.

Feikes, D. & Schwingendorf, K. (2008). The importance of compression in children's learning of mathematics and teachers' learning to teach mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 1-11.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 56*, 86-94.

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645-657. https://doi.org/10.1080/0144341042000262953 .

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In: Kelly, A.; Lesh, R. (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Routledge.

Gonzato, M., Godino, J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemático sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 5-37. http://doi.org/10.17583/redimat.2016.1984 .

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of mathematical behavior*, *17*(1), 123-134. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9 .

Hitt, F. & Morasse, C. (2009). Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. *Electronic Journal of research in educational psychology, 7*(17) 243-260.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S.F. (2016). *Early Algebra*. 1st ed. Springer.

Kaur, B., Wong, L., & Govindani, S. (2020). Graphing Linear Equations-A Comparison of the Opportunity-to-Learn in Textbooks Using the Singapore and the Dutch Approaches to Teaching Equations. In M. HeuveL-Panhuizen (Ed.) *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 97–111). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1 .

Koichu, B. & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 349-365.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Proyecto Sur.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2016). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 723-740. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9714-1 .

Peirce, Ch. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Nueva Visión.

Pino-Fan, L., Assis, A. & Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge.

Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L. & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico – matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2017). Analysis of the Underlying Cognitive Activity in the Resolution of a Task on Derivability of the Absolute-Value Function: Two Theoretical Perspectives. *PNA*, *11*(2), 97-124.

Pino-Fan, L., Parra, Y., & Castro, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis - Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc .

Rey, G., Boubée, C., Sastre, P., & Cañibano, A. (2008). Ideas para Enseñar. Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (20), 153-162.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Revista Enseñanza de las ciencias, 33*(1), 151-165. http://doi.org/10.5565/rev/ensciencias .

Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken: Empirische Ergebnisse zum Einfluss von Statischen Und Dynamischen Repräsentationen*. Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-658-22536-0 .

Rolfes, T., Roth, J., & Schnotz, W. (2020). Learning the concept of function with dynamic visualizations. *Frontiers in Psychology,* 11, 1-16. https://doi: 10.3389/fpsyg.2020.00693 .

Rolfes, T., Roth, J., & Schnotz, W. (2018). Effects of Tables, Bar Charts, and Graphs on Solving Function Tasks. *Journal für Mathematik Didaktik,* 39, 97–125. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0124-x

Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. [Tesis de doctorado]. http://www.atd-tad.org/documentos/concepciones-de-los-alumnos-de-secundaria-sobre-la-nocion-de-funcion-analisis-epistemologico-y-didactico/ .

Schoenfeld, A. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 457–469. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0307-8 .

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Sense.

Secretaría de Educación Pública. (2004). *El Libro para el maestro de Matemáticas. Educación secundaria*. https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/libromaestro.pdf

Siegler, R., Fazio, L., Bailey, D., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, *17*(1), 13-19. http://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004 .

Steele, M., Hillen, A., & Smith, M. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 451-482. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9243-6 .

Thomas, M. (2008). Developing versatility in mathematical thinking. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 67–87.

Thompson, P. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Wilhelmi, M., Godino, G., & Lasa, A. (2015). *Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria.* In M. González; M. Codes; D. Arnau; T. Ortega, (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 573-582). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Wills, T., Shipley, T., Chang, B., Cromley, J., & Booth, J. (2014). What Gaze Data Reveal About Coordinating Multiple Mathematical Representation. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society, 36(36), 312-3118.*

Zarhouti, M., Mouradi, M., & El Marouf, A. (2014). The teaching of the function at high school: The graphic representation of a function at first year, section experimental sciences. *Journal of Research & Method in Education, 4*(3), 56-65. https://doi.org/10.9790/7388-04315665 .