ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6835

Evaluar conceptos de eventos independientes y mutuamente excluyentes en el pensamiento del estudiantado de la educación superior

Ailton Paulo de Oliveira Júnior [a]
Daniel de Freitas Barros Neto [a]
Sabrina Saito [a]

[a] Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática, Santo André, SP, Brasil

Recibido para publicación 18 nov. 2021. Aceptado después de la revisión 19 ago. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Fundamento: Los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes son fuentes de fenómenos didácticos porque los estudiantes universitarios al desarrollar actividades que abordan estos conceptos, presentan ideas erróneas espontáneas, lo que indica la necesidad de estudios que identifiquen estas dificultades. **Objetivo**: Buscamos comprender cuáles son las confusiones entre estos conceptos para brindar elementos para su mejor tratamiento e implementación en la enseñanza. **Diseño**: El presente estudio analizó, a través del Enfoque Ontosemiótico - AOS, el conocimiento de estudiantes de educación superior en relación a un problema propuesto en el aula e identificar los conflictos semióticos. **Ámbito y Participantes**: Un grupo de estudiantes de una universidad federal en el estado de São Paulo, Brasil, fue invitado a participar en el estudio, de forma voluntaria y anónima, y todos los 74 estudiantes de un curso de introducción a la teoría de la probabilidad de la Licenciatura en Ciencia y Tecnología. en esta universidad participó en la investigación. **Recopilación y análisis de datos**: Los estudiantes respondieron el problema por escrito y, a través de sus respuestas, fueron analizadas, clasificándolas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas y sin respuesta. **Resultados**: Se identificó la dificultad en la interpretación del planteamiento del problema, el uso inadecuado del lenguaje común (términos y expresiones) y la falta de claridad en la exposición de los argumentos para solucionar el problema. **Conclusiones**: A partir de las dificultades encontradas por este grupo de estudiantes, se sugiere trabajar estos conceptos en el aula utilizando diferentes herramientas didácticas, como, por ejemplo, la creación de ambientes de aprendizaje basados en procesos de investigación y situaciones reales.

Corresponding author: Ailton Paulo de Oliveira Júnior. Email: ailton.junior@ufabc.edu.com

Palabras clave: enseñanza de la probabilidad, enseñanza superior, eventos independientes y mutuamente excluyentes, enfoque ontosemiótico.

Evaluating Independent and Mutually Exclusive Event Concepts in the Thinking of Higher Education Students

ABSTRACT

Background: The concepts of mutually exclusive and independent events are sources of didactic phenomena because university students when developing activities addressing these concepts, present spontaneous erroneous ideas, indicating the need for studies that identify these difficulties. **Objective**: We seek to understand what are the confusions between these concepts to provide elements for their better treatment and implementation in teaching. **Design**: The present study analyzed, through the Ontosemiotic Approach - OSA, the knowledge of higher education students related to a problem proposed in the classroom and to identify the semiotic conflicts. **Setting and Participants**: A group of students from a federal university in the state of São Paulo, Brazil, was invited to participate in the study, voluntarily and anonymously, and all 74 students from an introductory course to probability theory of a science and technology course at this university participated in the research. **Data collection and analysis**: Students responded to the problem in writing and, through their answers, were analyzed, classifying them as correct, partially correct, incorrect and unanswered. **Results**: We identified the difficulty in interpreting the problem statement, the inappropriate use of common language (terms and expressions) and the lack of clarity in exposing the arguments to solve the problem. **Conclusions**: Based on the difficulties encountered by this group of students, it is suggested that these concepts be worked on in the classroom using different teaching tools, such as, for example, the creation of learning environments based on research processes and real situations.

Keywords: teaching of Probability; higher education; independent and mutually exclusive events; ontosemiotic focus.

Avaliando conceitos de evento independente e mutuamente exclusivo no raciocínio de estudantes da educação superior

RESUMO

Contexto: Os conceitos de eventos mutuamente exclusivos e independentes são fontes de fenômenos didáticos, pois alunos universitários ao desenvolverem atividades abordando esses conceitos, apresentam ideias errôneas espontâneas, indicando a necessidade de estudos que identifiquem essas dificuldades. **Objetivo**: Buscamos compreender quais são as confusões entre esses conceitos a fim de fornecer elementos para seu melhor tratamento e implementação no ensino. **Design**: O presente estudo analisou, por meio do Enfoque Ontosemiótico - EOS, o conhecimento de alunos do ensino superior relacionado a um problema proposto em sala de aula e identificar os conflitos semióticos. **Ambiente e participantes**: Um grupo de estudantes de uma universidade federal no estado de São Paulo, Brasil, foi convidado a participar do estudo, de forma voluntária e anônima, sendo que todos os 74 alunos de uma disciplina de introdução à teoria de probabilidade de um curso de ciências e tecnologia desta universidade participaram da pesquisa. **Coleta e análise de dados**: Os alunos responderam ao problema por escrito e, por meio de suas respostas, foram analisadas classificando-as em corretas, parcialmente corretas, incorretas e sem resposta. **Resultados**: Identificamos a dificuldade na interpretação do enunciado do problema, o uso inadequado da linguagem comum (termos e expressões) e a falta de clareza na exposição dos argumentos para resolver o problema. **Conclusões**: Partindo das dificuldades encontradas por esse grupo de alunos, sugere-se que esses conceitos sejam trabalhados em sala de aula utilizando diferentes ferramentas de ensino, como, por exemplo, a criação de ambientes de aprendizagem baseados em processos de pesquisa e situações reais.

Palavras-chave: ensino de probabilidade; educação superior; eventos independentes e mutuamente exclusivos; enfoque ontosemiótico.

INTRODUCCIÓN

Este estudio se basa en nuestra creencia y en Batanero (2000), Lopes (2003), Barragues Fuentes y Guisasola Aranzabal (2009) y Brasil (2018) de que la capacitación probabilística es importante para la formación de ciudadanos adultos preparados para navegar en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas y, cuando sea necesario, para interpretar situaciones que requieren elementos probabilísticos como, por ejemplo, los resultados de encuestas electorales, que a menudo presentan las decisiones que se toman con base en estos estudios.

Además, la probabilidad contribuye a una imagen mucho más equilibrada de la ciencia, que tradicionalmente presenta un carácter marcadamente determinista para el estudiantado, en el que todo es explicable en términos de causas y efectos y que indica la importancia de que refuercen sus habilidades matemáticas generales a través de habilidades específicas en probabilidad (Fischbein, 1975; Batanero, 2000; Lopes, 2008; Brasil, 2018).

La cuestión de la enseñanza de la probabilidad no solo está condicionada a la educación básica y, por lo tanto, debe analizarse también en la educación superior. Para Ara (2006), la práctica del equipo docente para la enseñanza de la estadística y la probabilidad para cursos de Ingeniería, por ejemplo, ha identificado que presentan dificultades de comprensión en relación con los conceptos involucrados en los contenidos estadísticos y probabilísticos, lo que lleva a los estudiantes, a una falta de motivación para su aprendizaje, e incluso, generar altas tasas de fracaso.

Según Coutinho (2001) y Batanero y Godino (2003), la construcción de los conceptos probabilísticos debe hacerse a partir de la comprensión de tres nociones básicas: percepción del azar, idea de evento aleatorio y noción de probabilidad.

Así, Lopes (2003) y Kataoka, Rodrigues y Oliveira (2007) afirman que tales conceptos se abordan a través de actividades en las que el estudiantado puede realizar experimentos y observar eventos, promoviendo la manifestación intuitiva del azar y la incertidumbre, construyendo, de estos resultados, métodos matemáticos para el estudio de tales fenómenos.

Además, la investigación educativa indica que estos tienen dificultades para comprender los conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar (Borovcnick y Peard, 1996; Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997; Sánchez, 2000; D'Amelio, 2004; Barragues Fuentes y Guisasola Aranzabal, 2009; Batanero, 2016).

Consideramos que el razonamiento estadístico, según Makar, Bakker y Ben-Zvi (2011) se define como la forma en que los individuos razonan con ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística, teniendo la comprensión conceptual de ideas importantes, como la variación, la distribución subyacente, centro, dispersión, asociación y muestreo o la combinación de ideas sobre datos e incertidumbre que conducen a inferencias.

Para Jolliffe (2005), el razonamiento probabilístico se puede definir como la forma en que las personas atribuyen significado a la información probabilística. Por lo tanto, razonar significa comprender y ser capaz de explicar y justificar los procesos probabilísticos. El autor también señala que hacer del espacio del aula un entorno de investigación requiere que el estudiantado participe activamente en términos de comunicación y expresión de soluciones a problemas de probabilidad. Esto puede facilitar que el professorado siga el camino tomado por el estudiantado para resolver el problema y comprender su razonamiento probabilístico.

Específicamente en este trabajo, nos acercaremos en los errores conceptuales que generalmente ocurren debido al uso único del sentido común para dar una interpretación de la independencia de los eventos (Nabbout y Maury, 2005; Cordani y Wechsler, 2006).

La confusión de la palabra independencia con exclusión puede ser un ejemplo de esto, promoviendo dificultades para comprender dos conceptos probabilísticos diferentes, independencia e incompatibilidad (Cordani y Wechsler, 2006; D'Amelio y Diblasi, 2006).

Otro error asociado con el uso del sentido común es considerar solo la definición de independencia para eventos cronológicos independientes, que, según Steinbring (1986) están asociados con la ocurrencia de experimentos sucesivos. Como afirma este autor, la otra definición de independencia se llama eventos estocásticos e independientes. Se basa en la fórmula matemática, $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$, y su comprensión está restringida a la demostración matemática.

Para Katoaka, Trevethan y Silva (2010), esta fórmula matemática para la independencia de los eventos proviene de la expresión de probabilidad condicional y, por esta razón, es necesario un estudio paralelo para ambos conceptos. Además, según Díaz y Batanero (2009), la importancia de construir conocimiento y conceptos relacionados con la probabilidad condicional nos permite cambiar el grado de confianza en eventos aleatorios cuando hay nueva información disponible.

En este contexto, se realizó una investigación con algunos estudiantes universitarios de una universidad federal en Brasil, con el fin de comprender las dificultades experimentadas en la comprensión de los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y enseñanza de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009; Godino, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016).

REFERENTES TEÓRICOS

D'Amelio (2004) profundizó el estudio y la caracterización de errores en el estudiantado de educación superior sobre los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes. Considera que, aunque el concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes es aparentemente simple, las ideas espontáneas de las personas dan lugar a respuestas incorrectas.

Por lo tanto, D'Amelio (2004), considera que los errores del sujeto se analizan frente a ciertas situaciones, cuando hay un enfoque para las discusiones sobre la definición del concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes en un curso de probabilidad, qué tan persistentes son estas ideas, qué sucede en el proceso en el que el sujeto confronta sus errores con los resultados de la aplicación de conceptos teóricos, con el fin de proporcionar elementos para un mejor tratamiento e implementación en la enseñanza.

Y así, en su estudio, D'Amelio (2004) concluyó que las dificultades y confusión respecto a los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes se confirmaron para los estudiantes de educación superior, considerando que una posible causa de esta confusión es la falta de referencias para enfrentar estos problemas y así proponer situaciones adecuadas a los objetivos de los cursos introductorios de probabilidad y estadística.

D'Amelio (2013), al igual que D'Amelio (2004), considera que la población de estudiantes universitarios que estudian Probabilidad en Argentina en actividades que involucran estos conceptos, presentan ideas erróneas y espontáneas, lo que indica confusión y asociaciones incorrectas.

En el estudio de D´Amelio (2013), se aplicó una prueba con problemas relacionados con los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes a 97 estudiantes de estadística después de que se enseñaron los contenidos. Se aplicaron para estudiar el razonamiento desarrollado por los estudiantes en las estrategias de resolución, y en un análisis a priori se explicó y posteriormente analizó la respuesta de los estudiantes.

Los resultados indican que estos tienen el estatus teórico de las premisas pero no se separan del estatus del contenido. Al no realizar cálculos en la situación propuesta sólo aplican definiciones y le asignan la propiedad de independencia a sucesos mutuamente excluyentes, es decir, utilizan premisas no pertinentes. Así, los autores consideran que el razonamiento deductivo está incompleto porque se queda en el estatus del contenido y no en el estatus teórico de las premisas, aunque lo conoce porque lo escribe, pero lo confunde (D´Amelio, 2013).

Un estudio con el equipo docente de matemáticas de secundaria mexicanos, Sánchez (2000) y Guzmán e Inzunsa (2011) descubrieron que estos exhibían varias ideas confusas cuando se enfrentaban a tareas que involucraban la independencia de los eventos. Entre las principales dificultades encontradas está la falta de una distinción clara entre experiencias independientes y eventos independientes, creer que los eventos independientes son sinónimos de eventos mutuamente excluyentes y la creencia de que solo el concepto de eventos independientes puede aplicarse a sucesiones de experiencias.

Además, Chernoff (2009) clasifica las tareas utilizadas en la investigación sobre la percepción de aleatoriedad en dos tipos: 1) tareas de predicción y 2) tareas de reconocimiento. Estas tareas también nos permiten analizar la comprensión de la independencia (Batanero, 2016).

Para este estudio, consideramos la conceptualización de Meyer (1982): Si hay independencia de eventos dentro del mismo experimento, se considera la regla del producto de probabilidades: los eventos A_1 , ... , A_n son independientes si $P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times ... \times P(A_n)$. Por lo tanto, se considera que la independencia ocurre cuando el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos (anteriores, simultáneos o futuros).

Por lo tanto, cuando dos o más eventos son mutuamente excluyentes la realización de uno excluye la realización de los otros. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que uno u otro ocurra es igual a la suma de las probabilidades de que cada uno de ellos tenga lugar, es decir, los elementos de estos eventos no se repiten, $P (AUB) = P (A) + P (B)$.

METODOLOGÍA

Enfoque

El enfoque del trabajo se ocupa del análisis de los problemas conceptuales observados en la solución presentada por el estudiantado que participan en la investigación sobre el problema propuesto, utilizando el modelo de Enfoque Ontosemiótico (EOS), que permite definir diferentes categorías, cada una de las cuales abarca las respuestas basadas en una idea común.

Unidades de análisis

Se invitó a participar en el estudio, voluntaria y anónimamente, un grupo de estudiantes de la Universidad Federal del ABC (UFABC), en la ciudad de Santo André, São Paulo, Brasil. Por lo tanto, en 2020, los 74 estudiantes de una clase con contenidos introductorios de la teoría de la probabilidad de un curso de ciencia y tecnología de esta universidad participó en la investigación.

Técnicas de recolección

El presente estudio analiza, a través del EOS, el conocimiento institucional y personal (descrito en el ítem 3.4) relacionado con el problema que se muestra en la Figura 1, para identificar las distinciones entre ellos que resultan en conflictos semióticos. Por lo tanto, esta discrepancia se verificará en la resolución de un problema que se centra en eventos independientes y mutuamente excluyentes. El estudiantado respondió por escrito a un problema relacionado con los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Figura 1

Situación problemática que involucra el concepto de eventos independientes

Tenga en cuenta que la probabilidad de que los viajeros que visiten la Antártida observen albatros utilizando una empresa afiliada a la Asociación Internacional de Operadores Turísticos Antárticos (Iaato) es P (Avistar Wandering Albatross) = 28.57% y P (Avistar Southern Royal Albatross) = 14.29%. Teniendo en cuenta que se detectaron tres albatros entre estos dos tipos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos sean Avistar Wandering Albatross?

Para llevar a cabo este análisis, se elaboró una configuración epistémica (resolución de la tarea por un sujeto ideal), que sirvió como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas del estudiantado (las respuestas dadas). Según Blanco, Godino y Pegito (2007) al preparar estas configuraciones, se hizo posible identificar objetos y relaciones primarios (relacionados con la semántica) y secundarios (relacionados con el contexto).

Procesamiento de análisis

Godino (2009) entiende como concepto las formulaciones introducidas a través de definiciones, descripciones y complementos en el modelo EOS que también son las prácticas realizadas por el estudiantado para resolver un problema matemático con el uso implícito o explícito de objetos matemáticos, ya que tienen que recordar y aplicar la definición.

Para Godino y sus colaboradores, en el modelo EOS de conocimiento e instrucción matemática según Godino, Batanero y Font et al. (2007), Godino (2009) y Godino et al. (2016), se asume que las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) utilizadas para resolver una situación problemática comunican la solución a otros o permiten que la solución sea validada y generalizada a otros problemas y contextos.

Para los autores, las situaciones problemáticas son aplicaciones matemáticas adicionales, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática, por ejemplo, problemas que involucran eventos independientes.

Las prácticas tienen un doble carácter y su significado puede considerarse desde un punto de vista institucional (en nuestro caso, la universidad, el equipo docente y el plan de estudios) o desde un punto de vista personal (una persona que enfrenta una situación problemática, el estudiante) (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007).

La enseñanza vista en esta estructura ontosemiótica, se basa en la participación del estudiantado en la comunidad de prácticas que comparten su significado institucional y el aprendizaje sería visto como la apropiación de este significado (Godino et al., 2007).

Si los sistemas de prácticas se comparten dentro de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, sí estos sistemas son específicos de una persona, se consideran objetos personales (Godino y Batanero, 1994).

Además de la dualidad institucional-personal mencionada anteriormente, en el EOS se reconocen otras dualidades (Godino et al., 2007), de las cuales también es relevante para nuestro estudio, es decir, la dualidad expresión-contenido, que permite confrontar los significados de los objetos que intervienen en funciones semióticas (entendidas como correspondencias establecidas por una persona o institución entre un antecedente, expresión y un contenido consecuente) con los significados institucionales de referencia.

Estas coincidencias pueden ocurrir según Godino et al. (2007) de muchas formas: 1) representacional en que un objeto se coloca en lugar de otro para un propósito determinado; 2) instrumental en que un objeto usa a otro como instrumento; 3) estructural en que dos o más objetos forman un sistema del cual emergen más objetos.

En este proceso de comparación, la verificación de las discrepancias entre estos significados, institucionales y personales conduce a la identificación de conflictos semióticos. (Godino y Batanero, 1994).

Este estudio se centra en las facetas epistémicas y cognitivas, que son las facetas clave de la formación del profesorado desde la perspectiva del EOS

(Godino, 2009), en las que se postula un punto de vista antropológico y semiótico para ellos, en el que la actividad humana adquiere significado a partir de las acciones de las personas para solucionar los problemas a los que se enfrentan.

Para Godino (2009), el factor epistémico se refiere al conocimiento matemático del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de estudio, es decir, la escuela, los docentes y los libros de texto en la consideración de diferentes componentes (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos) y el cognitivo se refiere al conocimiento personal de los estudiantes, es decir, la progresión de su aprendizaje. Estos componentes de contenido, según EOS, se denominan objetos principales. (Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

RESULTADOS

En la Figura 2 se señalan dos estrategias (E1 y E2), identificando los posibles caminos que deben seguir los estudiantes para resolver el problema a partir del estudio de Fernandes, Serrano y Correia (2016).

Figura 2

Posibles estrategias para resolver el problema propuesto

E1 - Reconocer los posibles eventos que ocurren, identificar y enumerar los eventos favorables, asignarles los valores correctos y realizar los cálculos a partir de la suma de las probabilidades conjuntivas favorables al solicitado. E2 - Reconocer los posibles eventos que ocurrirán, identificar y enumerar los eventos favorables, asignarles los valores correctos y realizar los cálculos teniendo en cuenta la definición de complemento para restar del Universo las probabilidades conjuntivas que representan los casos desfavorables.

El análisis de las respuestas permitió clasificar cada respuesta en uno de los siguientes cuatro niveles ordinales:

(1) Sin respuesta (SR): Esta categoría se refiere a la falta de respuesta.

(2) Respuesta incorrecta (I): No se utilizan técnicas adecuadas para resolver el problema.

(3) Respuesta parcialmente correcta (PC): Carecen de un entorno tecnológico explícito o presentan algunos aspectos inadecuados para llegar a la respuesta.

(4) Respuesta correcta (C): mostrar el uso de una técnica adecuada para resolver el problema, y en la que el entorno teórico y tecnológico que justifica la forma de solución sea explícito.

La Tabla 1 muestra la frecuencia de las respuestas de los participantes de la investigación en cada uno de los siguientes niveles ordinales, es decir, sin respuesta (SR); respuesta incorrecta (I); respuesta parcialmente correcta (PC); y la respuesta correcta (C).

Tabla 1

Frecuencia de respuestas del estudiantado al problema

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
Correcta (C)	15	20.27
Parcialmente Correcta (PC)	3	4.05
Incorrecta (I)	53	71.63
Sin Respuesta (SR)	3	4.05

A través de los datos presentados en la Tabla 1, se puede identificar que solo 15 estudiantes (20.27%) respondieron adecuadamente al problema y siguiendo el presentado en la Figura 3, es decir, es la forma más sencilla de resolver el problema.

Figura 3

Posible solución al problema propuesto a partir de E1

Vislumbrar Wandering Albatross = AWA y Vislumbrar Southern Royal Albatross = ASRA
$P(AWA) = 0{,}2857$ y $P(ASRA) = 0{,}1429$

$$\begin{aligned} &P(AWA \cap AWA \cap ASRA) + P(AWA \cap ASRA \cap AWA) \\ &\quad + P(ASRA \cap AWA \cap AWA) + P(AWA \cap AWA \cap AWA) \\ &\quad = (0.2857 \times 0.2857 \times 0.1429) + (0.2857 \times 0.1429 \times 0.2857) \\ &\quad + (0.1429 \times 0.2857 \times 0.2857) + (0.2857 \times 0.2857 \times 0.2857) \\ &\quad = 0.01166 + 0.01166 + 0.01166 + 0.02332 = 0.0583 = 5.83\% \end{aligned}$$

Es de destacar que el desarrollo algebraico presentado es solo una forma de expresar y desarrollar el problema, ya que existen otros elementos que pueden componer el lenguaje, como señalan Blanco et al. (2007) como, por ejemplo, la representación de imágenes que, en este caso, puede ser la representación visual del problema.

También se observa que 53 estudiantes (71.63%) presentaron la solución de manera incorrecta y otros 3 estudiantes (4.05%) presentaron algún tipo de error conceptual, error de notación o cálculo.

Abordando inicialmente las respuestas de los estudiantes que consideramos incorrectas (I), la Tabla 2 muestra la frecuencia de errores identificados y asociados a las estrategias E1 y E2, presentados en la Figura 2 de este trabajo, a través de los cuales realizaremos el análisis usando EOS.

Tabla 2

Tipo de estrategia (E1 o E2) utilizada por el estudiantado asociado con la categoría de respuesta incorrecta (I).

Tipo de error por estrategia	Número de estudiantes	Porcentaje (%)
E1	37	69.82
E2	7	13.20
No identificable	9	16.98
Total	53	100.00

De la lectura de la Tabla 2 se puede identificar que la solución presentada por nueve estudiantes (16,98%) no pudo asociarse con ninguna de las dos estrategias definidas en este trabajo, lo que indica deficiencias de los estudiantes en el desarrollo del problema y consecuente deficiencia en el dominio de conceptos.

Tomamos el estudio de Kelly y Zwiers (1986) para justificar por qué este grupo de estudiantes tiene dificultades para resolver el problema, es decir, distinguir entre eventos independientes y dependientes. El problema identificado surge del desconocimiento del concepto de eventos mutuamente excluyentes, es decir, de no darse cuenta, en un problema de realidad, de qué son eventos independientes o dependientes.

Por ejemplo, si tiramos un par de dados, el resultado que tiene lugar en un dado no influye en el resultado que tiene lugar en el otro dado. En otros casos, a menudo se necesita el conocimiento de un área específica para hacer un juicio informado, independientemente de si los eventos específicos son independientes o no.

Otro punto observado en los análisis es el hecho de que, en el mundo real, no siempre está claro si dos eventos son mutuamente excluyentes. Por ejemplo, no todos los estudiantes saben que "Clark Kent" y "Superman" no son mutuamente excluyentes, ya que son la misma persona. Por tanto, sería útil sacar ejemplos de la naturaleza, donde la distinción entre contradictorio, contrario, mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes no siempre es clara (Kelly y Zwiers, 1986).

Además, se encontró que la estrategia más utilizada por el estudiantado fue la E1, Tabla 2. Sin embargo, se verifica que, entre los que optaron por resolver el problema a través de esta estrategia, el 69.82% cometió algún tipo de error.

En el caso de la utilización de la E1 el estudiantado debería haber asociado los siguientes conceptos basados en Meyer (1982): La regla de multiplicación suponiendo que un procedimiento, designado por *a*, se puede realizar de n_1 maneras y que un segundo procedimiento, designado por *b*, se puede realizar de n_2 maneras. Además, cada forma de ejecutar *a* puede ser seguida por cualquiera de los que realizan *b*. Luego, el procedimiento formado por *a* seguido por *b* puede realizarse desde $n_1.n_2$ maneras.

Entonces, deberían haber considerado que la regla de multiplicación se puede extender a cualquier número de procedimientos, es decir, si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede realizar de ninguna manera, i = 1, 2, ..., k, entonces el procedimiento formado por 1, seguido por 2, ..., seguido por el procedimiento k, se puede realizar de n_1 x n_2 x ... x n_k formas (Meyer, 1982).

En el caso de la solución presentada en la E1, consideramos "P (AWA ∩ AWA ∩ ASRA)", donde tendríamos tres eventos diferentes indicados por AWA y AWA y ASRA.

Aún deberían haber considerado la regla de la suma, suponiendo que un evento, designado, por ejemplo, por *a*, se puede realizar de n_1 maneras y que un segundo procedimiento, designado por *b*, se puede realizar de n_2 maneras. Además, suponga que no es posible que ambos eventos *a* y *b* se realicen juntos. Entonces, la cantidad de formas en que podemos hacer *a* o *b* es $n_1 + n_2$.

Se considera, en secuencia, que la regla de adición se puede generalizar de la siguiente manera: si hay k procedimientos y se puede realizar el i-ésimo procedimiento de n_i maneras (i = 1, 2, ..., k), entonces la cantidad de formas en que podemos realizar el evento *a*, o el evento *b*, o ..., o el evento k, está dado por $n_1 + n_2 + ... + n_k$, suponiendo que dos de ellos no puedan realizarse juntos.

En el caso de la solución presentada en el E1, por ejemplo, “P (AWA ∩ AWA ∩ ASRA) + P(AWA ∩ AWA ∩ ASRA)”, tendríamos dos eventos diferentes indicados por P(AWA ∩ AWA ∩ ASRA) o P(AWA ∩ AWA ∩ ASRA).

Para la estrategia 2 (E2), Figura 4, el estudiantado debería haber asociado, además de los conceptos expresados en el E1, los siguientes conceptos que también se basan en Meyer (1982).

Deberían haber comenzado a partir de la idea de que dos eventos, A y B, se denominan mutuamente excluyentes, si no pueden ocurrir juntos, es decir, que la intersección de A y B es el conjunto vacío ($A \cap B = \emptyset$). Además, considere que los mismos dos eventos A y B se excluyen colectivamente si la unión entre ellos es el espacio muestral mismo, es decir, $A \cup B = S$.

En consecuencia, dado cualquier evento A, entonces su complementario $\bar{A}$ será el evento que ocurrirá si, y solo si, no ocurre A. Lo que inferimos de esto es que, considerando dos eventos A e $\bar{A}$, entonces $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (mutuamente excluyentes) y $A \cup \bar{A} = S$ (colectivamente excluyentes).

Figura 4

Posible solución al problema propuesto desde E2

Vislumbrar Wandering Albatross = AWA, Vislumbrar Southern Royal Albatross = ASRA y Vislumbrar otros tipos de Albatross = AOA $P(AWA) = 0.2857, P(ASRA) = 0.1429\ y\ P(AOA) = 1 - (0.1429 + 0.2857) = 0.5714$

$$
\begin{aligned}
1 - [&P(AWA \cap ASRA \cap ASRA) + P(ASRA \cap ASRA \cap AWA) \\
&+ P(ASRA \cap AWA \cap ASRA) + P(AWA \cap AWA \cap AOA) \\
&+ P(AWA \cap AOA \cap AWA) + P(AOA \cap AWA \cap AWA) \\
&+ P(ASRA \cap ASRA \cap AOA) + P(ASRA \cap AOA \cap ASRA) \\
&+ P(AOA \cap ASRA \cap ASRA) + P(AWA \cap AOA \cap AOA) \\
&+ P(AOA \cap AOA \cap AWA) + P(AOA \cap AWA \cap AOA) \\
&+ P(ASRA \cap AOA \cap AOA) + P(AOA \cap ASRA \cap AOA) \\
&+ P(AOA \cap AOA \cap ASRA) + P(ASRA + ASRA + ASRA) \\
&+ P(AOA \cap AOA \cap AOA) + P(AWA \cap ASRA \cap AOA) \\
&+ P(AWA \cap AOA \cap ASRA) + P(ASRA \cap AWA \cap AOA) \\
&+ P(ASRA \cap AOA \cap AWA) + P(AOA \cap AWA \cap ASRA) \\
&+ P(AOA \cap ASRA \cap AWA)] = 1 - 0.9417 = \ 0.0583 = 5.83\%
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si eligen usar la solución para eventos complementarios, tendrían que pensar en un tercer grupo (evento) para representar la composición del espacio muestral (S), es decir, "ver otros tipos de albatros - AOA" y determinar su probabilidad: P (AOA) = 1 - [P (AWA) + P (ASRA)] = 1 - [0.2885 + 0.1429] = 0.5714. Los eventos "AWA", "ASRA" y "AOA" serían mutuamente excluyentes y AWA ∪ ASRA ∪ AOA = S (espacio muestral).

Señalamos que todos los estudiantados que optaron por la estrategia 2 (E2) destacaron la identificación del evento AOA que generó P (AOA) = 0.5714. Incluso pensaron en la complementariedad entre los eventos, pero crearon probabilidades para los eventos AWA y ASRA, obligándolos a ser mutua y colectivamente excluyentes.

Tomando estas resoluciones como referencia, se analizaron las respuestas del estudiantado para identificar los errores. Se identificaron cuatro tipos de errores presentes en las resoluciones: 1) No identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema (NIE); 2) Identificar problemas en los cálculos (C) ; 3) Poca claridad en la solución del problema (PC); 4) Interpretación errónea del problema (IEP). La Tabla 3 presenta la ocurrencia de errores en las resoluciones presentes en cada estrategia.

Se puede observar en la Tabla 3 la ocurrencia de más de un tipo de error al resolver el problema (considerando las categorías creadas en este trabajo) observándose que en el 70.27% de las respuestas los estudiantes utilizaron la estrategia E1 y el 57.14% la estrategia E2. El error más común fue que no se enumeraron todos los eventos y, por lo tanto, la probabilidad solicitada por el ejercicio no se calculó correctamente.

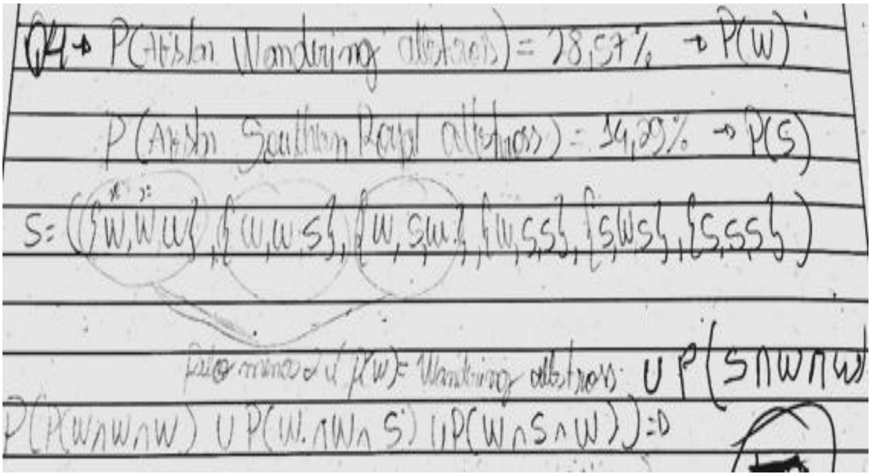
Tabla 3

La ocurrencia individual y conjunta de errores presentes en las respuestas al problema propuesto utilizando las estrategias E1 y E2

Ocurrencia de Errores	E1		E2	
	n	%	n	%
No identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema (NIE), Identificar problemas en los cálculos (C) y poca claridad en la solución del problema (PC)	11	29.72	2	28.57
No identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema (NIE) y Identificar problemas en los cálculos (C)	12	32.46	2	28.57
No identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema (NIE)	9	24.32	2	28.57
No identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema (NIE) y poca claridad en la solución del problema (PC)	1	2.70	-	0.00
No identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema (NIE) y interpretación errónea del problema (IEP)	1	2.70	-	0.00
Identificar problemas en los cálculos (C) y poca claridad en la solución del problema (PC)	1	2.70	-	0.00
Identificar problemas en los cálculos (C)	1	2.70	1	14.29
Poca claridad en la solución del problema (PC)	1	2.70	-	0.00

Figura 5

Error cometido por uno del estudiantado y clasificado como identificación de las probabilidades de la conjunción de eventos (IP)



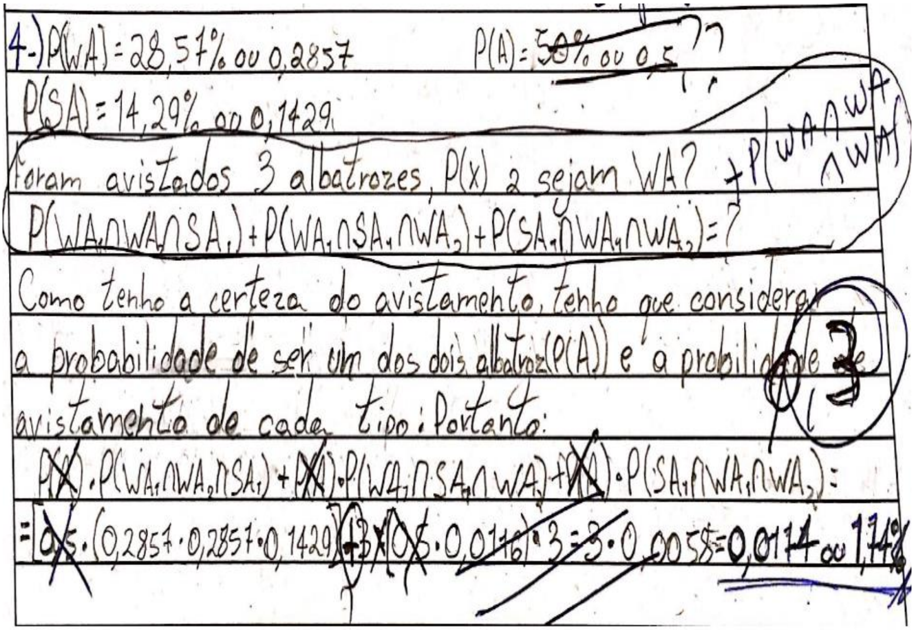
En ambas estrategias (E1 y E2), el error de tipo NIE predominó tanto de manera conjunta (con otros errores) como individualmente. La figura 5 representa una respuesta habitual al error de tipo NIE de uno de los estudiantes.

El problema propuesto consideró el evento E = {avistamiento de tres albatros entre los albatros *Wandering* - W y *Southern Royal* - S} y solicitó que se determinara la probabilidad de que al menos dos albatros sean *Wandering*.

En el caso de la figura 5, consideramos que los errores conceptuales llevaron al estudiante a no alcanzar la solución propuesta, es decir: (1) el espacio muestral era incorrecto, ya que no se consideró que la suma de las probabilidades de los eventos que lo formaron fuera diferente del 100%; (2) no hay opciones en la descripción de todos los elementos contenidos en el espacio muestral y, en consecuencia, el evento solicitado, es decir, (S, W, W); (3) debido a la falta del evento (S, W, W), se subestimó la probabilidad del evento propuesto.

Figura 6

La respuesta de un alumno con error de cálculo (C) e identificación de probabilidades (IP)


4-) P(WA) = 28,57% ou 0,2857 P(A): ~~50% ou 0,5~~ ??
P(SA) = 14,29% ou 0,1429
Foram avistados 3 albatrozes, P(x) 2 sejam WA? + P(WA ∩ WA ∩ WA)
P(WA₁ ∩ WA₂ ∩ SA₁) + P(WA₁ ∩ SA₁ ∩ WA₂) + P(SA₁ ∩ WA₁ ∩ WA₂) = ?
Como tenho a certeza do avistamento, tenho que considerar a probabilidade de ser um dos dois albatroz (P(A)) e a probabilidade de avistamento de cada tipo: Portanto:
~~P(A)~~ · P(WA₁ ∩ WA₂ ∩ SA₁) + ~~P(A)~~ · P(WA₁ ∩ SA₁ ∩ WA₂) + ~~P(A)~~ · P(SA₁ ∩ WA₁ ∩ WA₂) =
= ~~0,5~~ · (0,2857 · 0,2857 · 0,1429) · 3 = ~~0,5 · 0,0116 · 3 = 3 · 0,0058~~ = 0,0174 ou 1,74%

Los errores referidos al cálculo (C) presentaron tres factores principales: 1) realizar operaciones de manera incorrecta; 2) transcripción errónea de datos; 3) transformación de un número decimal en un porcentaje de la manera incorrecta.

Se encontró que los errores de cálculo ocurrieron, principalmente, al no identificar todos los eventos que deberían constituir la solución al problema, ejemplo en la Figura 6.

El problema presentado en la figura 6 es similar al error indicado en la figura 4, es decir, la falta de uno de los elementos del evento solicitado, en este caso, el evento (WA, WA, WA).

Además, se presentó una probabilidad indicada por P (A) = 0.5 sin justificación basada en la teoría de probabilidad. Se consideró que debido a que se detectaron dos albatros, cada uno de ellos tendría la misma posibilidad de ser seleccionado, que es el enfoque clásico de probabilidad y que en este contexto no encajaría.

Además, al calcular, se intercambia la operación de multiplicación por suma y suma por multiplicación. También identificamos el uso del valor "0.0116”, que es un valor truncado de la multiplicación de" 0.2885 * 0.2857 * 0.1429 ", lo que resulta en una reducción del tamaño del producto y de la probabilidad.

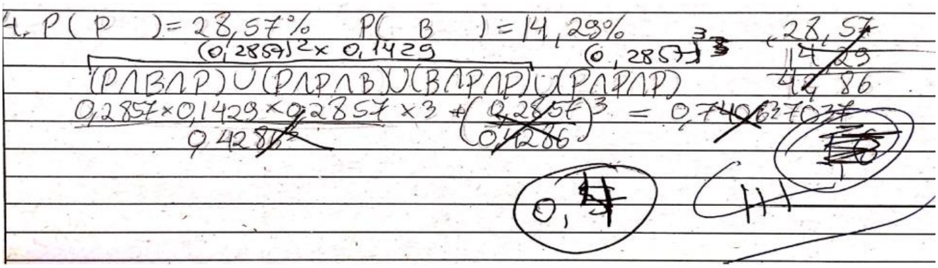
Con respecto al tipo de error, poca claridad en la solución del problema (PC), se refiere a las respuestas poco claras cuando se presenta la notación incorrecta con respecto a la teoría de la probabilidad. En la figura 7 presentamos un ejemplo de una solución que trae el tipo de error de poca claridad en la solución del problema (PC) y no identificar todos los eventos que deberían constituir tu solución (NIE).

La figura 7 muestra la siguiente representación: $(P\cap B\cap P)\cup(P\cap P\cap B)\cup(B\cap P\cap P)\cup(P\cap P\cap P)$ que debería haberse presentado como: $P(P\cap B\cap P)\cup P(P\cap P\cap B)\cup P(B\cap P\cap P)\cup P(P\cap P\cap P)$.

La indicación no influiría en el cálculo, sin embargo, demuestra la falta de preocupación por expresar correctamente en términos notacionales y conceptuales haciéndonos pensar si fue sin querer la indicación incorrecta o la falta de comprensión de la representación correcta.

Figura 7

La respuesta de un estudiante que contiene los errores: poca claridad (P) e identificación de probabilidades (IP)



Además, se generó la probabilidad de ver cada uno de los dos tipos de albatros, generando la probabilidad (0.2885 + 0.1429 = 0.4286). Luego, cada una de las partes de la representación de los elementos del evento se dividió entre esa cantidad y aún aumentó al exponente tres.

En los errores de tipo NIE, identificamos que es difícil para el estudiantado representar el lenguaje simbólico (notaciones). Los errores de tipo C, de manera similar, presentaron un conflicto que impregna el uso del lenguaje simbólico, ya que estos se equivocaron en la manipulación de símbolos matemáticos para el desarrollo de la resolución de problemas.

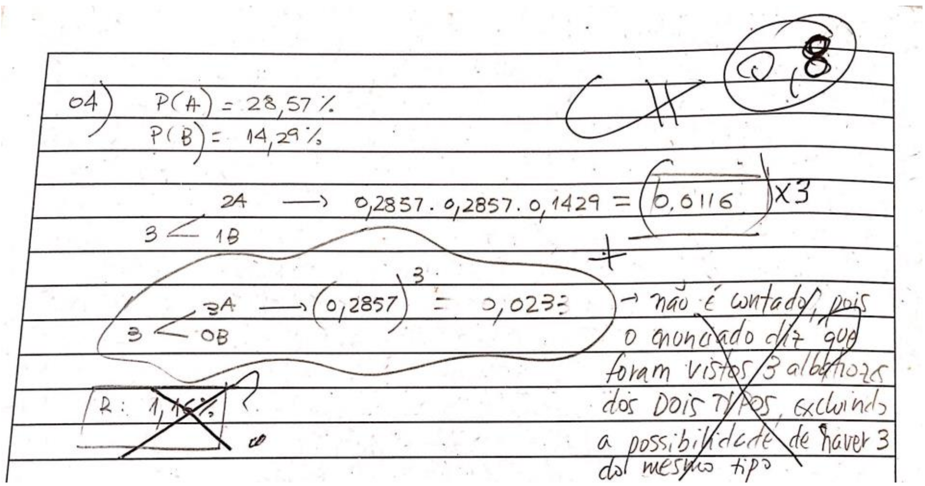
Otro conflicto semiótico observado fue la falta de comprensión encontrada en la interpretación del enunciado del problema (IEP) y el uso inapropiado del lenguaje ordinario (términos y expresiones) para la composición del argumento indicado por la falta de claridad en la presentación de los argumentos para resolver el problema (PC)

El error menos recurrente en ambas estrategias (E1 e E2) fue la interpretación errónea del problema (IEP), es decir, la adopción de la premisa errónea de lo que indicaba el problema.

En la Figura 8 se puede ver la respuesta de un alumno que se refiere a la posibilidad de detectar los albatros, en función de su justificación sobre una falsa premisa: " no contados, ya que el planteamiento del problema dice que se vieron 3 albatros de ambos tipos, excluyendo la posibilidad de que haya 3 del mismo tipo".

Figura 8

La respuesta de un estudiante que contiene los errores: poca claridad (P) e interpretación errónea del problema (IEP)



Este tipo de error tiene la consecuencia inmediata de identificar los eventos de manera incorrecta (IEP), dado que, al establecer esta justificación, uno de los posibles eventos se elimina del espacio muestral, es decir, $(A \cap A \cap A)$. Es interesante notar en la solución que el alumno indicó la probabilidad $P (A \cap A \cap A) = (0.2857) * 3 = 0.0233$ y no la utilizó.

Además, solo consideró una de las posibilidades de los posibles eventos donde habría dos albatros de tipo A y un albatros de tipo B. Consideró el evento $(A \cap A \cap B)$ y no consideró los eventos $(A \cap B \cap A)$ y $(B \cap A \cap A)$. Tal desprecio de los eventos resultó en una composición incorrecta de las probabilidades de la conjunción del evento de interés.

Se encontró, por lo tanto, que los conflictos semióticos penetraban un objeto primario (lenguaje) directamente, y un objeto primario (argumento) indirectamente. Los componentes constitutivos del lenguaje que fueron significativos para la discusión fueron el lenguaje ordinario, gráfico y simbólico.

Kahneman y Tversky (1979) demuestran que las personas con poco o ningún conocimiento de estadística estiman la probabilidad de eventos por medio de ciertos juicios heurísticos, como la representatividad y la disponibilidad. De acuerdo con la heurística de la representatividad, las personas estiman las probabilidades de los eventos con base en lo bien que un resultado representa cierto aspecto de su población original.

Para D´Amelio (2013) el estudiantado tiene el estatus teórico de las premisas pero no se separan del estatus del contenido. Al realizar cálculos en la situación propuesta sólo aplican definiciones y le asignan la propiedad de independencia a sucesos mutuamente excluyentes es decir utilizan premisas no pertinentes.

Finalmente, tomamos D´Amelio (2013) cuando dice que el problema didáctico principal consiste entonces en alejar la atención de los alumnos del contenido y centrarla en la forma. Pero como en realidad no se pueden separar el contenido semántico y la forma en el registro de la lengua natural, sería necesario entonces neutralizar el contenido semántico proponiendo razonar con proposiciones absurdas: es necesario conducir al alumno a que disocie en un razonamiento la forma lógica y el contenido semántico.

CONCLUSIONES

La metodología de investigación en este artículo nos permitió analizar las producciones quien llevó a cabo el estudiantado enfrentado a un problema de probabilidad. En esta investigación el objeto estudiado se refiere a los eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. La situación problema enfrenta el estudiante a una demostración en la que se solicita su resolución.

El error más frecuente cuando se decidió resolver el problema usando la estrategia 1 (E1) se relacionó con la no identificación de todos los eventos que deberían constituir la solución al problema, donde no se enumeraron todos los elementos del evento y, por lo tanto, la probabilidad solicitada por el problema no se calculó correctamente.

Con respecto a el estudiantado que optaron por resolver el problema considerando la estrategia 2 (E2), se consideraron la complementariedad entre los eventos pero crearon erróneamente probabilidades para los eventos de AWA y ASRA obligándolos a excluirse mutuamente.

Por lo tanto, aunque el estudiantado entiende en qué contextos usar el concepto de eventos complementarios, se equivocaron al ajustar las probabilidades de los eventos presentados en el problema y que no fueron colectivamente exhaustivos, es decir, que la suma de sus probabilidades es la probabilidad del espacio muestral.

Así, después de realizar el análisis de datos (resolviendo los problemas presentados por el estudiantado), nosotros juzgamos que las herramientas de análisis EOS (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2016) se caracterizan como una posibilidad para analizar el proceso de aprendizaje de elementos fundamentales de la teoría de la probabilidad, permitiendo resaltar la pertinencia y relevancia de las acciones llevadas a cabo por estos, así como el conocimiento presentado, permitiendo con el análisis de las respuestas mostrar la aproximación o distancia entre los significados personales alcanzados y los significados institucionales previstos, que es la apropiación de los conceptos básicos de probabilidad y una formación para la ciudadanía.

Con este estudio, nos damos cuenta de que la población de estudiantes universitarios que participan en esta investigación y que estudian Probabilidad en actividades en las que intervienen conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes, presentan ideas espontáneamente erróneas, confunden a ambos y los asocian incorrectamente. Estos conceptos parecen ser simples o aparentemente simples en su definición, pero sin embargo después de evaluar las soluciones indicadas por ellos, reconocemos que tienen deficiencias en relación con los conceptos.

Además, la investigación del desempeño de este estudiantado en las tareas de cálculo de probabilidad nos advierte de dificultades y sesgos que generalmente provienen de la comprensión de las condiciones que rigen la experiencia y el conjunto de posibles resultados relacionados con ella.

A partir de los estudios realizados por Sánchez (2000), D'Amelio (2004), Guzmán e Inzunsa (2011), D'Amelio (2013) y Fernandes, Serrano y Correia (2016) con estudiantes argentinos, mexicanos y portugueses, consideramos que este estudio con estudiantes brasileños es similar a los resultados obtenidos en otros países en que ha demostrado las dificultades y confusión de conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes. Se debe considerar que una posible causa de tal confusión es la falta de una base teórica adecuada para abordar estos temas, y se debe considerar una planificación adecuada que se ajuste a los objetivos de los cursos introductorios a la probabilidad.

Por lo tanto, se sugiere que estos conceptos se vuelvan a trabajar en el aula utilizando diferentes herramientas didácticas como, por ejemplo, la creación de entornos virtuales de aprendizaje basados en procesos de investigación y situaciones reales. Y luego evalúe nuevamente si los conceptos se aprendieron que contribuyen a mejorar el aprendizaje de los diversos conceptos introductorios de probabilidad y ampliar el análisis que aquí también se lleva a cabo para la lectura e interpretación de situaciones problemáticas en las que el alumnado puede apropiarse con mayor profundidad de los conceptos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo a los proyectos PPAI 77200008, ANID/PAI 77200008, PGC2018-098603-B-I00 (MINECO/FEDER, EU), PID2021-127104NB-I00 (MINECO/FEDER, EU) y.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA

APOJ concibió las ideas para las tareas presentadas. APOJ y DFBN desarrollaron la teoría, adaptaron la metodología a este contexto, realizaron las actividades y recopilaron los datos. APOJ y DFBN analizaron los datos en la primera ronda. Todos los autores participaron activamente en la discusión de las siguientes rondas de análisis y resultados, revisaron, mejoraron la discusión teórica incluida y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente APOJ, previa solicitud razonable por correo electrónico.

REFERENCIAS

Ara, Amilton Braio. (2006). *O ensino de estatística e a busca de equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade*. Tese de Doutorado em Educação - Faculdade de Educação da USP, São Paulo, Brasil.

Barragues Fuentes, José Ignacio y Guisasola Aranzabal, Jenaro. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. *Educación matemática*, *21*(3), 127-162.

Batanero, Carmen, Navarro-Pelayo, Virginia, y Godino, Juan Díaz. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in Secondary School pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199.

Batanero, Carmen, y Godino, Juan Díaz. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*: Proyecto Edumat maestros. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Batanero, Carmen. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, *15*, 2-13.

Batanero, Carmen. (2016). Understanding randomness: challenges for research and teaching. In: Krainer. K.; Vondrová. N. (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 34-49).* CERME 9. ERME.

Blanco, Teresa Fernández, Godino, Juan Díaz, y Pegito, José Antonio Cajaraville. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización

Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. *Bolema*, *26*(42), 39-63.

Borovcnik, Manfred y Peard, Robert. Probability. In: Bishop. A., Clements. M. A. K., Keitel-Kreidt, C.; Kilpatrick. J., y Laborde, C. (1996). (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. (p. 239-287). Kluwer.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Chernoff, Egan. (2009). Sample space partitions: an investigative lens. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 19–29.

Cordani, Lisbeth. K. y Wechsler, Sergio. (2006). Teaching independence and exchangeability. In A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador (Brazil). International Association for Statistics Education.

Coutinho, Cileda de Queiroz e Silva. (2001). *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège*: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabrigéomètre II. Tese de Doutorado em Didática da Matemática, Univ. J. Fourier, Grenoble, France.

D´Amelio, Adriana. G. (2013). La utilización del razonamiento deductivo en eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. In: A. Salcedo. (Ed.). *Educación Estadística en América Latina*: Tendencias y Perspectivas (pp. 57-79). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

D'Amelio, Adriana Tari, y Diblasi, Angela. (2006). Analysis of didactic suggested distinguishing disjunctive events and independent events. In A. Rossman e B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador (Brazil). Intern. Ass. for Stat. Education.

D'Amelio, Adriana Tari. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. In: Leonora Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*, 137-142.

Diaz, Carmen y Batanero, Carmen. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal Mathematics Education*, *4*, 131-162.

Fernandes. José António, Serrano, María Magdalena Gea, y Correia, Paulo Ferreira. (2016). Definição de acontecimentos certos na extração de berlindes de um saco. *Acta Scientiae*, *18*(1), 83-100.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.

Godino, Juan Díaz y Batanero, Carmen. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, Juan Díaz, Batanero, Carmen, y Font, Vicent. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, Juan Díaz, Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., y Contreras. A. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 91-110.

Godino, Juan Díaz. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Guzmán, Martha Catalina Reyes, y Inzunsa, Santiago Cazares. (2011). Un estudio sobre la comprensión y dificultades de profesores de secundaria acerca de la probabilidad. *Anais da 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Universidade Federal de Pernambuco.

Jolliffe, Flavia. (2005). Assessing Probabilistic Thinking and Reasoning. In: G. A. Jones. *Exploring Probability in School* (pp. 325-364). Springer.

Kac, Marc. (1964). Statistical independence in probability. analysis and number. 2nd ed. Quinn e Boden.

Kahneman, Daniel, y Tversky, Amos. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decisions Under Risk. *Econométrica*, *47*, 313-327.

Kataoka, Verônica Yumi, Rodrigues, Adriano, y Oliveira. Marcelo Silva de. (2007). Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como recurso didático no ensino de Estatística. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, Brasil.

Kataoka, Verônica Yumi, Trevethan, Hugo Mael Hernandez, y Silva, Claudia Borin. (2010). Independence of events: an analysis of knowledge level in different groups of students. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*. July 2010, Ljubljana. Slovenia. International Statistical Institute.

Kelly, Ivan, y Zwiers, F. W.(1986). Mutually exclusive and independence: unravelling basic misconceptions in probability theory. In: *Proceedings of ICOTS 2*, Victoria, Canada. https://iase-web.org/documents/papers/icots2/Kelly.Zwiers.pdf?1402524935

Lopes, Celi Espasandin. (2003). *O Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil*. Tese de Doutorado em Educação - Universidade Estadual de Campinas. Campinas. Brasil.

Lopes, Celi Espasandin. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Caderno Cedes*, *28*(74), 57-73.

Makar, Katie, Bakker, Arthur, y Ben-Zvi. Dani (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 152-173.

Meyer, Paul L. (1982). *Probabilidade Aplicações à Estatística*. 2. ed. LTC.

Nabbout, Marie, y Maury, Sylvette. (2005). Teacher’s representations of independent events: what might an attempt to make sense. In: *4° Cerme*..

Pino-Fan, Luis Roberto, Godino, Juan Díaz, y Font, Vicenç. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Sánchez, Ernesto. (2000). Investigaciones Didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. *Recherches en Didactique des Mathématics*, *20*(3), 305-330.

Steinbring, H. (1986). L’indépendance stochastique: un exemple de renversement du contenu intuitif d’un concept et de sa définition mathématique formelle. *Recherches en Didactiques des mathématiques*, *7*(3), 5-50.