ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6578

Explicación didáctica y discurso Matemático Escolar: el caso de la variación

Evelia Reséndiz Balderas[a]
Ricardo Cantoral[b]

[a] Universidad Autónoma de Tamaulipas, Unidad Académica Multidiscplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades, Tamaulipas, México.
[b.] Centro de investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, CDMX, México.

Recibido para publicación 15 abr. 2021. Aceptado después de la revisión 1 jul. 2021.
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Un área importante de investigación en matemática educativa son las prácticas sociales comunicativas en la organización áulica. **Objetivo:** Localizar y analizar las formas de introducción y desarrollo de la variación en situaciones de enseñanza. **Diseño:** Mediante un enfoque cualitativo-interpretativo, específicamente un estudio etnográfico, para el análisis de prácticas socialmente compartidas entre docentes, cuando usan a la *explicación* en el aula y su correlato en el aula extendida. **Entorno y participantes:** Los participantes de la investigación fueron tres profesores (un físico y dos matemáticos) que impartían la asignatura Matemáticas Básicas en un Tecnológico. En promedio sus grupos estaban conformados por 37 alumnos. **Recopilación y análisis de datos:** Se recolectó la información mediante observaciones de aula, audiograbadas y transcritas. Se realizó un detallado estudio secuencial sobre situaciones de enseñanza a fin de describir el trabajo hecho en cada intervención que antecede o procede a otra situación más para construir las categorías de análisis. **Resultados:** Debido al carácter interactivo, la construcción de explicaciones es vista como objeto de análisis y esto implica que las unidades mínimas sean secuencias de interacciones, pues se atendió la construcción de recursos discursivos y significados para la variación. **Conclusiones:** Durante las clases registramos diferentes tipos de explicación, modelos en los que se modela la noción de variación, las representaciones docentes al explicar los contenidos mediante la representación numérica, la algebraica y la del lenguaje natural.

Palabras clave: Explicación, Variación, Predicción, Discurso Matemático Escolar.

Autor correspondiente: Evelia Reséndiz Balderas. Email: erbalderas@docentes.uat.edu.mx

ABSTRACT

Context: An important area of research in educational mathematics is social communicative practices in classroom organization. **Objective:** To locate and analyse the forms of introduction and development of variation in teaching situations. **Design:** Using a qualitative-interpretive approach, specifically an ethnographic study, for the analysis of socially shared practices among teachers, when they use explanation in the classroom and its correlation in the extended classroom. **Environment and participants:** The research participants were three professors (one physicist and two mathematicians) who taught the subject Mathematics I. On average, their groups consisted of 37 students. **Data collection and analysis:** Information was collected through audio-recorded and transcribed classroom observations. A detailed sequential study was carried out on teaching situations in order to describe the work done in each intervention that precedes or proceeds to yet another situation and thus construct the categories of analysis. **Results:** Due to the interactive nature, the construction of explanations is seen as an object of analysis and this implies that the minimum units are sequences of interactions, since the construction of discursive resources and meanings for variation was addressed. **Conclusions:** During the classes we recorded different types of explanation, models in which the notion of variation is modelled, the teaching representations when explaining the contents through numerical, algebraic and natural language representation.

***Keywords*:** Explanation, Variation, Prediction, School Mathematical Discourse.

INTRODUCCIÓN

Si se concibe a la enseñanza como una forma de práctica comunicativa de naturaleza social, el discurso oral, escrito, gestual o figural constituyen el medio para el aprendizaje emanado de dichas prácticas de aula. Así se nutren, de diferentes lenguajes, los que unos emiten y otros interpretan de los medios y recursos para concretarlos correctamente. De modo ideal, el aula es un espacio para el entendimiento mutuo, para negociar contenidos curriculares y para la formación de significados compartidos: en ese sentido, el acto de enseñar se constituye fundamentalmente gracias a la comunicación (Edwards y Mercer, 1987). Dicho enfoque clásico sugiere que se analice aquello que se dice y sobre todo cómo se dice en la clase y hoy día centramos el asunto en un *aula extendida* que favorece la transversalidad de los saberes (Cantoral, 2019).

Según Candela (1999), se considera al discurso como un medio para estudiar las *prácticas sociales comunicativas* en la organización áulica, en tanto explicación, ya que toda intervención se orienta hacia la comprensión de alguna idea, noción o concepto y en ese sentido, la noción de explicación permite dilucidar las formas efectivas de comunicación para el aprendizaje. Para estudiar el discurso de los profesores resultó conveniente atender episodios de clase donde empleaban explicaciones didácticas (Sierpinska, 1994) y recursos discursivos para hacer asequible al estudiante la noción de *variación*. Es por ello que en este artículo analizamos el papel de las acciones explicativas en la construcción de significados y la forma y las situaciones en las que los profesores usan este recurso.

Así también nos interesó abordar la construcción de recursos discursivos para estructurar la explicación en el aula e indagar su papel en la construcción del conocimiento dentro y fuera del aula. Consideramos que uno de los objetivos del docente es lograr la comprensión de los estudiantes respecto de aquellos conocimientos matemáticos, o en su dimensión más profunda, del saber enseñado, pero en este artículo nos interesa, sobre todo, el papel de la *variación* en la conformación de sus explicaciones.

La explicación engloba aquellos recursos discursivos que favorecen la comprensión de nociones, hechos, fenómenos u objetos, que superan la mera descripción o caracterización, al tratar de encontrar la causalidad o los principios que la producen. No sólo genera una actitud reflexiva, sino además son un medio explícito del que disponen los actores educativos (profesores y estudiantes) para conectar ideas matemáticas entre sí y con sus correlatos de la vida de quien aprende, sino que brinda razones para tornar comprensible un dato, un fenómeno, un hallazgo o un proceso en el curso de la acción didáctica, de hecho, es un factor que se privilegia en la acción didáctica significativa.

El profesor asume explícitamente una responsabilidad, la de "explicar" para establecer con explicaciones, vínculos cognitivos, sociales y afectivos con sus alumnos, que a su vez tienen diversas formas pues van de los simples comentarios, las ilustraciones, las resoluciones de problemas hasta la construcción de argumentos razonados y las demostraciones escolares (Wittmann, 2021).

Nos interesa además, dudar de una concepción muy extendida de que en el salón de clases los discursos son autoritarios y los formatos comunicativos que emplea el docente se caracterizan por la rigidez y escaza reflexión, sin atender con rigor a las formas en que finalmente llega la información a los alumnos. Esto se debe a que los conocimientos se muestran acabados y coherentes con planes de estudio, de ahí que al docente se le atribuya el rol de autoridad de posesión, "conocedor de la verdad". Sin embargo, de las explicaciones docentes vemos un proceso de adaptación a las interacciones discursivas con sus alumnos.

Algunos estudian aspectos de sus rasgos, como personalidad o características del profesor a quien se le concibe como un profesional que no solo actúa, sino también reflexiona sobre su acción y, por consiguiente, es capaz de generar conocimientos: a esta perspectiva se le conoce como *paradigma reflexivo del pensamiento del profesor*. En la actualidad se acepta que la mera reflexión no modifica la complejidad de la realidad áulica, así que encontramos trabajos que buscan conocer al conocimiento didáctico y al disciplinar que usa en el discurso de clase en matemáticas, esta investigación aporta elementos en otra dirección, abre la el análisis del discurso docente en contextos enmarcados por interacciones explicativas.

Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y se desarrolla la noción de *variación* (Cantoral, Moreno – Durazo, Caballero, 2018; Johnson, 2015) consiste en estudiar el discurso del profesor (Sierpinska, 2004), pero también el discurso en la interacción social realizada en el aula (Reséndiz, 2006, 2019). Por lo anterior, el problema de investigación se delimitó con estas preguntas: ¿Cuál es el papel que juega la *variación* en el *discurso* del profesor? ¿Qué rol desempeña la noción en la *explicación*?

MARCO TEÓRICO

Estudios sobre el *pensamiento y lenguaje variacional* muestran que la *variación* y el *cambio* operan sobre datos aislados mediante narrativas de hechos secuenciados, los ordena con una cierta racionalidad, uno detrás del otro. Es decir, lo que ocurre entre un dato y otro precisa de una argumentación de naturaleza causal basada en la experiencia, la que al ser compartida se tipifica como una *práctica de referencia* (Cantoral, 2020). En el ámbito escolar, la variación suele entenderse como el estudio del cambio y se le reduce a una comparación de estados sucesivas, ya sean estos figurales, numéricos o simbólicos gracias a una operatividad que relaciona el dato primero, digamos A, con el segundo, llamésmole B. Habitualmente se trata de compararles mediante restas A – B, cocientes A / B, secuencias figurales o simbólicas A, B...

Ahora bien, cuando se habla de cambio tanto en Matemáticas como en Ciencias se piensa en magnitudes cuya diferencia se cuantifica lo que provee de un sistema de referencia numérico, sin embargo, una cantidad es también una concepción del individuo y de la comunidad con la que diáloga de una faceta medible de una entidad dada. Esto significa que una cantidad hace referencia a algo más que la sola medida usada en el mundo material o al apareamiento entre unidad y número. De este modo, la magnitud, al provenir de prácticas, tendrá un sentido numérico con significado propio, es decir, una información que ayuda en la toma de decisiones y sirve para organizar la acción.

En esta dimensión de la variación, se precisa también de cierta transversalidad del saber, así como de razonamientos heurísticos y abductivos. Para ello, la acción de *comparar* antecede y acompaña a la actividad de *variar* y esta a su vez a las prácticas de *predecir*, *estimar* o *conjeturar*. En definitiva no habrá una concepción de la variación, sin un sistema de referencia y sin cierta gradación de las variaciones sucesivas (órdenes de variación).

Esta investigación muestra, cómo aparece la noción de variación en la enseñanza y cuál es su desarrollo en el proceso de negociación de significados mediante la *explicación*. En sus investigaciones, Sierpinska (1994), Mopondi (1995) y Reséndiz (2004, 2006) señalan que las explicaciones didácticas son aquellas que ofrece el profesor (o el alumno) y se dirigen a un entendimiento mayor con bases más familiares y frecuentes para la enseñanza. En el salón de clase, sin embargo, hay diversas alternativas para abordarlos, de ahí que tanto los actores educativos traten de construir sus versiones basadas en el discurso Matemático Escolar (dME) en tanto dimensión objetivable. Ahí, los participantes aportan sus explicaciones para entender y orientar los acuerdos sociales. Se pueden apreciar entonces, al interior de cada una de las clases, los recursos que utiliza el profesor y las contribuciones de sus alumnos, o viceversa, así como el efecto en la construcción del conocimiento compartido.

Para estudiar los elementos discursivos de los profesores sobre la variación, analizamos las situaciones donde explican diferentes temas de estudio: la variación y la noción de función o en el concepto de derivada; atendimos también a las explicaciones de los alumnos cuando expresan la necesidad de una mayor exposición y de qué manera esto modifica la explicación en el curso de una interacción. Para lo cual, enfocamos la atención en el papel de las explicaciones durante la clase de matemáticas cuando se pretenden enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la variación.

La *explicación* entonces, sintéticamente, es uno de los medios que emplea el profesor para "hacer comprender" o "dar sentido"; constituye el objeto de una comunicación, un debate o una discusión. De igual manera, puede aparecer como una comunicación de información útil o como un medio que facilita rápidamente una comunicación o argumentación, parece estar ligada al razonamiento (Duval, 1999) y su objetivo es hallar el entendimiento (Sierpinska, 1994, Reséndiz, 2006).

Sierpinska diferencia entre explicaciones científicas y explicaciones didácticas. Las primeras buscan lograr el entendimiento de las bases más conceptuales –por ejemplo, de una teoría matemática abstracta–, mientras que las segundas se dirigen a un entendimiento con bases más familiares y frecuentes en la enseñanza (una imagen, algún conocimiento previo o experiencias). Dado que el rol de la explicación es volver asequible el sentido de un objeto formal (ya sea un método, un procedimiento, un término o un enunciado propositivo formal), constituye el medio que utilizan docentes para sus estudiantes a fin de mostrar evidencias de su comprensión. Sus objetivos son múltiples: enseñar, convencer, requerir un orden u obtener una ventaja formativa e informativa. Por su parte Block y Laguna (2020) lo asumen desde una perspectiva dual, como el *envejecimiento de situaciones didácticas* y como escenarios de interacción docente desde perspectivas socioculturales.

Así pretendemos identificar las explicaciones didácticas, los elementos discursivos y la negociación de significados a los que recurre el profesor, tomando en cuenta que el dME se expresa en el salón de clases, proporcionando un escenario para el maestro y los alumnos a fin de representar, pensar, hablar, acordar o disentir. Aquí seguimos un análisis sobre qué y cómo se expresan las ideas en la clase, bajo la premisa de que es este discurso áulico donde se alcanza una organización con fines explicativos, puesto que toda intervención se ve orientada hacia la comprensión compartida.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En el marco de la estrategia general que elegimos, la investigación cualitativa, es importante señalar los procedimientos generales para recabar la información y la lógica que sustenta nuestro estudio.

Al intentar responder al problema de investigación, se ha concebido que la enseñanza es dirigida por el maestro; sin embargo, la influencia de los alumnos será decisiva para muchas de las acciones que lleve a cabo al enseñar.

Escenario de interés

Las actividades en el aula incluyen diálogos que generan oportunidades de aprender, pues los estudiantes deben verbalizar y reconstruir sus soluciones y resolver conflictos. Para poder iniciar tal clase de instrucción, el profesor y los estudiantes necesitan definir mutuamente las expectativas y obligaciones en el salón, de ahí que la *comunicación interactiva* constituya la actividad medular de la enseñanza y tenga sus metas.

Por las características de las acciones educativas en que participan los profesores del nivel superior, hay un tipo que resulta fundamental para nuestra investigación: clases normales y cotidianas. De este modo, nuestro trabajo se llevará a cabo tomando en cuenta la actividad cotidiana en el aula de un primer semestre de Ingeniería. Para ello, seleccionamos a profesores que se dedican, principalmente, a impartir clases.

Participantes en el estudio

Hemos considerado, como elemento de suma importancia, a los *profesores*, como portadores del saber que habrá de escenificarse en aula. Los participantes fueron tres maestros que imparten la asignatura de Matemáticas en el tronco común de las diferentes carreras de Ingeniería. Se les eligió aleatoriamente entre los docentes que ofrecen dicho curso.

Platicamos con cada profesor y señalamos el interés de observar y registrar la manera en que presentaban los conceptos de función y derivada, todos estuvieron de acuerdo. Cabe mencionar que esta institución brinda oportunidades habitualmente para investigar en Matemática Educativa.

Las observaciones fueron durante por un periodo largo, sólo durante las clases en que impartían los conceptos descritos, ya que son espacios para el estudio de la variación.

Fuentes de aportación de la información

La información se recabó bajo condiciones habituales, mediante las observaciones de actividades en aula. Fue necesario que registráramos las clases en audio, además de elaborar las notas de campo, lo cual nos permitirá triangular con una fuente de datos para:

- Obtener información que ilustre lo que sucede en el salón de clase, bajo condiciones "normales"
- Lograr un acercamiento con los profesores y con el grupo, pero sin provocar modificaciones importantes en sus formas cotidianas de trabajo y de relación. Esto nos facilitará tener registros reales
- Comprender las formas de actuar de los profesores en las actividades educativas
- Recabar información de lo que sucede en la interacción social, esto es, en el proceso educativo donde participan los profesores y los alumnos

- Contar con elementos de interpretación de los acontecimientos, *desde la perspectiva* de los sujetos bajo estudio
- Asimilar lo que sucede en los procesos educativos donde participan los profesores

Las observaciones de las clases fueron consignadas a fin de reconstruir los aspectos no documentados, rescatar lo cotidiano, lo inconsciente, lo oculto de la realidad escolar (Candela, 1999), es decir, diseñar registros que permitan reconstruir lo observado a la luz de conceptualizaciones posteriores más elaboradas que las que surgieron en el momento inicial (Rockwell, 1987; Erikson, 1986) de la investigación. Posteriormente, transcribimos por completo los registros de clase.

Fases de la investigación

Nuestro estudio, en su conjunto, prevé que contemplará estas fases:

- Acercamiento y delimitación del problema
- Trabajo de campo
- Descripción
- Interpretación y comunicación de resultados

Las concebimos en secuencia diferenciadas, ya que cada una enfatiza una cuestión peculiar, pero con regresos constantes a las fases previas a fin de revisarlas.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Un primer asunto que nos interesó explorar fue el concerniente a las ideas que utilizan los docentes de ingeniería sobre la noción de variación, es decir, no sólo se busca localizar la definición empleada, sino que interesa todo el entramado cognitivo y social con el que movilizan la idea a través de sus *explicaciones* en el salón de clase y cómo estas, a su vez, se modifican mediante la interacción discursiva a fin de alcanzar acuerdos. Las secuencias discursivas fueron de extensión diversa, sin embargo, como la interacción que se da en el aula se complica recortar y elegir sólo la explicación del docente, así que elegimos en este artículo sólo aquellos ejemplos propios para esta investigación.

Debido a su carácter interactivo, la construcción de explicaciones, vista como objeto de análisis, implica que las unidades mínimas sean secuencias de interacción, no frases o mensajes descontextualizados (Candela, 1999), pues hay que atender a la construcción de los recursos discursivos y los significados sobre la variación. De este modo elegimos de entre las explicaciones formuladas por los profesores sobre la noción de variación, y sobre todo cómo es que estas desempeñan roles diversos, citemos cuatro secuencias:

I. Mediante tabulaciones para el análisis de la variación numérica
II. Graficando la variable y su variación en un punto especial.
III. Explicando con base en situaciones cotidianas.
IV. Empleando parámetros como variables principales.

Secuencia I. Tabulación para el análisis de la variación numérica

Un primer acercamiento a la noción de variación en el aula se da a través del recurso de la *tabulación*. En las explicaciones de los profesores reposa la idea de relación entre conjuntos, interpolando, aproximando progresivamente, rotando, creciendo o decreciendo. Iniciemos este apartado con ejemplos basados en las explicaciones didácticas donde registran la variación numérica discreta a través de la actividad de tabulación: El docente explica las funciones racionales y luego sugiere que se haga una tabulación para tratar el comportamiento lineal. Tal estrategia es de importancia, ya que se está manejado el comportamiento de la noción matemática de función.

En los extractos siguientes, se usan los códigos de identificación de las explicaciones recíprocas,: **P**, representa al profesor, **Am**, al alumno, **Af**, a la alumna y **As**, varios alumnos hablan simultáneamente. Solo se eligen extractos de una colección mayor.

Extracto 5.3

> P: Miren sí esa expresión se puede dar, fíjense bien, es lo mismo lo que está aquí es exactamente lo mismo. Si yo tuviera $(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$, digo $\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$ esto es igual a $x-3$ para $x \neq -3$. Estoy haciendo lo mismo; significa exactamente lo mismo. Y esto, ¿qué cosa es?
>
> - Am: Una recta
> - As: ¡Eso es una recta!
>
> P: O sea esto es exactamente una recta, ¿no lo quieren creer? Podríamos hacer una breve tabulación para ver más o menos su comportamiento; por ejemplo, yo le puedo dar algunos valores para observar más o menos ¿sí?, dice que excepto para -3. Entonces, yo le puedo dar cualquier valor, como $-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Esos son

algunos valores que puedo darle… vean ustedes lo curioso de la gráfica de esta recta. Cuando dice $y = x - 3$, entonces -4 serían $-7, -5, -2, -1, -4, -3, -2$, ¿verdad?, -1.

- Am: 0
- P: 0 ¿verdad? Con eso ya tenemos una idea de cómo está la gráfica.

A (Gpo-1), pág. 33.

El profesor pregunta a los alumnos, después de la simplificación, por el resultado "Y esto ¿qué cosa es?". Los alumnos identificaron que se trata de una recta. Enseguida utiliza esta respuesta para hacer su comentario y llevarlos hacia la tabulación.

Con la tabla de variación numérica, se tendrá una idea sobre el comportamiento de la gráfica; dicha expresión puede notarse en el último turno de la secuencia. El profesor emplea la opinión de la mayoría, como en la expresión: "¡Eso es una recta!". En esta situación, el docente hace ligeras modificaciones a las explicaciones construidas durante la interacción, propiciando una complementariedad entre las versiones de los alumnos y la suya propia. Por otro lado, las intervenciones del profesor desempeñan la doble función de solicitar explicaciones y tratar de orientarlas hacia las respuestas que considera aceptables.

La noción de variación que usa el profesor en este episodio, durante su explicación, fue la variación numérica y el modelo del que se valió fue representado por la tabla de valores. En este orden de ideas, Gutiérrez y Reséndiz (2021) reportan que los alumnos de secundaria tienen cierto conocimiento sobre variación de situaciones de movimiento (moverse, caminar de un punto a otro, esto es en contextos de la vida cotidiana) e incluso lo pueden describir con palabras pero se complicaba la graficación.

El fenómeno didáctico de envejecimiento de las situaciones de enseñanza (Brousseau, 1986) se produce incesantemente en el aula, puesto que el profesor interactúa constantemente con los alumnos situando el uso del saber. Aunque estamos analizando episodios seleccionados, no significa que el fenómeno de envejecimiento ocurra sólo ahí, pues como señala la teoría, constatada por nuestra propia evidencia empírica, este fenómeno ocurre permanentemente, es continuo. El análisis lo selecciona, describe, estudia y explica.

En el siguiente extracto, el profesor explica que para hacer la gráfica de una función se requiere de una tabulación. Digamos la tabla es intermediaria para la gráfica. Se proponen algunos valores particulares, equidistribuido como, -3, -2 y -1.

Extracto 5.4

> P: ... $f(x) = x$. Queremos su gráfica. Haremos una tabulación. Vamos a darle valores a x y encontramos los de y; por ejemplo, empezamos con $-3, -2, -1$. ¿Por qué en números enteros?, alguien podría preguntarme. Porque son sencillos de trabajar; también puedes ocupar fracciones, pero para qué meterse en problemas, ¿verdad? La pregunta podría ser: ¿por qué no evaluamos más números? Eso es a criterio tuyo, o sea, si tú consideras que con esos puntos puedes visualizar la forma de la gráfica. Si para ti no son suficientes los puntos tendrías que dar más, ¿cuántos? Los necesarios para que tú visualices la gráfica. En este caso para hacer su gráfico nos encontramos con esto: -3 con -3. Creo que ese ya lo trabajan muy bien: el 1 con el 1, el 2 con el 2, el 3 con el 3. ¿Por qué unimos los puntos? Porque entendemos que los demás puntos intermedios, también los puedes evaluar y encontrar su respectiva pareja; entonces los unes y te da esta figura que representa una recta.
>
> C (Gpo-1), págs. 2-3.

Dicha explicación es interesante pues el profesor supone que los alumnos le van a hacer una serie de preguntas que el mismo formula y responde. La primera pregunta alude a la selección de números enteros para tabular: "¿por qué en números enteros?". Su explicación enfatiza que resulta más sencillo trabajar con enteros que con fracciones. La segunda pregunta, "¿por qué no evaluamos más valores?" la deja al criterio del alumno, pues lo que interesa es que visualicen la forma de la gráfica.

Cobra especial relevancia la última pregunta, "¿por qué unimos los puntos?", debido a que la explicación del profesor gira en torno a los puntos intermedios (interpolación) que hay entre los propuestos. Si bien al unirlos por una gráfica, los puntos intermedios son aquellos que el profesor mencionó serían difíciles de tabular (fracciones); los números con los que elabora su diseño de enseñanza consta de tres valores cerca del origen. Usa en su explicación la variación numérica (el número ordena puntos), mientras que su modelo es la tabla de valores. La gráfica de la función se visualiza mediante un modelo de representación.

Como en la explicación anterior, la siguiente también se refiere a la sucesión de puntos, sólo que aquí, unirlos, se les dificulta a los alumnos. Esta dificultad puede ser controlada por la gestión del docente de su clase, quien asume el control del discurso, tanto al nivel de las afirmaciones como de las respuestas a las preguntas que él plantea. Esta situación será de interés en el análisis.

Extracto 5.5

> P: Este tipo de gráficas, les digo, son muy comunes. Ustedes no se deben asombrar. Ya lo vieron, muchos estaban buscando un punto por allá, otro por acá y no podían llegar a formar una sucesión de puntos. Resulta que esto es lo que pasa: simplemente me fijo dónde corta el eje de las $x's$. Por eso da una idea de que la curva está cruzando al eje de las $x's$ en 3 puntos: aquí lo está cruzando en 2. Generalmente el grado de polinomio les dice cuántas veces corta el eje de las $x's$. Si el grado es 1 por ejemplo, es una recta, corta el eje de las $X's$ en un punto; si es cuadrática puede cortarla en 2; si es cúbica la puede cortar en 3, es decir, cruzarla en 3 puntos, y si es de cuarto grado, debe cortarla 4 veces...
>
> A (Gpo-1), pág. 30.

Esta explicación aparece con la función cúbica $f(x) = x^3 - 4x$. El docente sugiere otra estrategia diferente a la de su colega, que consiste en localizar el punto donde corta la gráfica al eje de las $x's$, de ahí que haga una tabulación con menos puntos y se apoye, como recurso visual, en la representación gráfica de la función.

Para finalizar la explicación del comportamiento de la función, en cuanto al grado del polinomio, el profesor intenta generalizar cuando dice que, dependiendo del grado del polinomio, son las veces que cruzará al eje x. Sin embargo, este tipo de generalizaciones matemáticamente imprecisas le ocasionará un problema al estudiante si las toma literalmente, ya que intentará aplicar tal criterio en diferentes ejercicios. Estos intentos de generalización, encontrará contraejemplos, exigen cambios en las explicaciones futuras, por así decirlo, son el germen de cambios potenciales en las explicaciones que producirán ante la exigencia de los alumnos en nuevas situaciones. Si bien el ejemplo queda bajo el control de la explicación del profesor, no así con la generalización.

La explicación de la variación se aprecia claramente en el empleo del modelo de la tabla de valores (variación numérica) y en el modelo de la representación geométrica. Es interesante analizar los diferentes planteamientos de los docentes cuando se pretende graficar una función por medio de la tabulación. En los fragmentos anteriores resulta notorio que se ha favorecido la tabulación, esto es, una variación donde un número ordena puntos, y las tablas muestran la relación que hay entre dos cantidades. En las explicaciones del profesor aparece la noción de *variación numérica* en el sentido de que es el número el que ordena la posición de los puntos y viceversa, mientras que, en su modelo o representación gráfica, la tabla de valores guía la secuencia de construcción gráfica.

En las diversas intervenciones docentes se identifican explicaciones didácticas donde, de alguna manera, se aprecian nociones básicas en torno al concepto de variación: relación entre conjuntos, aproximación, crecimiento o decrecimiento, sube – baja, gira en uno y otro sentido, cambia la inclinación, comportamiento de los puntos intermedios (Reséndiz, 2019).

Secuencia II. Al construir gráficas como la variación de un punto de referencia

En las explicaciones de los tres profesores participantes aparece la idea de mover un punto de referencia como el origen, el vértice o la asíntota. Dicha idea ha resultado de gran importancia para construir las exposiciones sobre el movimiento de la gráfica (Variación de un punto de referencia, línea de referencia, funciones trigonométricas): En la secuencia siguiente siguiente, la explicación del profesor gira en torno al desplazamiento del vértice o la *variación de un punto de referencia*.

Extracto 5.11

> **P:** Por eso marqué ahí $(-1, 0)$. Ahí está su gráfica. Fíjense: cuando el número afecta a la función básica lo sube o lo baja, pero cuando afecta a la variable de la función directamente la mueve. En este caso, ¿Hacia dónde la movió?
>
> **As:** ¡A la izquierda!

P: A la izquierda. Uno pensaría que porque tiene más $(+)$ la mueve hacia la derecha, pero no.

Af: ¿Y si fuera $f(x) = (x-1)^2$ lo movería hacia la derecha?

P: Lo movería hacia la derecha. Les decía que uno pensaría que con ... (+) es hacia la derecha y si es ... $(-)$ a la izquierda, pero no es así, es al revés. ... si es $(+)$ se mueve hacia la izquierda y si es ... $(-)$ hacia la derecha, eso es lo que estamos observando, ... se contestaría a través de su tabulación, localizando los puntos.

C (Gpo-1), pág. 11.

Se está trabajando la función cuadrática $f(x) = (x+1)^2$. La explicación del docente atiende al desplazamiento del vértice cuando la función es afectada por un número (*"cuando el número afecta a la variable de la función directamente la mueve"*) y la compara con la función básica $f(x) = x^2$, que al ser influida por un número, hace que el vértice suba o baje. El profesor pregunta hacia dónde se movió la gráfica y utiliza la opinión de la mayoría para legitimar su explicación, ya que los alumnos contestan a coro *"¡A la izquierda!"*.

Una alumna toma como referencia el ejemplo que formula el docente para generalizar la explicación del movimiento o de la variación del vértice a través de la pregunta *"¿Y si fuera $f(x) = (x-1)^2$lo movería hacia la derecha?"*. El profesor dice que si es $(+)$, la gráfica se mueve hacia la izquierda y si es $(-)$ hacia la derecha. La noción de variación se da con relación a un punto de referencia que se mueve, mientras que la validación recae en la tabulación. El profesor recurre a expresiones familiares para ilustrar el movimiento del vértice (sube, baja, derecha, izquierda) y usa dos tipos de explicación para la noción de variación: el modelo del lenguaje natural y el de representación geométrica. Al respecto Parada, Conde y Fiallo (2016) señalan que todo individuo necesita construir, interpretar y conectar varias representaciones de ideas, hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas y producir argumentos persuasivos y convincentes, usando el lenguaje cotidiano para expresar sus ideas.

La relación didáctica implica una construcción colectiva, ya que participan maestro y alumnos, implicando ajustes y negociaciones. A continuación, se presentan dos ejemplos donde la explicación del profesor se centra en el desplazamiento del vértice.

Extracto 5. 15

P: Bueno ¿cuál es gráfica de la función?, si a esa función le sumamos por ejemplo 1, y queda $y = x^2 + 1$

Am: se desplaza el origen en $y = 1$.

P: ¿Verdad que estaríamos haciendo eso? Dijera que y va a ser lo que valga en x^2 y eso que estaríamos haciendo sumándole 1, ¿dónde está en x? En 0 pónganle 1, en 0 pongo 1 y en 1 cuando valga 1, ahora la y ¿cuánto va a valer?

As: ¡2!

P: Va a valer 2 (...) y entonces la fórmula seguiría siendo la misma. ¿Qué fue lo único que sucedió? que la curva se desplazó una unidad hacia arriba y si la quisiera yo bajar que podríamos hacer.

As: ¡Restar!

P: Restarle 1, ahora cuál sería la gráfica de $y = x^2 - 1$ le podemos poner esta $y = x^2$, y si regresamos 1 ¿qué va a suceder? Cuando abres al vértice el $(0, -1)$ donde corta al eje x en $1, -1$ y esta es la gráfica de $y = x^2 - 1$, de $y = x^2$. Si yo le resto ¿qué sucede con la curva?

Am: La desplazamos

P: ¿Cuántas unidades la desplazamos?

B (Gpo-1), pág. 99.

Inicia la explicación con la función cuadrática básica $y = x^2$ que, cuando se le suma una unidad ($y = x^2 + 1$), desplaza su origen en $y = 1$. La afirmación *"se desplaza el vértice en $y = 1$"* fue hecha por un alumno, aunque no se le solicitó. Al restarle una unidad a la función cuadrática básica ($y = x^2 - 1$), se desplaza el vértice una unidad hacia abajo y al sumarle una va hacia arriba. El docente utiliza el término "desplaza" que dijo el alumno cuando asevera: *"la curva se desplazó una unidad hacia arriba"*.

Al solicitar el profesor que los alumnos expongan su opinión, a través de preguntas motiva intervenciones explicativas y resulta de sumo interés para los alumnos poder "mover" o "desplazar" el vértice de su posición inicial. El profesor intenta generalizar que si a la función básica le suman una cantidad, la gráfica se desplaza hacia arriba, y si le restan, hacia abajo. En esta situación hay dos tipos de explicación donde interviene la noción de variación: el modelo del lenguaje natural y el modelo de la representación geométrica, que sirve para visualizar los movimientos.

Entre los estudiantes, el pensamiento matemático se desarrolla a medida que estén en condiciones para tomar el control de sus actividades matemáticas, orquestadas por el profesor (Contreras, González y Reséndiz, 2020). Por otro lado, Cantoral y Montiel (2001) afirman que al utilizar una estrategia de graficación, ya sea para construir, interpretar o transformar una representación gráfica, se está abriendo, al mismo tiempo, una manera particular de pensamiento matemático en el estudiante.

Finalmente, la teoría de situaciones (Brousseau, 1986) se basa en una aproximación constructivista, que actúa bajo el principio de que una noción se construye a través de situaciones de enseñanza, de ahí que consideramos que en el aula se crea un discurso compartido entre maestros y alumnos. Del mismo modo, la teoría socioepistemológica (Cantoral, 2013) se basa en un enfoque sociocultural del conocimiento y analiza al aula como un escenario de construcción compartida, donde el discurso áulica se norma por el dME.

Veamos cómo se desplaza el vértice de una función cuadrática $y = x^2$ cuando se le suma una unidad en x y queda $y = (x + 1)^2$.

Extracto 5.16

> **P:** Es una parábola $y = (x + 1)^2$. Inclusive hasta la podemos ver así, $y = x^2 + 2x + 1$, ¿verdad? Luego, el -2 ¿cuánto es? El -2 es 1. Entonces la curva sería así −a ver si estamos de acuerdo−, mientras que la forma básica sería hasta acá, que es $y = x^2$; la forma sigue siendo la misma. Debemos entender que es la misma curva y lo único que hace la línea es desplazarla ¿hacia dónde?
>
> **Am:** A la izquierda.
>
> **P:** Hacia la izquierda. Y si la quisiéramos mover más hacia la izquierda, ¿que tendríamos que hacer? Que se sustituya en la forma básica ¿a quién? A x por $x + 2$ ($y = (x + 2)^2$). Si la quiero yo hacia la izquierda, hasta -10, entonces ¿en dónde se ubicaría F? si la función

original es $f(x) = x^2$ y yo me la quiero llevar hasta el vértice que está en -10, ¿qué hago?

Am: Sería: $y = (x + 10)^2$

B (Gpo-1), pág. 101.

La explicación del profesor toma como referencia a la función x^2. Es la misma forma de la curva, pero ahora se desplaza una unidad a la izquierda y, si quiere mover más hacia la izquierda tendría que dar un número negativo cualquiera, como el -10.

Aquí se destaca que el profesor Bruno hace el binomio al cuadrado. Esto lo podemos ver al inicio de este extracto; sin embargo, en el grupo del profesor Carlos hay toda una discusión por el hecho de que un alumno desarrolle el binomio al cuadrado. Al término de las explicaciones sobre el movimiento o el desplazamiento del vértice, el docente resume el tema: La gráfica $y = f(x) + c$ desplazada c unidades hacia arriba, la gráfica $y = f(x) - c$ desplazada c unidades hacia abajo, la gráfica $y = f(x + c)$ desplazada c unidades hacia la derecha y la gráfica $y = f(x + c)$ desplazada c unidades hacia la izquierda.

Se aprecian dos tipos de explicación que implican a la noción de variación. Uno es el modelo del lenguaje natural (desplazamiento hacia arriba, hacia abajo, izquierda, derecha) y el otro el modelo de la representación geométrica, que permite visualizar el desplazamiento de la gráfica o parábola como una identidad completa.

Las anteriores intervenciones de los alumnos son distintas versiones de la respuesta a la pregunta y en algunos casos se contraponen entre sí con las explicaciones del profesor. Los alumnos manejan el movimiento del origen (así lo hacen en el episodio, aunque como sabemos se trata más bien del vértice) y su desplazamiento hacia la izquierda o hacia la derecha para construir una explicación acerca del comportamiento de la gráfica. Aquí la explicación de la noción de variación ocupa el modelo de representación geométrica, a través del cual se visualiza el comportamiento de la parábola hacia arriba o hacia abajo. En la secuencia anterior lo que señala Bruner, (1988) sobre la construcción del conocimiento, no es un proceso individual aislado, sino un proceso social de creación conjunta en una cultura.

A lo largo de estos extractos de secuencias se observa, sistemáticamente, que se hace referencia a las relaciones entre desplazamiento de una gráfica con la variación de parámetros. La mixtura de lenguajes utilizados en estos ejemplos, provienen de un referente natural cotidiano, se usan ideas, expresiones, metáforas, generalizaciones basadas en lo más familiar para los estudiantes. El mover un vaso, una silla, o ahora una gráfica no exigirá de una explicación mayor, una explicación matemática, sino que habrá de demandar de explicaciones didácticas, explicaciones que son familiares y sirven al entendimiento. Explicaciones que, matemáticamente, no son consideradas en la medida en que actuan sobre objetos concretos. En este sentido, el espacio de interacciones discursivas entre los alumnos y el profesor cuando se trata de nociones como la variación, se amplía considerablemente dando lugar a un ambiente de acuerdos y negociaciones. En nuestra opinión, si esto es consubstancial a la clase de matemáticas, es más fuerte y persistente cuando se trata de nociones paramatemáticas. Sabemos bien que esta situación no se hubiera producido si la discusión hubiera fincado sus bases sobre un concepto con definición explicita, como la integral, el limite o la derivada. De ahí la relevancia del análisis que ahora llevamos a cabo.

En estas intervenciones de los profesores se logró identificar las explicaciones donde se aprecian sus diferentes interpretaciones sobre la noción de variación. La idea de tomar un punto de referencia especifico, como el vértice, la asíntota o la forma periódica, resultó de gran importancia para construir las intervenciones basadas en el movimiento, de un objeto, una gráfica. De ahí que el cambio en la explicación pasara del concepto, al objeto matemático. Se le atribuyeron nociones de movimiento a las gráficas y a puntos de referencia principales, cómo se desplaza, sube o baja, recorre, se mueve, desplaza, etc. Las explicaciones donde aparece la variación se sustentaron principalmente en el modelo de representación externa (sobre la gráfica), quizá por la posibilidad de sintetizar informaciones en un solo dibujo.

Secuencia III. Las expresiones verbales como referencia de situaciones cotidianas

Durante la sesión de funciones trigonométricas, el profesor aborda las relaciones trigonométricas y pregunta que significan esas relaciones o número (cateto opuesto dividido por la hipotenusa, por ejemplo). El alumno responde que *"Son como razones de cambio"* y el docente la retoma debido a que no le convenció; argumenta que, cuando se habla de cambio, se alude a una variación de cociente y también se le llama razón, pero no se gana nada, solamente cambia el nombre (razones de cambio–variación de cocientes), o la razón entre cateto opuesto y la hipotenusa es la relación trigonométrica seno...

Extracto 5.21

P: 0.5, seno de 60º, cateto opuesto dividido por la hipotenusa y esto nos da 0.8660, pero tenemos la misma pregunta ¿qué significa? Yo sé calcular esto y si no lo sé, la calculadora lo hace; nada más se le aprietan algunas teclas. Sin embargo, me interesaría contestar esa pregunta ¿qué significan esos números?

Am: Son como razones de cambio

P: Sí, cuando uno habla de cambio, habla de variación de cociente, o sea, es una razón, pero no ganamos nada porque entendemos que es un cociente, al que también se le llama razón. Únicamente le estamos cambiando nombre ¿verdad? Lo que dice su compañero no lo podemos negar. Si es cierto que ésta es una relación a través de la razón, como una división, ¿están de acuerdo?, es la razón entre estos lados, entre los catetos, perdón, la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, y el cateto opuesto y la hipotenusa es la relación trigonométrica seno. El seno es la relación que guarda el cateto opuesto con la hipotenusa; la razón que guarda es como agarrar una naranja y decir "la voy a dividir entre dos personas". ¿Cuál es la razón de una naranja con relación a estas dos personas? Sería tomar la naranja y dividirla entre dos: la razón sería media naranja...

C (Gpo-1), pág. 53.

Para convencer a los alumnos de la razón que guarda el cateto opuesto y la hipotenusa el docente formula una analogía: *"es como agarrar una naranja y decir lo voy a dividir entre dos personas. ¿Cuál es la razón de una naranja con relación a estas dos personas?*, *sería tomar la naranja y dividirla entre dos: la razón sería media naranja"*. Intenta explicar una situación poco familiar comparándola con otra similar, aunque poco explorada por los alumnos para que puedan comprender y compartir sus explicaciones.

La explicación del docente se basa en una supuesta *variación del cociente* y la ejemplifica o relaciona con otra idea con la que recurre un poco forzado, al empleo de expresiones que considera familiares para el alumno. En esta relación didáctica típica del aula, el profesor busca "disminuir" o "invalidar" la intervención del alumno y conservar su carácter de guía del debate, emplea ese argumento inconsciente con el problema pues no se trata de un cociente cualquiera, sino de un cociente de incrementos, es decir, la razón de los cambios. Digamos que explica sin justificar la participación del alumno en dicha interacción, logró la emergencia de una metáfora como la descrita previamente, es decir son las interacciones entre alumno y maestro quienes regulan la explicación y en consecuencia el envejecimiento de la situación (Brousseau, 1986, Reséndiz, 2006). Ello ocurre en el marco del dME, que como sistema de razón (Soto y Cantoral, 2014), regula dicho proceso. Sin dicha intervención, el profesor simplemente habría definido el concepto.

Secuencia IV. Mediante el empleo de parámetros como variables principales

En las explicaciones de los profesores, la manipulación de parámetros les permite que se visualicen los cambios que sufren las gráficas de funciones, el profesor las compara, en este caso la función $f(x) = x$, y esta sumada con 2 unidades, es decir $f(x) = x + 2$.

Extracto 5.24

> **P:** Esta una función básica, $f(x) = x$, o sea la básica de $f(x) = x + 2$; Este 2 la está rotando. Para que se entienda lo que yo quiero decir con básica, aquí la básica de $f(x) = x$ mas o menos sería por aquí… miren como la rotó, ¿cuánto la rotó? ahí no fue tan sencillo. Ahora, ¿qué inclinación tiene? bueno de eso vamos a hablar. Ahora sí yo creo que con esto podemos ir a una traslación, vamos a ponerle así y vamos a sumarle… ¿que le hace la suma a la traslación? eso es lo que vamos a averiguar. Para observar esto, otra vez, tengo la representación; si lo evaluamos en –3 sería –3+2; si lo evaluamos en 3 daría 3+2, ¿cuánto?
>
> **As:** 5
>
> **Am:** Es +5 ¿verdad?
>
> **P:** Es +5. Ahora sí brevemente dibujo la básica que es $y = x$. ¿Qué le hizo?
>
> **As:** ¡La sube!
>
> **P:** La subió, o sea la trasladó ¿cuántas unidades?
>
> **As:** 2

P: 2, o sea que este número lo que hace es trasladarla en el eje de las $y's$. Podemos verlo así, subirla 2 unidades. ¿Para que sirve esto? para hacer un poquito más rápidas las gráficas, y que en un momento es nos puedan ayudar. Por ejemplo, para graficar $f(x) = x - 3$…

As: ¡La baja!

P: ¿Cuántas unidades?

As: 3

C (Gpo-1), pag. 5.

El primer comentario del docente, sobre la variación o cambio de parámetro es que el 2 rota la gráfica de la función respecto del origen. Tal idea no es correcta, ya que la gráfica se traslada, sube o baja. Luego maneja la idea de *traslación* en ese mismo ejercicio, al sumarle 2 unidades a la función. Cuando la recta sale del origen hay una *traslación* y para constatar el movimiento de la recta realiza una tabulación.

Al evaluar la función, el profesor pregunta: *"¿qué le hizo?"* los alumnos responden *"¡la sube!"*. No usaron la explicación del profesor, esto es, la idea de traslación; Sin embargo, el docente mezcla las dos: *"subió"* y *"trasladó"*. Los parámetros funcionan como un todo; el signo del parámetro determina el comportamiento de la función, su traslación (subir o bajar).

Aquí la explicación del profesor sobre la noción de variación se basa en un modelo de representación gráfica que ilustra el comportamiento íntegro de la gráfica. Veamos una explicación del docente donde varían los parámetros que multiplican a $f(x) = sen\ x$ para que se perciban las modificaciones de la gráfica.

Extracto 5.22

P: Cuando le pone un valor ahí, cuando tenga la variable ahí va a incidir en el dominio. Lo que vamos a *variar, dependiendo de qué cambios le haga, sen x* y; cuando incide sobre el dominio, la imagen también va a cambiar. Esto indica que su grafica no va a ser la función coseno, sino seno de x…

C (Gpo-1), pág. 58.

El profesor Carlos generaliza lo que hizo en la secuencia del extracto y lo lleva a la función cuadrática $f(x) = x^2$, que nombra básica. Su explicación la lleva a cabo por medio de la tabulación con la intención de ir reconociendo qué efectos conlleva el 2 cuando se le suma a la función. A diferencia del extracto anterior, donde el profesor se rehúsa a considerar la opinión de la mayoría (*"¡la subió!"*), aquí ya no se usa el término traslación, sino el de *"¡la sube!"*.

Extracto 5.25

> **P:** La expresión básica que vamos a considerar es la siguiente $f(x) = x^2$ y la vamos a considerar como básica de las funciones cuadráticas. Para conocerla vamos a tabularla y de ahí partimos para hacer su gráfica. Vamos a darle algunos y así localizaremos los puntos. Bueno, ya tenemos su gráfica: lo que observamos es que la podemos evaluar en cualquier número, un racional, un entero, un irracional, ¿verdad? podemos empezar a aplicar las propiedades que ya hemos visto ¿cuáles? Las del manejo de gráficas. Por ejemplo, vamos a realizar la gráfica $f(x) = x^2 + 2\ldots$ ¿qué le hace el 2?
>
> **As:** ¡La sube!
>
> **P:** ¿cuánto la vamos a subir?
>
> **As:** ¡2!
>
> **P:** Muy bien dos unidades. Trato de hacer la forma que tiene; que no sea la misma no nos importa, lo que estamos entendiendo es lo que ese 2 hace es subir dos unidades a la gráfica
>
> C (Gpo-1), pág. 8.

Primero se tabula la función y una vez que la reconocen los alumnos, el profesor los lleva a que utilicen lo que denomina *técnica de graficación*. Como se advierte, el vértice es un punto de referencia que varía cuando se le suma un número.

En este fragmento tenemos la explicación del docente cuando resuelve un ejercicio de tarea: "Graficar las funciones cuando varían los parámetros $f(x) = sen\, x$, $f(x) = sen 2x$, $f(x) = 2 sen\, x$, y hallar algunas diferencias y similitudes entre ellas".

Extracto 5.26

> **P:** ¿Cómo quedaría la función? A ver, la primera función es $f(x) = 2sen\,x$, ¿verdad? Bueno, aquí dice que el doble del seno 0 es 0; el doble de $\pi/2$ es 2 y el doble del seno en π es 0. Si ustedes se acuerdan de la función que trazamos al principio, la función senoidal, encontramos que la primera era de este estilo, ¿verdad?, donde solamente andaban entre 1 y -1. Si ustedes observan era de -1 y 1; esa era la oscilación que tomaban los valores del rango. Van a ver ustedes que le pasa al doble: aumentó al doble. Es decir, la función duplicó; si fuera triple, entonces la función seria tres veces más; si fuera 4 o 5 veces va aumentando su amplitud.
>
> **Am:** ¿es una onda, maestro?
>
> **P:** es una onda central.
>
> **Am:** Maestro.
>
> **P:** Bueno, nada más que va aumentando la amplitud lo que sale aquí es más, ¿no? Sería esto, perdón, es así entonces, ¿verdad? Porque $\pi/2$ es 1, entonces es 1: aumenta el doble. Esto es lo que quería que observaran. La otra es la función seno doble, que dice: seno del ángulo doble, es decir, dos veces el seno de 90, dos veces el seno de 0, dos veces el seno de 180, dos veces el seno de 270 o dos veces el seno de 360, ¿Qué pasa ahora con la función? ¿Qué pasa con la función $f(x) = sen\,2x$?
>
> **Am:** Donde era una frecuencia ahora son dos frecuencias.
>
> A (Gpo-1), pág. 60-61.

Su posición inicia con la función básica $f(x) = sen\,x$, que oscila entre – 1 y 1, la toma como referencia. Posteriormente atiende al cambio que sufre cuando es multiplicada por 2: se duplica. Un alumno, al ver la forma de la gráfica, pregunta *"¿Es una onda,?"* para conocer si se sigue observando la onda. El docente responde que es una onda central.

La última versión es $f(x) = sen\,2x$, seno del ángulo doble, apunta el docente, y formula la siguiente pregunta: *"¿Qué pasa con la función $f(x) = sen\,2x$?"*. Un alumno responde: *"Donde era una frecuencia ahora son dos frecuencias"*. Aunque el docente sabe que tal respuesta es correcta, no la valida inmediatamente y prosigue proponiendo más valores para evaluar la función y llegar a la respuesta deseada. Intenta generalizar su explicación, al decir que la gráfica tendrá cierto comportamiento de acuerdo con los parámetros. Si la función la multiplica un 2, se duplica, y si la multiplica un 3, la función aumentaría al triple, y así sucesivamente, ya que el valor al que se multiplique la función modificará su dominio y rango: los parámetros funcionan como un todo. La función básica $f(x) = sen\, x$ juega un papel importante en la graficación de las funciones. La explicación del profesor sobre la variación fue construida bajo el modelo de representación gráfica, con la manipulación de los parámetros hizo visibles los cambios en la gráfica. En el discurso de los docentes se identifican explicaciones que exhiben sus nociones sobre la variación en cuanto a parámetros (rota, traslada, sube). Se asignó un significado geométrico a las gráficas como traslación, inclinación, rotación, desfasamiento, trasladar, crecer o decrecer.

Así tenemos dos tipos de explicación de la variación: los modelos de representación algebraica (constantes) y geométrica (parámetros). Estos episodios muestran cómo la explicación del profesor mantiene en los márgenes del contrato pedagógico (D'Amore, 1999), su discurso tiene un patrón: "Explico sobre gráficas y valido con tablas". Este mensaje del profesor mediante sus acciones es captado por los alumnos a través de la regularidad de su aparición y lo apropiara como una estrategia de respuesta.

Es así como el fenómeno de envejecimiento (Brousseau, 1986) toma en cuenta también al "hábito del aula" (Soto y Cantoral, 2014) y no sólo el efecto de la transposición del saber. El espacio de significaciones en los que cohabitan profesores y alumnos es construido en la cultura escolar, quienes traen para su diálogo aspectos de las experiencias previas y sobre todo, las vivencias en ámbitos más generales de los alumnos y del professor.

CONCLUSIONES

Se identificó una diversidad de perspectivas dentro de un patrón de explicaciones de los profesores (sobre la noción de función, así como sus ideas acerca de la variación, como la de parámetros –rota, traslada- o la asignación de un significado geométrico a las funciones: traslación, inclinación, rotación, desfasamiento, sube o baja, crece o decrece). Además, le atribuyeron nociones adicionales de movimiento a las gráficas a través de sus puntos de referencia como vértice, origen o asíntota (mediante expresiones como se desplaza, sube o baja, se recorre, se mueve o corrimiento).

Consideramos que la estrategia de mover un punto de referencia (el vértice, el origen o la asíntota) fue de gran importancia para que los profesores construyeran sus explicaciones en torno al movimiento de la gráfica y, así enfatizaron el papel de la noción de variación. Para elaborar sus explicaciones, se auxiliaron de funciones primitivas, como $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = sen\, x, \dots$

Durante las clases registramos tipos de explicación, modelos, en las que se aprecia la noción de variación, las representaciones o modelos de los docentes para explicar contenidos:

- El numérico
- La representación geométrica
- El algebraico
- El lenguaje natural

Estas formas de explicar la noción de variación en aula, se crean bajo el discurso construido tanto por el maestro como por sus alumnos, atendiendo a la especificidad del saber en juego, pero normados a la vez por el dME como hegemónico. Según se sostiene en la teoría socioepistemológica, donde se destaca el hecho de que la situación de aprendizaje genera una serie de interacciones que hacen funcionales la comunicación y el intercambio de ideas. Asi, los episodios analizados en el aula están estrechamente ligados con la búsqueda de una explicación satisfactoria para los actores de la interacción didáctica. Digamos que el docente produce un mensaje Mi (Mensaje del profesor i), el cual se altera con la primera duda o expresión reflexiva del alumno Ai. Digamos Mi → Ai → Mi', sin embargo el mensaje modificado Mi', conserva de Mi la estructura, pero cambio el discurso comunicativo. Por ejemplo, emplea la metáfora cotidana para "dar sentido comunicativo".

En esa red de significados lo que emerge es una explicación normativa para ambos, maestro y alumno, $M \to A \to M' \to A' \to \cdots$ Digamos que el propio contenido del mensaje es modificado, pero también los roles de la interacción. Sólo en el análisis realizado tenemos tres docentes, aproximadamente 110 alumnos y 2 contenidos (función y derivada), que producen $3\times 110 \times 2 = 660$ episodios. Sólo elegimos algunos de ellos para este análisis, la variación con representaciones específicas y una selección de las interacciones. Se eligen los más relevantes para testificar un hecho, que mediante la teoría, se explican mediante fenómenos, como el envejecimiento de las situaciones y la hegemonía del dME.

Es notorio que en las situaciones analizadas se dan sobre la base de un conjunto de relaciones entre docente, alumnos y conocimiento con un objetivo en el marco del trabajo escolar. Estas relaciones interesan al estudio pues son la base de explicaciones portadoras del conocimiento, como hemos dicho, el profesor explica al alumno con base en el *millieu*, o más fuertemente, con base en su sistema de razón hegemónico, al hacer uso de cada uno de los elementos a su alcance en el momento dado, como fue el caso de una "media naranja", "jalar la onda", "subir el vértice", etc. Este hecho, es una característica notable del *fenómeno* pues se acude a los recursos disponibles del maestro y de los alumnos al modificar la explicación, la cual se modifica en la medida en que se use.

Se producen modificaciones de las explicaciones con base en la interacción, la cual es propiciada por una búsqueda de complementariedad entre las versiones de alumnos y maestro. Las intervenciones del profesor de doble función, solicitar explicaciones y tratar de orientarlas, regulan el curso de la clase. La situación de enseñanza se modifica mediante las explicaciones situadas.

La noción de variación, que es el centro de estudio, se apoya fuertemente en la variación numérica y el modelo más socorrido fue el de la tabla de valores, pero en todos los casos basados en diferentes formas del saber. Insistimos en que estos recursos no forman parte de lo que típicamente considera el contenido matemático del aula, sino son los recursos con los que se amalgama la explicación áulica. La función no es la tabla, ni la fórmula, ni la gráfica, ni las metáforas cotidianas, sino una relación de correspondencia arbitraria conocida como definición de Dirichlet. Su representación, no es en sí el concepto, pero es el medio través del cual, el profesor lo hace aparecer en clase y se valida en libros de texto. Sin embargo, las metáforas al saber cultural (el saber como conocimiento puesto en uso), las metáforas a la vida cotidiana, son indispensables para amalgamarlas, hacen parte del mensaje. Es la metáfora situada es donde la explicación del aula se asienta.

Respecto del fenómeno didáctico específicamente de envejecimiento de las situaciones de enseñanza, los profesores interactúan constantemente con los alumnos mediante el uso del saber – explicado, o bien de la explicación didáctica. Esto ocurre con mayor intensidad cuando se trata la noción de variación. Este no es objeto explícito de la enseñanza, en la medida en que no es introducida al aula mediante una definición, ni es tratada en los libros de manera explícita ya que no se trata de una caracterización categorial. Su aparición es junto al lenguaje de uso cotidiano que provee el contexto, se varía relativo a la física o la ingeniería. y ello es trasladado al juego de discursos formales y no formales. Este hecho hace que el envejecimiento sea más rápido, pues la cantidad de eventualidades es mayor que cuando se introducen conceptos categoriales.

Son la generalización, o sobregeneralización, la analogía, la repetición sistemática, la reformulación y el cruce de lenguajes, los factores que consideramos más contribuyen al fenómeno basado en las explicaciones. Cuando el profesor, como vimos en uno de los episodios, intenta generalizar al decir, "dependiendo del grado del polinomio, [se sabrá cuántas] son las veces que cruzará el eje x", está haciendo una generalizaciones incorrecta que ocasionará problemas al estudiante si las toma al pie de la letra, pues pronto encontrará contraejemplos; ello exige de cambios permanentes en las explicaciones del profesor.

Este estudio sobre el rol de la explicación en la clase de matemáticas, intenta localizar, analizar y explicar cómo se desarrolla el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza. Estos pasajes, descritos anteriormente, muestran que el origen del cambio en la explicación del docente puede ser múltiple y muy complejo. Por ejemplo, el empleo de una generalización no válida, la repetición exhaustiva de un argumento o la combinación de lenguajes inducen factores de cambio en el discurso del profesor y muy particularmente en sus explicaciones. Al nivel teórico, ahí se encuentran las raíces del envejecimiento.

Cuando el profesor demanda que los alumnos expongan su opinión, a través de preguntas, motiva intervenciones explicativas y resulta de sumo interés para los alumnos el "mover" o "desplazar" el vértice de su posición inicial. El profesor intenta generalizar que, si a la función básica le suman una cantidad, la gráfica se desplaza hacia arriba, y si le restan, hacia abajo. Este sistema de referencia, debe ser compartido por el alumno. Analizando entonces la explicación en el aula (escolar o extendida) se localizan aspectos del discurso áulico que no brindan los libros de texto, ni el dME.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

ERB y RC han contribuido con el estudio considerablemente. Correspondió a ERB el estudio del discurso en el aula, tanto la transcripción como la identificación de los elementos categoriales. A RC le tocó hacer una revisión final de las aportaciones y su adaptabilidad al enfoque teórico. Ambos decidieron sobre la estructura y el contenido de cada apartado.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que sustentan y respaldan esta investigación serán puestos a su disposición si así es requerido. La encargada de su custodia es ERB.

REFERENCIAS

Block, D. y Laguna, M. (2020). Reconstrucción de situaciones didácticas de matemáticas en el aula. Un estudio en preescolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23(3)*, 331-356.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et methods de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7(2),* 33-115.

Brunner, J. (1988). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Alianza.

Caballero Pérez, M.A. (2018). *Causalidad y temporalización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* [tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. RepositorioInstitucional. http://www.bfm.cinvestav.mx/catalogov.html

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Paidós.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. Prentice Hall.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education, 50(1),* 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.

Cantoral R. (2020). Socioepistemology in Mathematics Education. In: Lerman S. (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

Contreras, J. C., González, C. A., y Reséndiz, E. (2020). Dificultades ocasionadas por la utilización de prototipos geométricos en el aprendizaje de ejes de simetría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33(2)*, 185-195.

D´Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica dellaMatematica.* Pitagora.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar ¿continuidad o ruptura cognitive?* Iberoamérica (original publicado en *Petit X*, 31, 1992).

Edwards, D., y Mercer, N. (1987). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula.* Paidós.

Erickson, F. (1986). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En *La investigación en la enseñanza II* (pp.195-295). Paidós.

Gutiérrez, J. E. y Reséndiz, E. (2021). Desarrollo de habilidadescon con el uso de instrumentos tecnológicos y la variación. *Educiencias, 6(1),* 6-17.

Hernández Zavaleta, J. E. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de lo "errático"* [tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. Repositorio Institucional. http://www.bfm.cinvestav.mx/catalogov.html

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics, 89(1),* 89-110.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 15(3),* 7–52.

Moreno Durazo, G. A. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacos* [tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. Repositorio Institucional. http://www.bfm.cinvestav.mx/catalogov.html

Parada, S. E., Conde, L. A. y Fiallo J. (2016). Mediación digital e interdisciplinariedad: una aproximación al estudio de la variación. *Bolema, 30(56),* 1031-1051.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar.* [tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. Repositorio Institucional. http://www.bfm.cinvestav.mx/catalogov.html

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(3),* 435–458.

Reséndiz, E. (2019). *El discurso en el aula y la construcción del conocimiento matemático*. Colofón.

Rockwell, E. (1987). *Etnografía y teoría de la investigación educativa. Enfoques.* Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Studies in Mathematics Education. Series: 2. Falmer.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 48*(28), 1525–1544.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 32(17)*, 91–112.

Wittmann, E. (2021). *Connecting Mathematics and Mathematics Education*. Springer.