ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6911

Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas

Gerardo Cruz-Márquez[a]
Gisela Montiel-Espinosa[a]

[a] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), Departamento de Matemática Educativa, Ciudad de México, México.

Recibido para publicación 21 nov. 2021. Aceptado tras revisión 27 mayo 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Entre los múltiples fenómenos reportados alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, se encuentra el uso exclusivo como herramientas técnicas que reciben las razones trigonométricas. Este uso permite y promueve la construcción de significados limitados y la disociación de la trigonometría escolar de las nociones y procedimientos geométricos. **Objetivo:** Ante esta problemática, realizamos un estudio de la construcción germinal de las nociones trigonométricas, en un escenario histórico, con el objetivo de identificar usos del conocimiento matemático que sean útiles para enriquecer los que habitan en la escuela y sus significados asociados. **Diseño:** Llevamos a cabo este estudio desde la teoría socioepistemológica y a través de una configuración particular del análisis de contenido. **Entorno y participantes:** Al ser un estudio de corte documental no contamos con participantes *stricto sensu*. **Recopilación y análisis de datos:** El estudio histórico se centró en los preliminares matemáticos del *Almagesto* de Ptolomeo, obra que la literatura señala como la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría. **Resultados:** Dentro de los resultados destacamos a la medición indirecta de distancias como el uso que permitió la construcción inicial de las nociones trigonométricas y a la sinergia de tres usos del conocimiento geométrico –que denominamos trabajo geométrico– como fundamental para este proceso. **Conclusiones:** Concluimos subrayando la importancia de crear situaciones didácticas concretas que exploren el funcionamiento de estos resultados en entornos de enseñanza y la necesidad de estudios históricos alrededor de otros puntos de la construcción de las nociones trigonométricas.

Palabras clave: significado lineal y aritmético; significado trigonométrico; uso del conocimiento; estudio histórico-epistemológico; trabajo geométrico.

Autor de correspondencia: Gerardo Josué Cruz Márquez. Email: gerardo.cruz@cinvestav.mx

Medição Indireta de Distância e Trabalho Geométrico na Construção de Noções Trigonométricas

RESUMO

Contexto: Entre os múltiplos fenómenos relatados em torno do ensino e aprendizagem da trigonometria está o uso exclusivo como ferramentas técnicas que os rácios trigonométricos recebem. Esta utilização permite e promove a construção de significados limitados e a dissociação da trigonometria escolar das noções e procedimentos geométricos. **Objetivo:** Face a este problema, realizámos um estudo da construção germinal das noções trigonométricas, num cenário histórico, com o objetivo de identificar utilizações dos conhecimentos matemáticos úteis para o enriquecimento daqueles que existem na escola e os seus significados associados. **Design:** Realizámos este estudo a partir da teoria sócio-epistemológica e através de uma configuração particular de análise de conteúdos. **Ambiente e participantes:** Como se tratava de um estudo documental, não tínhamos participantes *stricto sensu*. **Coleta e análise de dados:** O estudo histórico centrou-se nas preliminares matemáticas do *Almagest* de Ptolomeu, uma obra que a literatura aponta como a mais antiga evidência do nascimento da trigonometria. **Resultados:** Dentro dos resultados destacamos a medição indireta de distâncias como a utilização que permitiu a construção inicial de noções trigonométricas e a sinergia de três utilizações do conhecimento geométrico –a que chamamos trabalho geométrico– como fundamentais para este processo. **Conclusões:** Concluímos salientando a importância da criação de situações didáticas concretas que explorem o funcionamento destes resultados em ambientes de ensino e a necessidade de estudos históricos em torno de outros pontos na construção de noções trigonométricas.

Palavras-chave: significado linear e aritmético; significado trigonométrico; uso do conhecimento; estudo histórico-epistemológico; trabalho geométrico.

Indirect Distance Measurement and Geometric Work in the Construction of Trigonometric Notions

ABSTRACT

Background: Among the multiple phenomena reported around the teaching and learning of trigonometry is the exclusive use as technical tools that trigonometric ratios receive. This use allows and promotes the construction of limited meanings and the dissociation of school trigonometry from geometric notions and procedures. **Objective:** In view of this problem, we carried out a study of the germinal construction of trigonometric notions, in a historical setting, with the aim of identifying uses of mathematical knowledge that are worthwhile to enrich those that inhabit the school and its associated meanings. **Design:** We conducted this study from socio-epistemological theory and through a particular configuration of content analysis. **Setting and participants:** Being a documentary cut study we did not have participants *stricto sensu*.

Data collection and analysis: The historical study focused on the mathematical preliminaries of Ptolemy's *Almagest*, a work that the literature points out as the oldest evidence of the birth of trigonometry. **Results:** Among the results we highlight the indirect measurement of distances as the use that allowed the initial construction of trigonometric notions and the synergy of three uses of geometric knowledge –which we call geometric work– as fundamental to this process. **Conclusions:** We conclude by stressing the importance of creating concrete didactic situations that explore the operation of these results in teaching environments and the need for historical studies around other points in the construction of trigonometric notions.

Keywords: linear and arithmetic meaning; trigonometric meaning; use of knowledge; historical-epistemological study; geometric work.

INTRODUCCIÓN

A mediados de la educación secundaria –alrededor de los 15 años–, los estudiantes comienzan el estudio de un conjunto de nociones matemáticas distintas. Unos entes con apariencia extraña, que no responden a las reglas numérico-algebraicas construidas a lo largo de sus ocho o nueve años de trayectoria académica: las nociones trigonométricas –razón, función y serie– (Weber, 2008).

Ante este panorama, no sorprende la cantidad de fenómenos reportados alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de dichas nociones. Dentro de ellos: la indiscutida introducción del círculo unitario (v. g. Brito y Barbosa, 2004) y del paso del grado al radián como unidad de medida del ángulo (v. g. Díaz, Salgado y Díaz, 2010), la no identificación del ángulo como argumento (v. g. Thompson, 2008), la indistinción de las nociones trigonométricas –razón, función y serie– (v. g. Montiel y Buendía, 2013) y su *uso exclusivo como herramientas técnicas* para el cálculo de un valor faltante.

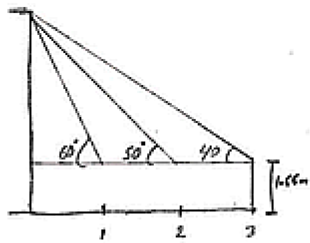
Con relación a este último fenómeno –en el que se centra este estudio–, Maldonado (2005) menciona que "se definen razones trigonométricas […] únicamente para utilizarlas como medios de solución" (p. 15). De forma similar, pero respecto a la función trigonométrica, la autora considera que "ésta sólo es utilizada sin necesidad de ser comprendida" (p. 68). Afirmaciones que comparten los estudios de Weber (2005), Araya, Monge y Morales (2007), y Mesa y Herbst (2011).

Al respecto, Montiel y Jácome (2014) concluyen que este uso exclusivo limita la actividad matemática a dividir los lados del triángulo rectángulo y disocia la trigonometría escolar de las nociones y procedimientos geométricos, al mismo tiempo que permite la construcción de un significado lineal y promueve un significado aritmético para las nociones trigonométricas.

El *significado lineal* refiere a la concepción y tratamiento lineal que la trigonometría escolar admite para la relación ángulo-longitud en el triángulo, producto de no analizar explícitamente la naturaleza de dicha relación. Por ejemplo, en el estudio aludido –Montiel y Jácome (2014)–, al construir un modelo a escala de una situación-problema de medición de distancias inaccesibles, más de la mitad de los profesores participantes presentan bosquejos en los cuales coexisten decrementos constantes del ángulo de elevación con crecimientos constantes del lado adyacente al mismo (Figura 1).

Figura 1

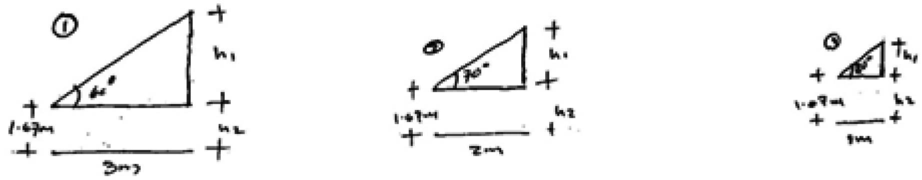
Modelo propuesto que refleja una relación lineal entre el ángulo de elevación y el lado adyacente al mismo. (Adaptada de Montiel y Jácome (2014))



El *significado aritmético*, por su parte, hace alusión a la concepción de las nociones trigonométricas –en particular la razón– como 'solo' un proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, producto de la centración que la trigonometría escolar tiene sobre el dominio aritmético de dichas nociones. Así, en el estudio referido –Montiel y Jácome (2014)–, pese a la explicita solicitud de construir un modelo a escala de la situación-problema, ninguna de las representaciones fabricadas por los participantes del estudio constituye un modelo geométrico a escala *stricto sensu* (Figura 2), en tanto no guardan proporción con la realidad, sino que fungen únicamente como una ilustración de donde tomar los datos a sustituir en la 'fórmula trigonométrica' que resuelve el problema.

Figura 2

Bosquejo propuesto donde h1 –la altura a calcular– cambia ‘proporcionalmente’ de una figura a otra. (Adaptada de Montiel y Jácome (2014))



La investigación previa en la disciplina advierte que, aunque el uso como herramienta técnica convierte a las nociones trigonométricas en instrumentos esenciales para muchos campos de aplicación y espacios escolares (Montiel, 2011), produce significados limitados y conflictivos respecto a las nociones trigonométricas; además no asegura una comprensión robusta de las mismas (Weber, 2005) ni el desarrollo de un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre estos (Montiel y Jácome, 2014).

En otras palabras, un estudiante/profesor puede lograr un desempeño matemático correcto ante las tareas típicamente escolares relativas a las razones trigonométricas y aún así desarrollar el significado lineal y aritmético asociado a estas, es decir, puede resolver ejercicios trigonométricos mas no desarrollar pensamiento trigonométrico. Además, en términos de transversalidad curricular, podríamos preguntarnos qué aporta este ‘correcto desempeño’ sobre las razones trigonométricas en la comprensión y tratamiento de la función trigonométrica, considerando que en esta última noción sí resulta fundamental el estudio de su naturaleza trascendente; ¿acaso no estamos, desde la propia matemática escolar, generando desarticulación entre ambas nociones –razón y función trigonométricas–, al dotarlos de significados de naturaleza distinta?

Ante esta problemática, nos planteamos un proyecto de investigación cuya hipótesis de partida es que al ampliar los usos de las nociones trigonométricas –más allá del uso como herramienta técnica– y aminorar la brecha existente entre la geometría y la trigonometría escolar, es posible confrontar y enriquecer los significados que la trigonometría escolar actual permite y promueve.

Atender esta hipótesis requiere, en primer lugar, responder al menos tres preguntas: 1) ¿qué otros usos de las nociones trigonométricas existen?, 2) ¿qué papel juegan las nociones y procedimientos geométricos en estos usos? y 3) ¿qué nociones y procedimientos geométricos están involucrados?

Un escenario factible para responder estas preguntas es el histórico, ya que, como menciona Gómez (2003), los estudios histórico-epistemológicos son útiles para tomar consciencia de que, para una misma noción matemática, ha habido diferentes acepciones; así como para establecer los elementos constitutivos de su significación, los diferentes sentidos que ha tenido y su adaptación a la resolución de distintas situaciones y problemas.

En este escrito damos cuenta de un estudio sobre la construcción germinal de las nociones trigonométricas, en un escenario histórico, orientado a responder las tres preguntas mencionadas, desde la perspectiva que ofrece la teoría socioepistemológica, y con el objetivo de dirigir nuestros resultados a contribuciones epistemológicas.

ASPECTOS TEÓRICOS-METODOLÓGICOS

La teoría socioepistemológica y la problematización del saber matemático

La teoría socioepistemológica –o socioepistemología–, teoría desarrollada dentro del paradigma sociocultural, parte de reconocer que la construcción y significación de las nociones y procedimientos matemáticos pende de su *uso situado* –cultural, histórica e institucionalmente– (Cantoral, 2013).

Para ello entiende el uso como las formas en que es empleada una noción matemática en un contexto específico, sean estas formas conscientes o inconscientes, implícitas –en el actuar de los individuos– o explícitas –a través de representaciones escolares o contextuales– (Cruz-Amaya, 2019; Cabañas-Sánchez y Cantoral, 2012; Rotaeche, 2012).

Esta postura sobre la construcción y significación de las nociones matemáticas implica, entre otras cosas, que el contexto determina el tipo de racionalidad con la cual un sujeto –individual, colectivo o histórico– construye conocimiento (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015); una visión contraria la visión formalista o tradicional de la racionalidad en la que “ser racional reside únicamente en pensar y actuar de acuerdo con reglas abstractas y universalmente aplicables, como las reglas lógicas, probabilísticas, matemáticas, etc." (Xiang, 2008, p. 103).

Con esto en mente, la socioepistemología propone un modelo para explicar teórica y empíricamente la construcción de una noción matemática específica mediante su uso situado, expresado a través de la coordinación de prácticas de diversa índole, al que denomina *modelo de anidación de prácticas*.

En los primeros tres niveles de dicho modelo –lectura ascendente– (Figura 3), útiles para explicar empíricamente la construcción de una noción matemática específica, se parte de las *acciones* directas del sujeto ante el medio; las cuales se organizan como *actividades* humanas situadas socioculturalmente; para perfilar una *práctica socialmente compartida*, en tanto iteración deliberada del sujeto y determinada por el contexto (Cantoral, 2013).

Figura 3

Modelo de anidación de prácticas. (Adaptada de Cantoral (2013))

La socioepistemología ha adoptado a la *problematización del saber* como una ruta de investigación para el estudio de las prácticas que acompañan la construcción de una noción matemática específica. Para dicha teoría, esta requiere de dos momentos: la historización y la dialectización.

La *historización del saber matemático* refiere al estudio e identificación de aquellos usos y significados que le son propios a la noción matemática en cuestión y que se han diluido, transformado o perdido en su introducción a la matemática escolar (Montiel y Buendía, 2012). Es necesario explicitar que este estudio no se limita al análisis del objeto matemático *per se*; sino que incluye –sin ignorar lo anterior– el análisis detallado de las circunstancias socioculturales que permitieron la construcción de la pieza de conocimiento en cuestión, "de la racionalidad contextualizada con la cual fue concebida en su tiempo y espacio" (Reyes-Gasperini, 2017, p. 54).

La *dialectización del saber matemático*, por su parte, alude a la confrontación de los usos y significados reconocidos en la historización con los que viven en la escuela, los ambientes técnicos-profesionales, la cotidianidad de las personas, entre otros espacios.

En este sentido, la problematización del saber, desde la perspectiva teórica adoptada, es una herramienta teórica-metodológica útil para identificar usos, significados y otros elementos que permitieron la construcción de una noción matemática específica, así como para –con base en los primeros– confrontar y enriquecer los usos y significados que habitan la escuela, espacios profesionales y otros. Una herramienta que permite "hablar entre sí a las distintas posturas y explicaciones, significarlas con base en sus contextos, entenderlas y estudiarlas con base en ellos" (Reyes-Gasperini, 2017, p. 55).

Una historización de las nociones trigonométricas

Con el propósito de atender las tres preguntas de partida, realizamos una historización de las nociones trigonométricas; esto es, estudiamos las condiciones socioculturales en las cuales se construyeron y difundieron inicialmente las nociones trigonométricas, así como el uso –en término de acciones y actividades– que su 'productor' hace de las nociones y procedimientos matemáticos.

Realizamos dicha historización a través de una configuración particular del *análisis de contenido*[1], en tanto herramienta sociológica para el análisis de las comunicaciones relativo a las condiciones de producción/recepción de estas (Bardin, 1996 en Cáceres, 2003), compuesto de seis etapas (Figura 4).

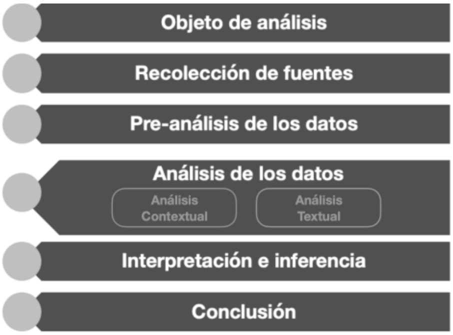
El *objeto de análisis* refiere a la selección de la obra específica en la que reconocemos el nacimiento de las nociones trigonométricas. Durante esta etapa elegimos al capítulo IX del libro I del *Almagesto* de Ptolomeo como nuestro objeto de análisis, dado que –de forma general– la literatura coincide en que la 'tabla trigonométrica' construida en dicho apartado constituye la comunicación humana más antigua en la que encontramos evidencia del nacimiento de la trigonometría. Entendiendo esta última como el estudio sistemático y cuantitativo de las relaciones que se establecen entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

---

[1] La descripción completa del método se puede consultar en (Cruz-Márquez, 2018, pp. 54-64).

Figura 4

Esquema general de los elementos metodológicos del estudio



La *recolección de fuentes*, por su parte, alude a la búsqueda y organización de obras asociadas al objeto de análisis seleccionado. Clasificamos las fuentes reunidas durante esta etapa en cuatro tipos: 1) estudios sobre historia de las ciencias y de la matemática en general, donde ubicamos, por ejemplo, *Science Awakening II* (van der Waerden, 1974); 2) versiones modernas del *Almagesto*, entre las que podemos mencionar a *Ptolomy's Almagest* (Toomer, 1984); 3) análisis del *Almagesto*, por ejemplo *A Suvey of Almagest* (Pedersen, 2010); y 4) traducciones comentadas de la obra maestra de Ptolomeo, dentro de las que destaca *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo* (Saiz, 2003).

El *pre-análisis de los datos*, tercera etapa de nuestro análisis de contenido, hace referencia al estudio inicial de las fuentes recolectadas con el afán de discriminar los que constituirán nuestros datos. Durante esta etapa realizamos lecturas comprensivas de las fuentes recopiladas, seleccionamos documentos o secciones de documentos que consideramos podrían ayudar a responder nuestras preguntas iniciales, y tradujimos y transcribimos algunos de estos, con la intención de hacer su análisis más sencillo y eficiente.

El *análisis de los datos* alude al estudio –con base en los elementos teóricos– de los datos seleccionados y procesados anteriormente, así como de establecimiento de causalidades, correspondencias y vínculos entre estos. En correspondencia con nuestra postura teórica, realizamos esta etapa en dos fases: el análisis contextual y el análisis textual.

Para el análisis contextual tomamos como punto de partida la propuesta metodológica planteada por Espinoza-Ramírez y Cantoral (2010), la cual sostiene que para acercarse al significado sociocultural de una obra esta debe verse al menos desde tres perspectivas: como una producción con historia, como un objeto de difusión y como parte de una expresión intelectual global. En este sentido, cuestiones como ¿quién fue Claudio Ptolomeo?, ¿qué eventos sociales, políticos y/o económicos son determinantes en la publicación y difusión del *Almagesto*?, y ¿qué relación mantiene el *Almagesto* con otras obras matemáticas o didácticas relevantes en la época? cobraron importancia en nuestro estudio (Cruz-Márquez y Montiel, 2017).

Respecto al análisis textual, gracias a lo reportado en la literatura y a un estudio previo realizado sobre los *Elementos* de Euclides, nos percatamos de que en el capítulo IX del libro I del *Almagesto* de Ptolomeo podíamos identificar unidades discursivas, en tanto porciones de texto con una gramática y función semejante (Figura 5), así como unidades de análisis o proposiciones, en tanto secciones del texto con una composición similar y con un objetivo específico (Cruz-Márquez y Montiel, 2017) (Figura 6).

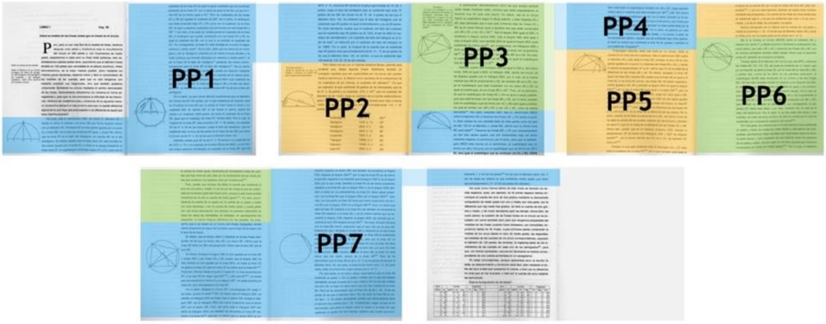
Con esto en mente, comenzamos el análisis textual del *Almagesto* estudiando a detalle la estructura discursiva de las proposiciones reconocidas y llevando a cabo cada una de las construcciones geométricas y pruebas matemáticas involucradas en estas –etapa que denominamos análisis micro–. Esto con el propósito de identificar las acciones –en el sentido del modelo de anidación de prácticas– que lleva a cabo el autor de forma directa sobre los objetos, así como las herramientas que le son útiles para ello. Como núcleo de este primer nivel de análisis textual nos planteamos las cuestiones ¿qué hace? y ¿cómo lo hace?

Figura 5

Estructura discursiva de la proposición primera (PP1)

Figura 6

Proposiciones identificadas en el Capítulo IX del Almagesto de Ptolomeo. (Adaptada de Cruz-Márquez (2018, p. 112)).



En un segundo nivel de análisis –que denominamos análisis meso–, estudiamos el objetivo de cada una de las proposiciones identificadas. Esto con el propósito de derivar relaciones entre proposiciones y posibles actividades –en el sentido del modelo de anidación de prácticas–. Como núcleo de este segundo nivel de análisis nos planteamos la cuestión ¿para qué lo hace?

Por último, en un tercer nivel de análisis –denominado análisis macro–, realizamos la articulación de los objetivos particulares de cada proposición y los nexos entre estos, con la intención de acercarnos al objetivo del documento y a responder a nuestras preguntas de partida.

La *interpretación e inferencia*, quinta etapa de nuestro análisis de contenido, refiere al planteamiento de respuestas para nuestras preguntas de partida, con base en los datos recolectados, seleccionados y analizados en las etapas anteriores.

La *conclusión*, por otro lado, alude al proceso de síntesis, redacción y presentación final de los resultados obtenidos.

RESULTADOS

En correspondencia con la herramienta metodológica implementada, exponemos los resultados de la historización realizada en tres grandes apartados: el análisis contextual, el análisis textual y una síntesis de los principales resultados.

Análisis contextual del *Almagesto*

Producto de esta primera fase de análisis identificamos la problemática que enfrentaban los astrónomos contemporáneos de Ptolomeo, así como las condiciones en las cuales lo hicieron. Describimos estos resultados a continuación.

Sobre el contexto

Reconocemos a las condiciones en las que se produjo y difundió la obra maestra de Ptolomeo como una trama de tres componentes: el contexto sociocultural, el contexto científico y el contexto tácito.

El *contexto sociocultural* se refiere a los eventos de índole social y cultural que jugaron un rol trascendental en la vida, la educación y el quehacer de Ptolomeo. Entre estos destacamos el desarrollo de las civilizaciones antiguas –egipcia y mesopotámicas–, la ventajosa ubicación geográfica (Boyer, 1986) e ingenio del pueblo griego (Mateu y Orts, 2006), la fundación y poderío económico y cultural de Alejandría (Kline, 1972), la creación y auge de su Museo y su Biblioteca (Melogno, Rodríguez y Fernández, 2011), y la concurrencia de Ptolomeo y sus antecesores científicos directos –Euclides, Apolonio e Hiparco– en dicha ciudad (Boyer, 1986).

El *contexto científico*, por otro lado, alude a los avances y sucesos que dan forma al ambiente matemático y astronómico en el que Ptolomeo creó y difundió su obra. Por ejemplo el uso de la astronomía para la anticipación de fenómenos terrestres (van der Waerden, 1974) y las observaciones astronómicas realizadas por las civilizaciones antiguas, el sistema de numeración y métodos de cálculo mesopotámicos (Aaboe, 1964), la identificación de la inconmensurabilidad y el consecuente auge de la geometría deductiva griega (Sánchez, 2012), la composición de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 1991; Boyer, 1986), la emergencia del ángulo como cuantificación de la amplitud (Matos, 1990), las teorías de epiciclos y excéntricos de Apolonio (Boyer, 1986), y toda la producción científica de Hiparco (Maor, 1998).

Dentro de estos, consideramos que tres herramientas fueron fundamentales para el trabajo de Ptolomeo: la geometría axiomática deductiva griega –reunida en los *Elementos* de Euclides–, los avances aritmético-algebraicos de las civilizaciones mesopotámicas y una noción cuantitativa del ángulo.

La geometría axiomática deductiva griega, y específicamente la obra insigne de Euclides, provee a Ptolomeo de un cúmulo bastante rico de herramientas de construcción geométrica y prueba matemática. Además, los *Elementos* dotan de un lenguaje y una racionalidad particular a todas las obras científicas posteriores a su publicación, y el *Almagesto* de Ptolomeo es una muestra clara de ello –por ejemplo, solo en el capítulo estudiado identificamos el uso recurrente de al menos 20 proposiciones de esta obra de Euclides, provenientes de los libros I, II, III, IV, VI y XIII–.

Dentro de los aportes aritmético-algebraicos mesopotámicos cabe resaltar su sistema numérico que, al ser sexagesimal y posicional, tenía amplias ventajas sobre los sistemas griegos y egipcios contemporáneos, en especial al trabajar con números grandes y con fracciones. Sumado a esto, los métodos de cálculo de las civilizaciones mesopotámicas, como la interpolación lineal y la aproximación de raíces, fueron determinantes en el asombroso grado de precisión observado en la tabla trigonométrica construida por Ptolomeo –de hasta siete cifras decimales respecto al cálculo actual (Bressoud, 2010)–.

La noción cuantitativa del ángulo, concreta en la división de la circunferencia del círculo en 360 partes –cada una de ellas dividida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas–, que la matemática griega construye con base en la astronomía y matemática mesopotámica y que para los tiempos de Ptolomeo ya era de uso estándar, es un elemento esencial para los fines del astrónomo pues funge como la unidad de referencia, con base en la cual expresa y opera los ángulos centrales y arcos de circunferencia.

Por último, el *contexto tácito* hace referencia al conjunto articulado de creencias sobre la estructura, composición y funcionamiento del universo que predominaba en la época de Ptolomeo, denominado en la actualidad *cosmovisión aristotélica del universo* (DeWitt, 2010) (Figura 7).

Bajo esta, se concibe al universo como *finito* y *esférico*, y a la Tierra como un cuerpo *estático* y *flotante* en el vacío –creencias presentes desde los modelos de los milesios (Asimov, 1975)–. Mientras que los cuerpos celestes se suponen entes *esféricos* con movimientos *circulares uniformes* alrededor del centro del universo, donde se encuentra la Tierra –creencias sugeridas por los pitagóricos (Boyer, 1986) y secundadas por la escuela platónica (Saiz, 2003)–.

Una observación importante respecto a estos contextos es que, si bien exponerlos de forma disjunta nos es útil para dar claridad y linealidad al relato, estos no son independientes, al contrario, se entrecruzan –contraponen y favorecen– constantemente y en su conjunto dan forma a las condiciones que hicieron posible la labor de Ptolomeo, así como la emergencia de las nociones trigonométricas en su obra.

Figura 7

Esquema del universo conforme a la cosmovisión aristotélica. (Adaptada de Apian, Bellere y Gemma (1545, p. 6)).

Sobre la problemática

A mediados del siglo II a.C., bajo las condiciones socioculturales, científicas y tácitas aludidas, Hiparco de Nicea –astrónomo contemporáneo de Ptolomeo– observó que los modelos celestes construidos bajo la cosmovisión aristotélica del universo no eran capaces de explicar las estaciones del año. Es decir, si consideramos al Sol como un cuerpo que se desplaza de manera circular uniforme alrededor del centro del universo, donde está ubicada la Tierra como un ente estático (Figura 8a), la distancia, el tamaño y brillo aparente del Sol debería ser similar durante todo el año; que no es lo que observamos.

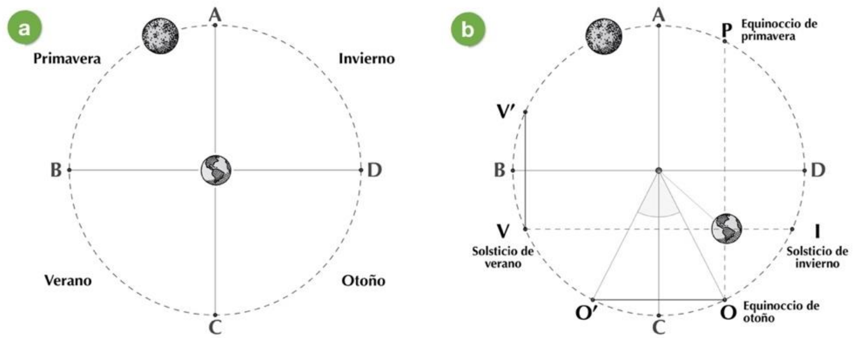
En consecuencia, Hiparco planteó que, para hacer coincidir el modelo con los hechos empíricos, era necesario que la Tierra no estuviese ubicada exactamente en el centro de la eclíptica (Figura 8b), la pregunta consecuente es: entonces, ¿a qué distancia del centro está ubicado nuestro planeta?

Para atender esta pregunta, Hiparco dividió la eclíptica utilizando las mediciones empíricas de la duración de las estaciones del año. Así, si la distancia entre el equinoccio de primavera (P) y el equinoccio de otoño (O) es

187 días de los 365¼ del año, entonces el arco PVO corresponde a 184.31º de los 360º en los que se divide el círculo, en consecuencia, el arco OO' es igual a 4.31º. De manera homóloga, Hiparco calculó que el arco VV' corresponde a 1.98º.

Figura 8

Problema de las estaciones desiguales. (Figura 8b adaptada de Bressoud (2010)).



En este punto, para calcular la distancia entre la Tierra y el centro de la eclíptica, mediante el ahora denominado teorema de Pitágoras, a Hiparco solo le restaba conocer la longitud de las cuerdas subtensas por los arcos OO' y VV'. Sin embargo, no poseía un instrumento matemático útil para *medir distancias indirectamente en el contexto del círculo*, esto es, una herramienta que asociara cuantitativa y sistemáticamente los arcos –o ángulos centrales– con sus respectivas cuerdas y viceversa, así que Hiparco se dio a la tarea de construirla; quehacer que devino en la primera 'tabla trigonométrica' de la que tenemos noticia –y que lo hizo acreedor del título de padre de la trigonometría–.

Esta tabla, al igual que la mayoría de los trabajos de Hiparco, no ha llegado hasta nosotros, pero sabemos de ella gracias a las obras de sus sucesores, especialmente de Claudio Ptolomeo, quien en el capítulo IX del libro I del *Almagesto* –nuestro objeto de análisis– construye una tabla homóloga.

Análisis textual del *Almagesto*

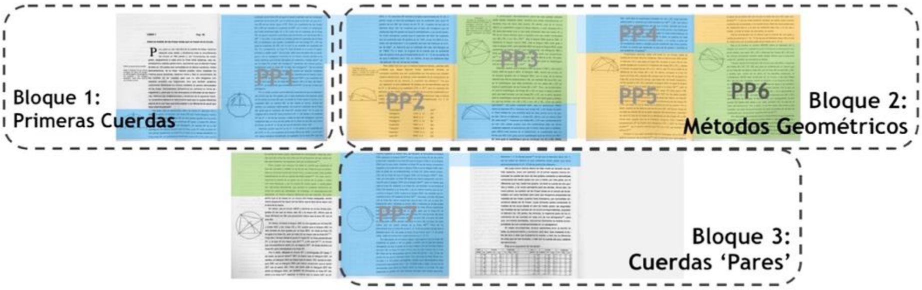
Esta segunda fase de análisis nos permitió identificar tres bloques de proposiciones o momentos de trabajo, y tres usos que Ptolomeo da a las nociones geométricas en el transcurso de su obra. A continuación, ampliamos acerca de estos resultados y mostramos ejemplos del análisis micro[2] y meso realizado alrededor de algunas de las proposiciones y bloques.

Sobre los bloques de proposiciones o momentos de trabajo

Para cumplir su objetivo –construir una tabla que asocie los ángulos entre 0,5º y 180º, con un intermedio de medio grado, con sus respectivas cuerdas–, Ptolomeo requirió de tres bloques de proposiciones o momentos de trabajo –en tanto conjunto de proposiciones con objetivos afines–: las primeras cuerdas, los métodos geométricos y las cuerdas 'pares' (Figura 9).

Figura 9

Bloques de proposiciones identificadas



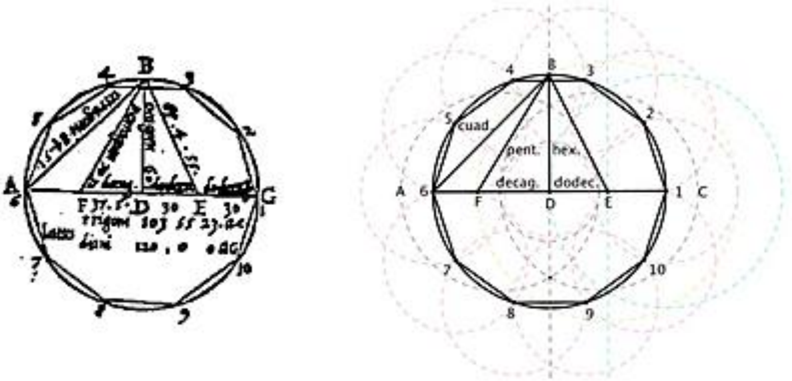
En las *primeras cuerdas* Ptolomeo identifica los seis primeros pares ángulo-cuerda de su tabla: las cuerdas subtensas por arcos –ángulos centrales– de 180º, 120º, 90º, 72º, 60º y 36º. A manera de ejemplo, en la proposición primera (PP1), para [¿qué hace?][3] calcular la cuerda subtensa por un ángulo central de 90º, el autor [¿cómo lo hace?] declara algunos elementos geométricos de partida: una circunferencia dividida en 360 partes y su diámetro dividido en

[2] El análisis completo de las construcciones geométricas y de las pruebas matemáticas de cada una de las proposiciones puede consultarse en (Cruz-Márquez, 2018, pp. 107-152).
[3] En esta sección utilizamos corchetes para señalar el qué hace, el cómo lo hace y el para qué lo hace de las distintas proposiciones y bloques, con la intención de reflejar su rol en el análisis de estas.

120 (Figura 10), cada una de estas divida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas –división que utiliza a lo largo de todo el capítulo–. Posteriormente construye el radio de la circunferencia perpendicular al diámetro de esta (BD) y traza la cuerda AB. Por último, calcula, con ayuda del ahora denominado teorema de Pitágoras, la longitud del segmento AB.

Figura 10

Primeras cuerdas. (Izquierda: adaptada de Saiz (2003, Apéndice). Derecha: diseñada digitalmente según la primera, con líneas discontinuas añadidas, según sea necesario para construir la figura sólida, según las propuestas de Elementos de Euclides).



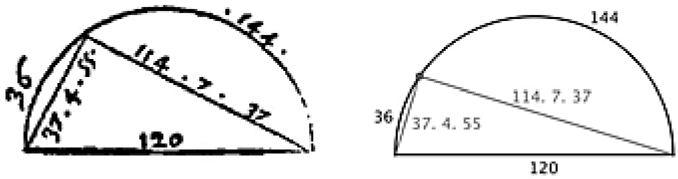
Si bien los pares ángulo-cuerda construidos por Ptolomeo en este primer momento de trabajo eran bastante conocidos en la época –algunos de ellos incluso formaban parte de los *Elementos* de Euclides (Bressoud, 2010)–, su objetivo [¿para qué lo hace?] es fungir como materia prima para los momentos posteriores.

En los *métodos geométricos*, segundo bloque o momento de trabajo, Ptolomeo se da la tarea de ampliar los pares ángulo-cuerda construidos anteriormente. Para ello, propone, prueba y hace uso de cuatro métodos geométricos que constituyen un puente entre los seis pares que ya conoce y los que requiere para completar su tabla.

Por ejemplo, en la proposición segunda (PP2), Ptolomeo [¿qué hace?] construye y utiliza su primer método geométrico, que le permite calcular la cuerda subtensa por el ángulo central que es suplemento de un ángulo central cuya cuerda conoce. Para ello, el autor [¿cómo lo hace?] parte de una semicircunferencia y su diámetro, divididos como se ha explicado antes, a la cual agrega una cuerda cuyo ángulo central conoce –36º en el caso que ilustra– (Figura 11).

Figura 11

Primer método geométrico. ((Izquierda: adaptada de Saiz (2003, Apéndice). Derecha: diseñada digitalmente según la primera).



Posteriormente, Ptolomeo construye la cuerda que une el extremo restante del diámetro y el extremo de la primera cuerda, esto es, la cuerda subtensa por el ángulo central que es suplemento del primer ángulo –144º en el caso ilustrado–. Por último, el autor se vale de los ahora denominados teorema de Tales y teorema de Pitágoras para establecer una relación entre las longitudes que conoce –el diámetro de la semicircunferencia y la primera cuerda construida– y la longitud que pretende averiguar –la cuerda subtensa por el ángulo central de 144º–.

La importancia [¿para qué lo hace?] de los métodos construidos por Ptolomeo durante este segundo momento de trabajo, no solo radica en la cantidad de pares ángulo-cuerda que permiten agregar a su tabla –algo más de 120–, sino en que representan el primer medio sistemático para describir de forma cuantitativa la relación existente entre los ángulos centrales y cuerdas correspondientes del cual tenemos evidencia, constituyen el nacimiento de la trigonometría –en el sentido antes mencionado–.

En las *cuerdas 'pares'*, tercer y último bloque o momento de trabajo identificado, Ptolomeo se da a la tarea de [¿qué hace?] aproximar la cuerda subtensa por un ángulo central de 1º y 0.5º. Para ello, el autor [¿cómo lo hace?] prueba que 'la razón entre la cuerda mayor y la cuerda menor en un círculo es menor que la razón de sus respectivos arcos'. Esto, además de [¿para qué lo hace?] servirle como fundamento geométrico para aproximar las cuerdas deseadas, es una clara evidencia de la plena conciencia del autor sobre la naturaleza no proporcional de la relación que se establece entre los arcos –ángulos centrales– y las cuerdas que estos subtienden.

Sobre los usos de las nociones geométricas

Finalmente, de manera transversal a las proposiciones y momentos de trabajo aludidos, Ptolomeo usa las nociones y procedimientos geométricos, especialmente la proporcionalidad, el círculo y el triángulo rectángulo –sus elementos, relaciones y propiedades–, de al menos tres formas: como herramientas de construcción, como herramientas teóricas y como herramientas aritmético-algebraicas.

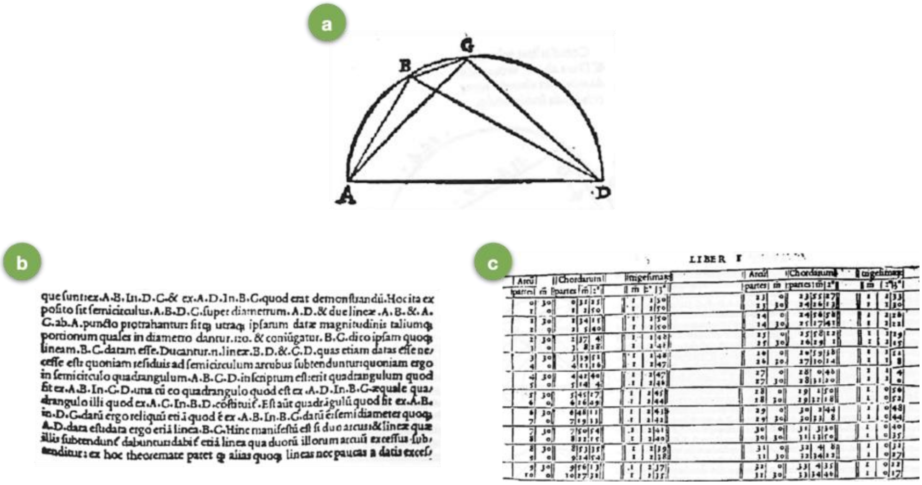
El *uso como herramientas de construcción* refiere a cuando Ptolomeo declara y/o agrega los objetos geométricos que van a intervenir en una proposición, el *uso como herramientas teóricas* a cuando el astrónomo formula y prueba relaciones geométricas existentes entre los objetos declarados y construidos anteriormente, y el *uso como herramientas aritmético-algebraicas* refiere a cuando el autor utiliza implicaciones aritméticas y/o algebraicas de las relaciones geométricas construidas para agregar nuevos pares ángulo-cuerda a su tabla.

A manera de ejemplo, en la proposición cuarta (PP4), Ptolomeo se da a la tarea de [¿qué hace?] construir un método geométrico que le permita calcular la cuerda subtensa por el ángulo diferencia de dos ángulos cuyas cuerdas conoce. Para ello, el autor [¿cómo lo hace?] introduce algunos elementos geométricos: una semicircunferencia –dividida como se ha explicado antes– y dos cuerdas cuyos ángulos centrales asociados conoce (AB y AC), ambas con un extremo en el diámetro (Figura 12a). Hasta este punto el autor emplea las nociones geométricas como herramientas de construcción.

Posteriormente, Ptolomeo argumenta que también son conocidas las cuerdas subtensas por los ángulos suplemento de los dos primeros (BD y CD), esto por la proposición segunda (PP2) –descrita más arriba–. Además, se vale de que el cuadrilátero ABCD está inscrito en la semicircunferencia y que las dos diagonales de este (BD y AC) y tres de sus lados (AB, AD y DC) son conocidos para asegurar, mediante el ahora denominado teorema de Ptolomeo, que ‘es evidente que, si dos arcos y las líneas que subtienden están dadas, se dará también la línea subtendida por la diferencia entre esos dos arcos’ (Figura 12b). En esta sección ubicamos el uso de las nociones geométricas como herramientas teóricas.

Figura 12

Usos de las nociones geométricas. (Adaptadas de Saiz (2003, Apéndice)).



Por último, el autor se vale de la interpretación aritmético-algebraica de la relación que ha construido para calcular, entre muchas otras, la longitud de la cuerda subtensa por un ángulo central de 12º –con base en las cuerdas de 60º y 72º–, hasta entonces desconocida (Figura 12c). Aquí ubicamos el uso de las nociones geométricas como herramientas aritmético-algebraicas.

A la sinergia de estos tres usos que Ptolomeo da a las nociones geométricas en su obra es lo que –para efectos del estudio– denominamos *trabajo geométrico*.

Una síntesis necesaria

Fruto de establecer una relación entre los fenómenos naturales terrestres y los astronómicos, las antiguas civilizaciones de occidente se vieron en la necesidad de observar y registrar los fenómenos celestes, y –más adelante– de componer sistemas que explicaran y anticiparan los mismos. Consecuencia del afán por construir estos sistemas, en el marco de la cosmovisión aristotélica del universo, es que los astrónomos griegos enfrentaron la necesidad de medir indirectamente distancias en el contexto del círculo. Ocupación que –como hemos visto– hizo necesaria la construcción de una explicación sistemática y cuantitativa de la relación existente entre un ángulo central y las longitudes que este subtiende, esto es, la construcción de la primera relación de naturaleza trigonométrica.

Para atender esta problemática Ptolomeo heredó al menos tres herramientas fundamentales: la geometría axiomática deductiva griega, los avances aritmético-algebraicos de las civilizaciones mesopotámicas y una noción cuantitativa del ángulo. La primera fue útil para componer y justificar modelos geométricos que encarnaran las creencias articuladas bajo la cosmovisión aristotélica del universo, y la segunda y tercera fueron esenciales para ajustar dichos modelos a los más de cuatro mil años de datos empíricos con los que se contaba hasta el momento.

Así, al construir su tabla trigonométrica, Ptolomeo tomó nociones como la proporcionalidad, el círculo y el triángulo rectángulo –sus elementos, propiedades y relaciones–, y las usó para introducir y construir objetos geométricos, para establecer ciertas propiedades y relaciones entre estos, y para calcular los pares ángulo-cuerda deseados. En otras palabras, se valió del trabajo geométrico, en tanto sinergia de usos como herramientas de construcción, como herramientas teóricas y como herramientas aritmético-algebraicas, sobre las nociones matemáticas aludidas, para cumplir su objetivo.

Por último, es importante subrayar el rol que desempeñaron las condiciones socioculturales aludidas para el establecimiento de una atmósfera al menos favorable para la producción matemática y astronómica de la época de Ptolomeo, para la estructura y composición del *Almagesto*, y –en definitiva– para la construcción de las nociones trigonométricas.

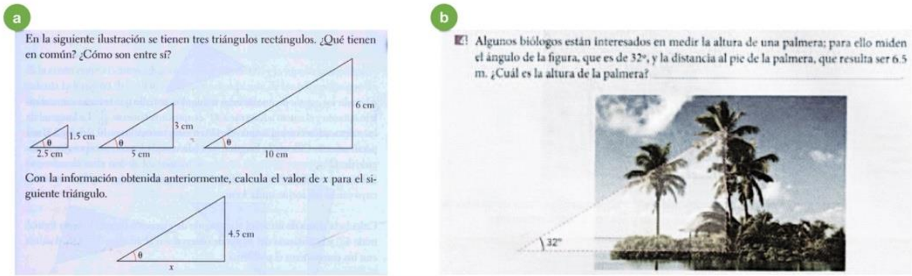
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los principales resultados y aportes de este estudio –consecuencia de las preguntas planteadas– son relativas al uso inicial de las nociones trigonométricas y al papel que las nociones y procedimientos geométricos juegan en este. En consecuencia, el primer punto de discusión es sobre el que nuestro análisis histórico señala como el uso germinal de las nociones trigonométricas: la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo.

La revisión de planes y programas de estudio, libros de texto y clases de trigonometría nos haría pensar que la medición indirecta de distancias ocupa un lugar importante en la trigonometría escolar. Sin embargo, investigaciones como la realizada por Montiel (2014) muestran que tanto en las tareas trigonométricas habituales (Figura 13a) como en los denominados ‘problemas de aplicación’ (Figura 13b) no se requiere que el estudiante realice o analice construcciones geométricas –dado que estas, así como su proporcionalidad, constituyen condiciones de partida–, que obtenga mediciones o datos, o consigan la solución por otra vía.

Figura 13

Tarea trigonométrica habitual y problema de aplicación. (Adaptadas de Montiel (2014)).



Este tipo de actividad matemática reduce el trabajo del educando a elegir la ‘fórmula trigonométrica’ adecuada, sustituir los valores dados y realizar los procedimientos aritméticos pertinentes para calcular el dato que resuelve el problema (Brito y Barbosa, 2004; Weber, 2005; Díaz, Salgado y Díaz, 2010; Mesa y Herbst, 2011; y Montiel, 2014).

En consecuencia, consideramos que –de forma general– en la trigonometría escolar actual, la medición indirecta de distancias constituye un escenario ficticio de aplicación de definiciones y fórmulas, en lugar de un contexto de uso y significación de las nociones trigonométricas que propicie su construcción y el estudio de la naturaleza propia de la relación ángulo-longitud.

El segundo punto de discusión es sobre el rol de la geometría en la construcción y significación de las nociones trigonométricas. Si bien diversos estudios (v. g. Patricio, García y Arrieta, 2005; Navarro y Villalva, 2009; Jácome, 2011; y Montiel, 2014) coinciden en la utilidad y pertinencia de acercar las nociones y procedimientos geométricos a la introducción y desarrollo de las nociones trigonométricas, las cuestiones sobre cómo hacerlo y qué nociones y procedimientos geométricos son pertinentes a este proceso constituyen áreas auténtico debate. Como ejemplo de ello comentamos brevemente las propuestas de Bressoud (2010) y Weber (2005, 2008).

En la primera el autor propone la introducción a la trigonometría a partir del ‘modelo del círculo’ con base en consideraciones históricas, relativas a los problemas trigonométricos resueltos en las obras de Euclides, Hiparco y Ptolomeo, dado que anteceden a las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Sin embargo, su contribución no incluye una reflexión didáctica sobre cómo esos problemas vivirían en el aula –dada su complejidad–. Aunado a esto, y a propósito del reciente aporte de Mandsfield y Wildberger (2017), hoy se acepta que la tablilla Plimpton 322 –datada un milenio antes de Hiparco– contiene cálculos trigonométricos exactos con base en razones en el triángulo rectángulo. Si bien estos cálculos provienen de una epistemología distinta de la que da origen al actual cálculo de las razones trigonométricas y se requiere de un análisis profundo para reconocer la pertinencia de cualquiera de estos modelos en un escenario didáctico, es claro que el argumento cronológico no es suficiente para decidir cuál debe llevarse al aula.

En la segunda propuesta el autor presenta y pone en práctica un método experimental de introducción de las funciones trigonométricas con la intención de estudiar la comprensión de estas con estudiantes de educación superior del sistema escolar estadounidense. Dicho método parte de la idea de que las operaciones trigonométricas pueden ser entendidas como ‘procesos geométricos’.

En particular, el proceso geométrico que propone para calcular el seno de un ángulo dado es construir un círculo unitario en un plano cartesiano, usar un transportador para dibujar un rayo que parta del origen de dicho plano –de tal suerte que el ángulo entre la parte positiva del eje x y el rayo sea el ángulo deseado–, localizar el punto de intersección entre el rayo y el círculo unitario, y determinar la ordenada o altura de esa intersección (Weber, 2008).

Estimamos que, si bien esta propuesta pone en juego ciertos elementos geométricos, estos constituyen principalmente un método de introducción del círculo unitario y un medio para ‘justificar geométricamente’ un procedimiento métrico o numérico de cálculo de las razones trigonométricas básicas. Además, pese a que promueve el análisis de la relación ángulo-función trigonométrica y sus propiedades, no ahonda explícitamente en la naturaleza trascendente –trigonométrica– de dicha relación.

En conclusión, a la luz de los antecedentes y resultados expuestos, afirmamos que en su introducción a la escuela las nociones trigonométricas han perdido su funcionalidad germinal y su naturaleza intrínseca, *lo trigonométrico* que las caracteriza, para convertirse en un campo de memorización y aplicación de definiciones y fórmulas, y un espacio de ejercitación para la proporcionalidad.

Como alternativa –y respuesta a las preguntas de partida– planteamos que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo constituye un escenario favorable para el análisis de la naturaleza de la relación ángulo-longitud y, en consecuencia, para confrontar y ampliar el significado lineal y aritmético asociado a las nociones trigonométricas. Además, postulamos que el trabajo geométrico –entendido como la sinergia de usos como herramientas de construcción, como herramientas teóricas y como herramientas aritmético-algebraicas– sobre nociones geométricas como la proporcionalidad, el círculo y el triángulo rectángulo –sus elementos, propiedades y relaciones– resulta fundamental en dicho proceso.

En estudios posteriores se deberá crear una situación didáctica concreta bajo estos supuestos epistemológicos y someterlos a pruebas empíricas, y realizar estudios alrededor de otros puntos históricos de la construcción de las nociones trigonométricas y de su introducción y evolución al interior de los sistemas educativos… pero esa será una nueva historia.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN

GCM realizó el proceso de investigación. GME supervisó el desarrollo completo de la investigación. GCM realizó la escritura inicial del documento. Ambos autores participaron activamente en la revisión y edición de este manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor correspondiente, GCM, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Aboe, A. (1964). *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo* (A. Linares, Trad.). Norma.

Apian, P., Bellere, J. y Gemma, F. (1545). *Cosmographia, siue Descriptio vniuersi orbis*. Ioannis VVithagij..

Araya, A., Monge, A., y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de compresión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *7*(2), 1-31. https://www.doi.org/10.15517/AIE.V7I2.9274

Asimov, I. (1975). *El universo* (M. Paredes Larrucea, Trad.). Círculo de Lectores.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática* (M. Martínez Pérez, Trad.). Alianza.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, *104*(2), 106-112.

Brito, A. y Barbosa, B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes*, Bragança Paulista, *22*(1), 65-70.

Cabañas-Sánchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25* (pp. 1031-1040). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: Una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad*, *2*(1), 53-82.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. https://www.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cruz-Amaya, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de trabajo geométrico* [Tesis de maestría]. https://www.doi.org/10.13140/RG.2.2.25114.49604

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* [Tesis de maestría]. https://www.doi.org/10.13140/RG.2.2.18095.64166

Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (2017). Emergencia de las Nociones Trigonométricas en el *Almagesto*. En L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30* (pp. 981-989). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

DeWitt, R. (2010). *Cosmovisiones. Una introducción a la historia y la filosofía de la ciencia* (J. Sarret Grau, Trad.). Buridán.

Díaz, M., Salgado, G. y Díaz, V. (2010). La transición: grados→ radianes→ reales. Un obstáculo didáctico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *74*, 29-37.

Espinoza-Ramírez, L. y Cantoral, R. (2010). Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23* (pp. 889-897). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Euclides (1991). *Elementos* (L. Vega, Int.; M. L. Puertas Castaños, Trad.). Gredos.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp. 79-86). Universidad de Granada.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* [Tesis de maestría].

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica* [Tesis de maestría].

Mansfield, D. y Wildberger, N. J. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*, *44*(4), 395-419. https://www.doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001

Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. Princeton University Press.

Mateu, E. y Orts, A. (2006). La astronomía griega: de los pitagóricos al Almagesto de Ptolomeo. *Huygens*, (62), 19-38.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, *1*(1), 4-11.

Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, S. (Eds.). (2011). *Elementos de Historia de la Ciencia*. Universidad de la República.

Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 41-52. https://www.doi.org/10.1007/s11858-010-0300-7

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. Díaz de Santos.

Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (pp. 1771-1779). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 61-88). Lectorum.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En M. Ferrari, G. Martínez y G. Buendía (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (pp. 169-205). Díaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Navarro, P. y Villalva, M. (2009). Un estudio sobre la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 287-296). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Patricio, H., García, C. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas de hacer semejanzas en los triángulos y la emergencia de las razones trigonométricas. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa 18 (pp. 619-624). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pedersen, O. (2010). *A Survey of the Almagest: With Annotation and New Commentary by Alexander Jones*. Springer. https://www.doi.org/10.1007/978-0-387-84826-6

Reyes-Gasperini, D. (2017). *Empoderamiento Docente y Socioepistemología*. Gedisa.

Rotaeche, A. (2012). *Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico* [Memoria predoctoral].

Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo"*. Maxtor.

Sánchez, C. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 71-92. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1860

Thompson, P. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, pp. 45–64). Cinvestav – UMSNH.

Toomer, G. (1984). *Ptolomy's Almagest*. Duckworth.

van der Waerden, B. (1974). *Science awakening II*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2952-9

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(3), 91-112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics teacher*, *102*(2), 144-150.

Xiang, H. (2008). Hacia una imagen contextualista de la racionalidad. *Praxis*, (62), 103-135. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/praxis/article/view/4134