

El Concepto Aleatoriedad en los Libros de Texto Chilenos de Educación Primaria

Francisco Rodríguez-Alveal ^a

Maitere Aguerrea ^b

Danilo Díaz-Levicoy ^b

^a Universidad del Bío-Bío, Facultad de Educación y Humanidades, Departamento Ciencias de la Educación, Chillán, Chile

^b Universidad Católica del Maule, Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Talca, Chile

Recibido para publicación 13 ene. 2022. Aceptado después de la revisión 29 ago. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: la aleatoriedad es un concepto fundamental en la formación de los ciudadanos, dado que interviene en diversas situaciones de la vida cotidiana. Además, está presente en el currículo escolar de diversos países, como Chile. **Objetivo:** Analizar la enseñanza del concepto de aleatoriedad en libros de texto de matemática de Educación Primaria en Chile. **Diseño:** Se sigue una metodología de corte cualitativa y usando el método del análisis de contenido. **Entorno y participantes:** Se analizaron 42 libros de texto, entre textos del estudiante y cuadernos de actividades. **Recopilación y análisis de datos:** Por medio del análisis de contenido, se estudian las secciones y los segmentos de los libros de texto en que intervienen el concepto de aleatoriedad, relacionándolos definiciones, situaciones problemas, niveles cognitivos que se desean desarrollar, y uso de herramientas tecnológicas. **Resultados:** El concepto aleatoriedad es introducido mediante juegos aleatorios y conceptos asociados a experimento aleatorio, azar, aleatorio y espacio muestral, sin ahondar en la definición de algunos conceptos cardinales como azar y aleatoriedad. **Conclusiones:** Los libros de texto se adecuan parcialmente a las directrices curriculares chilenas. Además, las actividades afines al concepto aleatoriedad, generalmente, hacen mención a la utilización de aparatos físicos y, en pequeña escala, al uso de herramientas tecnológicas. Finalmente, se evidencia en los libros de texto, una exigua presencia de situaciones problemas con un adecuado nivel cognitivo que favorezca el desarrollo de habilidades necesarias para la adquisición de un pensamiento probabilístico en los estudiantes de la Educación Primaria.

Palabras clave: libro de texto; Educación Primaria; matemática; estadística, aleatoriedad.

Autor correspondiente: Francisco Rodríguez Alveal. Email: frrodriguez@ubiobio.cl

The Concept of Randomness in Chilean Primary School Textbooks

ABSTRACT

Background: Randomness is a fundamental concept in the formation of citizens because it intervenes in various daily life situations. In addition, it is present in the school curriculum of various countries, such as Chile. **Objective:** To analyse the teaching of the concept of randomness in primary education mathematics textbooks in Chile. **Design:** The research uses a qualitative methodology and uses the content-analysis method. **Setting and participants:** 42 textbooks were analysed, including student texts and activity logs. **Data collection and analysis:** Through content analysis, the sections and segments of the textbooks in which the concept of randomness intervenes are studied, relating them to definitions, problem situations, cognitive levels that should be developed, and the use of technological tools. **Results:** The concept of randomness is introduced through random games and concepts associated with random experiment, chance, random, and sample space, without delving into the definition of some cardinal concepts such as chance and randomness. **Conclusions:** The textbooks partially conform to the Chilean curricular guidelines. In addition, activities related to the concept of randomness generally refer to the use of physical devices and, on a small scale, to the use of technological tools. Finally, the textbooks present a small number of problem situations with an adequate cognitive level that favours the development of skills necessary for primary education students' acquisition of probabilistic thinking.

Keywords: Textbook; Primary education; Mathematics; Statistics; Randomness.

O conceito de aleatoriedade nos livros didáticos do ensino fundamental chileno

RESUMO

Contexto: A aleatoriedade é um conceito fundamental na formação dos cidadãos, pois intervém em diferentes situações do cotidiano. Além disso, está presente no currículo escolar de vários países, como o Chile. **Objetivos:** Analisar o ensino do conceito de aleatoriedade nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental no Chile. **Desenho:** Apresenta-se a seguir uma metodologia de corte qualitativo, utilizando o método de análise de conteúdo. **Ambiente e participantes:** Foram analisados 42 livros didáticos, incluindo textos de alunos e livros de atividades. **Coleta e análise de dados:** Por meio da análise de conteúdo, estudam-se as seções e segmentos de livros didáticos em que se apresenta o conceito de aleatoriedade, relacionando definições, situações-problema, níveis cognitivos a serem desenvolvidos e o uso de ferramentas tecnológicas. **Resultados:** O conceito de acaso é introduzido por meio de jogos aleatórios e conceitos associados a um experimento aleatório, acaso, acaso e amostra espacial, sem considerar a definição de alguns conceitos cardinais como acaso e aleatoriedade. **Conclusões:** Os livros didáticos são parcialmente adaptados às diretrizes curriculares chilenas. Além disso, as atividades relacionadas ao conceito

aleatório geralmente mencionam o uso de dispositivos físicos e, em pequena escala, o uso de ferramentas tecnológicas. Por fim, há evidência, nos livros didáticos, de uma escassa presença de situações-problema com nível cognitivo adequado que favoreça o desenvolvimento de habilidades necessárias para a aquisição do pensamento probabilístico em alunos do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: livro de texto; Educação primária; Matemática; estatísticas, aleatoriedade.

INTRODUCCIÓN

A medida que los libros de texto se utilizan en las aulas de todo el mundo, aumenta el interés de los investigadores en conocer cómo se introducen los contenidos presentes en el currículo escolar en estos textos, en relación con la profundidad, perspicuidad, actualidad y pertinencia del contenido que se desarrolla. Al respecto, Bergwall (2019) identifica variaciones en la presentación de los contenidos matemáticos en los libros de texto, tanto dentro del país como entre países, producto de lo cual, Shield y Dole (2013) sugieren analizarlos, como un primer nivel, e indagar acerca de la introducción de un contenido, examinando las oportunidades que están disponibles para las y los estudiantes en su aprendizaje. En esta misma línea, para Occeci y Valeiras (2013), los libros de texto juegan un rol fundamental en la educación escolar porque “constituyen herramientas mediadoras que traducen y concretan aquellos significados incluidos en el currículo prescripto por los organismos gubernamentales y que lo hacen a través de una presentación didáctica” (p. 134). Es decir, cumplen la función de institucionalizar los conceptos y saberes del currículo oficial, en el proceso educativo.

Al respecto, dada la relevancia de los libros de texto como recursos pedagógicos y didácticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, el Ministerio de Educación chileno (MINEDUC) les atribuye un carácter esencial en las tareas educativas del profesor, orientando la planificación, la preparación y el desarrollo de las actividades de aprendizaje, tanto en el aula como en otros espacios, cumpliendo un rol fundamentalmente articulador en el aprendizaje del estudiantado (MINEDUC, 2008).

Lo anterior se concreta en la entrega sistemática y gratuita de un texto del estudiante y un cuaderno de actividades, a todo el cuerpo estudiantil de los establecimientos educacionales municipales y con subvención del Estado de Chile. Textos que, como ha declarado el MINEDUC, se encuentran alineados al currículo escolar chileno, y ofrecen actividades motivadoras, desafiantes y adecuadas al nivel cognitivo de las y los estudiantes, afín de desarrollar un aprendizaje profundo y significativo en la etapa escolar.

En este contexto, uno de los contenidos de la matemática escolar en Educación Primaria, recientemente introducidos en los libros de texto chilenos, son los referidos a estadística y probabilidad, atendiendo que las directrices curriculares de diferentes países buscan favorecer el desarrollo del pensamiento probabilístico de las y los estudiantes desde los primeros niveles educativos (Ruiz, 2015).

En el caso chileno, la dimensión cognitiva que se propone desarrollar en Educación Primaria, orienta al conocimiento y la comprensión de la realidad para favorecer el desarrollo de capacidades de análisis, investigativas y de teorización, para que el estudiantado sea capaz de enfrentar situaciones problemas con capacidad crítica y positiva (MINEDUC, 2012a; 2012b).

Asimismo, atribuyen a las herramientas tecnológicas un rol facilitador del aprendizaje, contribuyendo a la exploración y búsqueda de patrones que permiten proponer y validar conjeturas, organizar y mostrar datos, facilitando la representación, la visualización, el modelamiento y la resolución de problemas, así como también, el desarrollo del pensamiento intuitivo, deductivo y lógico, y la argumentación.

En relación con el eje de Datos y Probabilidades del currículo escolar chileno, lo anterior se plasma en el desarrollo de habilidades de lectura, registro y clasificación de información de la vida cotidiana, entre las cuales se encuentra el concepto de aleatoriedad, y en utilizar diferentes representaciones (pictogramas, tablas, gráficos), para interpretar, hacer predicciones y comunicar resultados. Además, se espera que el alumnado estudie fenómenos aleatorios desarrollando la capacidad de “Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento por sobre la base de un experimento aleatorio, empleando los términos seguros – posible – poco posible – imposible” (MINEDUC, 2012a, p. 249).

Por otra parte, la utilización eficiente de los libros de texto por parte de los profesores, para la gestión del aprendizaje, está sujeta al nivel de desarrollo de competencias probabilísticas adquiridas por éstos. Al respecto, el profesorado de Educación Primaria debe: conocer en profundidad los contenidos del eje de Datos y Probabilidades del currículo escolar; ser capaz de analizar y describir fenómenos aleatorios, cuantificando y representando la probabilidad de ocurrencia de los eventos; presentar el contenido de probabilidades como una herramienta matemática que modela el azar, aportando a la toma de decisiones; y conducir el aprendizaje de los conceptos de probabilidad, por medio de situaciones lúdicas y cotidianas que ilustren como cuantificar el azar, identificando las dificultades de su aprendizaje en cada nivel (MINEDUC, 2012a). Lo que implica que, el profesorado debe contar

con una sólida formación en estadística y probabilidad, a nivel de educación primaria, de tal forma que orienten efectivamente la enseñanza de los conocimientos conceptuales acerca de las nociones cardinales de probabilidad tales como la aleatoriedad y azar. En la misma línea, Estrella et al. (2015) mencionan que para que los profesores de primaria adquieran capacidad para criticar, producir y analizar estadísticas, deben tener una comprensión profunda de herramientas y representaciones adecuadas, utilizando un extenso repertorio de tareas, preguntas y contextos; lo que eventualmente debería encontrar en los libros de texto.

Bajo esta perspectiva, esta investigación pretende analizar la enseñanza del concepto de aleatoriedad en libros de texto de Educación Primaria en Chile. Para responder a este objetivo general, se definen los siguientes objetivos específicos: 1) Analizar la forma en que el concepto aleatoriedad es presentado en los libros de texto, en los diferentes niveles de la Educación Primaria, y su adecuación con las directrices curriculares; 2) Clasificar las actividades propuestas en los libros de texto, respecto al desarrollo del concepto aleatoriedad, según el nivel de demanda cognitiva que se declara; y 3) Identificar el uso de herramientas tecnológicas en los libros de texto para el aprendizaje del concepto aleatoriedad.

FUNDAMENTOS

Pensamiento probabilístico y aleatoriedad

Uno de los objetivos que persigue el currículo escolar chileno, es que el alumnado de Educación Primaria, adquiera desde los primeros años de escolaridad, un pensamiento estadístico y probabilístico, para la comprensión de la realidad y la toma de decisiones; lo que implica conocer el por qué y el cómo se realizan las investigaciones estadísticas para comprender fenómenos que nos rodean (Chance, 2002). En este camino, para el desarrollo del pensamiento probabilístico, se requiere familiarizar al estudiantado con el proceso de investigación: formulación de preguntas, recopilación de datos, realizar análisis, probar supuestos, etc. Además, es fundamental comprender cómo se utilizan los modelos para simular fenómenos aleatorios, reconocer cómo, cuándo y por qué se pueden utilizar las herramientas inferenciales existentes, y ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema para planificar y evaluar investigaciones, y comunicar conclusiones (Wild & Pfannkuch, 1999).

En relación con el concepto aleatoriedad, según Renelle et al. (2021), las personas con frecuencia están en contacto con fenómenos aleatorios, sin embargo “los seres humanos en general tienen una comprensión deficiente de la aleatoriedad” (p. 56), aplicando a menudo ideas erróneas acerca de este concepto.

Aun cuando el término aleatoriedad no resulta ser desconocido para la mayoría del estudiantado, debido a que lo han vivenciado en situaciones de la vida cotidiana, dentro y fuera de las aulas escolares. Ramírez y Batalha (2019) reconocen que existen diferencias entre las ideas informales y juicios previos, acerca de lo que los estudiantes entienden por aleatoriedad en la cotidianidad, y lo que se transmite formalmente en el aula de clase. Asimismo, a nivel de investigaciones empíricas, Zisimos y Tasos (2021) en su estudio con estudiantes de 15 años, identifican que estos conciben las nociones de aleatoriedad, dependiendo en gran medida, en aspectos sociales, personales y/o institucionales, en los cuales se desenvuelven.

De esta forma se evidencia el carácter complejo asociado al concepto aleatoriedad, lo que tiende a generar dificultades en los aprendizajes del alumnado (Ortiz et al., 2001). En cierta forma esta complejidad se debe a su relación directa con el concepto probabilidad, el cual además posee una carga histórica que hasta nuestros días ha obstaculizado una definición sencilla de este (Batanero et al., 2012).

Al respecto, en la literatura especializada, es posible encontrar varias definiciones. Una de ellas es la dada por Ayer (1974) que relaciona aleatoriedad con el cálculo de probabilidad, es decir, un fenómeno es aleatorio, si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades. Por otro lado, para Liu y Thompson (2002) el concepto aleatoriedad se mueve a lo largo de un continuo epistemológico, en el cual intervienen factores como la ignorancia humana, caracterizándose por no ser objetiva. En este contexto, Zisimos y Tasos (2021) observan que hay interpretaciones diferentes acerca de la aleatoriedad a nivel de enseñanza escolar, como, por ejemplo, la *aleatoriedad como equiprobabilidad*, la aleatoriedad como estabilidad de frecuencias y la visión subjetiva de la aleatoriedad. Al respecto, en el trabajo de Batanero (2016) se expone diferentes concepciones que se tienen sobre la aleatoriedad: *aleatoriedad como equiprobabilidad*, donde un objeto se comporta aleatoriamente, si es seleccionado de un conjunto de objetos donde todos ellos son igualmente probables de ser seleccionados. Este enfoque presume que se verifican condiciones como que el número de objetos es finito, y que se comportan de manera simétrica, lo que consolida la equiprobabilidad;

aleatoriedad como estabilidad de frecuencias, el cual relaciona la probabilidad con la frecuencia relativa de cada miembro de una clase aleatoria a largo plazo, que desde la mirada de Martins (2011), viene a ser un medio para estudiar la probabilidad, como una propiedad asociada a fenómenos aleatorios y, por tanto, se encuentra relacionada a patrones que se rigen bajo la Ley de los Grandes Números; *visión subjetiva de la aleatoriedad*, en el que la aleatoriedad depende del conocimiento subjetivo que se tenga del fenómeno estudiado; y *enfoque de complejidad*, que corresponde a una perspectiva matemática de la aleatoriedad que la relaciona con la complejidad que presenta un programa computacional para modelar un fenómeno aleatorio.

El concepto aleatoriedad en el currículo escolar chileno

Según Inzunza (2014) la probabilidad como área de conocimiento ha venido tomando una mayor importancia en el sistema educativo, a nivel internacional, donde el concepto aleatoriedad juega un rol importante. Situación que no es ajena en el caso chileno que introduce este concepto desde el segundo año de educación primaria (7 años edad mínima), con una propuesta que tiene implícito el modelo educativo de Piaget, respecto a la adquisición de contenidos desde un razonamiento prelógico (de 2 a 7 años), operacional concreto, mediante la operación de objetivos (de 7 a 11 años) y operacional formal, donde el sujeto opera sobre operaciones o sobre los resultados de dichas operaciones (12 años en adelante).

Tabla 1

Objetivos de aprendizaje acerca de aleatoriedad en Educación Primaria, por nivel (MINEDUC, 2012b, 2015).

Nivel	Objetivo de Aprendizaje	Código
2	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	OA2
3	Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	OA3
4	Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	OA4
5	Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro - posible - poco posible - imposible. Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	OA5

Nivel	Objetivo de Aprendizaje	Código
6	Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	OA6
7	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: Estimándolas de manera intuitiva. Utilizando frecuencias relativas. Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.	OA7
8	No se observan objetivos de aprendizaje afines al concepto aleatoriedad.	-

Por otra parte, los objetivos de aprendizaje propuestos en el currículo escolar chileno, relacionados con el concepto aleatoriedad (Tabla 1), orientan a su desarrollo en los diferentes niveles, centrándose esencialmente en metodologías de uso de juegos afines a situaciones de la vida cotidiana del estudiantado, en base a experimentos estocásticos sencillos con dados, fichas o monedas (Alsina & Salgado, 2019), y desde una mirada epistemológica del concepto: desde lo intuitivo hasta la predicción de resultados.

Nivel cognitivo de las actividades sobre aleatoriedad en los libros de texto

El actual currículo de matemática en Chile (MINEDUC, 2012a; 2012b) afirma que la Educación Matemática implica el desarrollo de las habilidades para resolver problemas, modelar, representar, argumentar y comunicar. En este contexto, el nivel de demanda cognitiva de una actividad presentada en los libros de texto, debería encontrarse en estrecha relación con los procesos cognitivos necesarios para dar respuesta a ella (Doyle, 1988); procesos que pueden variar, como mencionan Estrella et al. (2020), desde la memorización, la aplicación de procedimientos y algoritmos, hasta la comprensión del uso de estrategias complejas de pensamiento y razonamiento, como son modelar, argumentar, comunicar e inferir resultados; los que según Stein y Smith (1998), se clasifican como procesos de baja demanda cognitiva y de alta demanda cognitiva, respectivamente. Siendo estos determinantes en el aprendizaje del alumnado (Penalva & Llinares, 2011).

En este contexto, Franklin y Garfield (2006) sugieren que los libros de texto deberían considerar los siguientes aspectos que resultan esenciales para la adquisición de los temas estocásticos: 1) las actividades deben facilitar la adquisición de los conocimientos estadísticos, que permitan desarrollar un razonamiento estadístico; 2) utilizar información proveniente de datos reales cuyos contextos permitirían reflexionar y dar sentido a los resúmenes estadísticos; 3) proponer actividades que permitan desarrollar una comprensión

conceptual de los conceptos estadísticos, más que un simple conocimiento procedimental; 4) las actividades deben facilitar un aprendizaje activo, es decir, promover el análisis, la síntesis y la evaluación; y 5) hacer uso de tecnología, pues por su ámbito dinámico, favorece la comprensión de los conceptos estadísticos, en particular el de variabilidad.

Por otra parte, según Wild y Pfannkuch (1999), los libros de texto deberían incorporar actividades investigativas, durante el proceso educativo, afines al concepto aleatoriedad, yendo más allá del lanzamiento de dados y cartas, es decir, alejándose del *culto del número* (López-Mojica et al., 2018), orientando la comprensión del estudiantado por medio del modelamiento, representaciones gráficas, realización de inferencias intuitivas, solicitando argumentaciones, y haciendo uso de las herramientas tecnológicas.

Herramientas tecnológicas para el aprendizaje de conceptos probabilísticos

Actualmente, existe consenso en que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) están más presentes que nunca en el sistema escolar (Montiel & Gómez-Zermeño, 2021), potenciando las habilidades que deben desarrollar el alumnado. Donde la simulación juega un rol fundamental en la resolución de problemas, permitiendo transformar un problema desde la ciencia formal a la ciencia factual (Huerta, 2020). En este sentido, D'Angelo et al. (2014) mencionan que la simulación puede considerarse una herramienta educativa esencial porque facilita la interacción y la experimentación en varios escenarios, permitiendo a las y los estudiantes observar, realizar y poner a prueba sus conjeturas.

Asimismo, Homa-Agostinho y Oliveira-Groenwald (2020), en un estudio sobre las posibilidades didácticas de las tecnologías digitales para la educación matemática, en la educación escolar y superior, evidencian que los recursos digitales son positivos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tanto en la educación escolar como en la formación del profesorado. Igualmente, Grisales-Aguirre (2018) los indican como recursos altamente efectivos para motivar al alumnado a la experimentación, propiciando un rol protagónico en su aprendizaje.

En este contexto, autores como Cullen et al. (2020) proponen un modelo para el uso de la tecnología en la enseñanza de la matemática, mediante cuatro componentes: 1) promoción de ciclos de prueba, fase que permite explorar fenómenos matemáticos o estadísticos, mediante la formulación de

conjeturas basadas en la exploración y pruebas, siendo la calculadora y el software una herramienta tecnológica que, si es bien utilizada o instruida por parte del profesorado, permitiría comprobar el tipo de situaciones, más allá de verla como instrumento resolutivo inmediato por parte del estudiantado (MC1); 2) generación y conexión de representaciones, consiste en crear múltiples representaciones gráficas, de manera dinámica y mediante el uso de la computadora, como medio para que las y los estudiantes interactúen con varias formas de plasmar una situación matemática (MC2); 3) razonamiento basado en la evidencia, permite generar, recopilar, organizar, representar y analizar datos, mediante software estadísticos (MC3); y 4) como un alumno, consiste en que el profesor aprenda de los distintos recursos tecnológicos, y a partir de ellos pueda construir sus propios recursos, afines a la enseñanza de cada uno de los contenidos de la matemática (MC4).

METODOLOGÍA

En coherencia con los objetivos propuestos, se ha optado realizar una investigación de corte cualitativa (McMillan & Schumacher, 2011), centrada en el análisis de contenido de las actividades relacionadas con el objeto estadístico aleatoriedad (Krippendorff, 1997), en tres series de libros de texto (texto del estudiante y cuadernos de actividades) de Educación Primaria, entregados por el MINEDUC, en forma gratuita y de acceso abierto, durante los años 2016, 2020 y 2021. Se consideró un muestreo no probabilístico del tipo intencionado, compuesto por cuarenta y dos libros, etiquetando como TE los textos del estudiante y como CA los cuadernos de actividades. Para facilitar la escritura, la Tabla 2 identifica solo los libros de la muestra de estudio que serán usados como referencias y evidencias en la sección resultados.

Para el análisis de contenido se sigue la propuesta de Mayring (2000): en primer lugar definir los libros de texto que serían analizados; en segundo lugar, identificar y seleccionar los capítulos afines a estadística y probabilidad, las secciones y segmentos de información, relacionados con el concepto aleatoriedad; en tercer lugar, identificar códigos emergentes acordes al objeto aleatoriedad, relacionados con unidades de análisis afines a definiciones, a situaciones problemas, a niveles cognitivos que se desean desarrollar, y uso de herramientas tecnológicas. Finalmente, se contrastaron los hallazgos con estudios empíricos y los lineamientos dados por el MINEDUC, Franklin y Garfield (2006), Will y Pfankuch (1999) y por Cullen et al. (2020).

Tabla 2*Libros del estudiante y cuadernos de actividades seleccionados de la muestra*

Código	Autores/Título/Editorial	Año
TE4	Alfaro, S., Espinoza, Y., Cano, S., Texto del estudiante, Matemática 4° Básico, Houghton Mifflin Harcourt.	2016
TE5	Alfaro, S., Espinoza, Y., Riquelme, M., Ainardi, V., Aldunate, V., Falconi, P., Olivares, C., Texto del estudiante, Matemática 5° Básico, Houghton Mifflin Harcourt.	2016
TE7	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., Rupin, P., Texto del estudiante, Matemática 7° Básico, SM.	2016
TE11	Urra, A., Córdova, C., Quezada, C., Texto del estudiante, Matemática 3° Básico, Santillana.	2020
TE14	Maldonado, L., Castro, C., Texto del estudiante, Matemática 6° Básico, Santillana.	2020
TE15	Iturra, F., Manosalva, C., Ramírez, M., Romero, D., Texto del estudiante, Matemática 7° Básico, SM.	2020
TE22	Alvarado, J., Rojas, M., Soto, P., Villalobos, N., Texto del estudiante, Matemática 6° Básico, Santillana.	2021
TE23	Iturra, F., Manosalva, C., Ramírez, M., y Romero, D., Texto del estudiante, Matemática 7° Básico, SM.	2021
CA14	Castro, C., Cuaderno de Actividades, Matemática 6° Básico, Santillana.	2020

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Respecto al concepto aleatoriedad presente en los libros de texto analizados y su relación con los objetivos de aprendizaje declarados, se observa que, no hay una directa relación entre algunos objetivos y el abordaje de ellos en el nivel correspondiente. Para precisar, la Tabla 3 resume la presencia de los objetivos de aprendizajes en los libros de texto en cada nivel escolar.

Tabla 3

Objetivos de aprendizaje y su presencia en los libros de texto de los años 2016, 2020 y 2021, por nivel

Objetivo de aprend.	2016								2020								2021							
	2	3	4	5	6	7	8	8	2	3	4	5	6	7	8	8	2	3	4	5	6	7	8	
OA2									x	x			x	x					x				x	
OA3				x					x	x			x						x		x			
OA4			x	x	x	x			x	x	x	x	x					x	x	x	x	x		
OA5				x	x	x						x								x				
OA6				x	x	x					x		x	x						x	x	x		
OA7						x									x								x	

Se identifica que prevalecen las actividades relacionadas con el objetivo OA4, en la mayoría de los niveles, objetivo de aprendizaje de cuarto

año de Educación Primaria, y que pretende desarrollar el concepto aleatoriedad por medio de experimentos lúdicos y cotidianos, tabulación de datos y representación gráfica. Asimismo, el objetivo de aprendizaje correspondiente al segundo nivel de escolaridad (AO2), cuyo propósito es la recolección y registro de datos en base a juegos con monedas y dados, no se aborda en ninguno de los textos, en el nivel que corresponde, iniciando su desarrollo en el tercer nivel, en el texto del año 2020, y en el cuarto nivel, en el texto del año 2021. Finalmente, llama la atención que, en los textos de los años 2020 y 2021, el objetivo AO5, correspondiente al nivel 5, no es desarrollado en los niveles posteriores, contrario a lo propuesto en el texto del 2016. Cabe destacar que este objetivo está dirigido a la descripción de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando términos como seguro, posible, poco posible, imposible, tendiendo al desarrollo de una probabilidad intuitiva, siendo la base para el desarrollo del pensamiento probabilístico (Batanero, 2005).

En relación con la introducción del concepto aleatoriedad en los libros de texto, se mencionan, mayoritariamente, conceptos como experimento, aleatorio, azar, equiprobable, resultado y probabilidad, y es abordado, predominantemente, en base a juegos rutinarios con monedas, dados y ruletas (OA4). Estrategia metodológica que permite al estudiantado interactuar con experimentos no determinísticos, de manera de provocar aprendizajes en ellos (Zabala-Vargas et al., 2020), además de fomentar el desarrollo del pensamiento probabilístico (Kamii & Rummelsburg, 2008). Asimismo, a partir de quinto hasta séptimo año de Educación Primaria, se evidencia en menor grado, la presencia de preguntas afines a formular hipótesis o conjeturar sobre la tendencia de los resultados obtenidos en experimentos aleatorios (OA6).

Por otra parte, se observa que, en la serie de libros analizados, solamente el de tercer año de primaria, del año 2020, hace mención a la metodología de juegos aleatorios, como recurso de aprendizaje (Gal, 2005), explicitando que:

Los juegos aleatorios son aquellos que dependen del azar. Si un juego no es aleatorio, sabes con anticipación el resultado que conseguirás, es decir, no interviene el azar (TE11, 2020, p.253).

Al respecto, Franklin et al. (2006) observa que el juego es una estrategia didáctica para que el estudiantado desarrolle una comprensión de los conceptos probabilísticos; acorde con el objetivo de aprendizaje OA4.

Ahora, en todas las series de texto analizadas, se definen experimentos aleatorios, como muestran los siguientes extractos:

Un experimento aleatorio es una actividad en la que existe la probabilidad de que haya diferentes resultados (TE5, 2016, p.270).

Un experimento es aleatorio, si al realizarlo bajo las mismas condiciones no se tiene certeza de lo que ocurrirá. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado (TE14, 2020, p.247).

Un experimento es aleatorio, si al realizarse bajo idénticas condiciones produce resultados diferentes. En él no se puede predecir su resultado, aunque se conocen sus posibles respuestas (TE22, 2021, p.185).

En los cuales, las definiciones de los libros de texto de los años 2020 y 2021 son relativamente similares, haciendo mención a que en un experimento aleatorio no se puede predecir los resultados, es decir, de manera implícita se hace mención a la incertidumbre. En cambio, en el libro del año 2016, la definición de experimento aleatorio se aborda desde el concepto probabilidad.

Ahora, en las tres series de libros de séptimo de Educación Primaria, se relaciona el concepto aleatoriedad con espacio muestral, equiprobabilidad, probabilidad y azar, como sigue:

Un experimento aleatorio equiprobable es aquel en el cual todos los resultados posibles tienen igual probabilidad de ocurrencia. El prefijo "equi" significa igual (TE15, 2016, p.344).

Un experimento aleatorio es equiprobable si los sucesos de su espacio muestral son equiprobables, es decir, tienen igual probabilidad de ocurrir (TE23, 2021, p.210).

Además, en el libro de séptimo, del año 2016, se introduce una definición de aleatoriedad, haciendo mención al origen etimológico del concepto, indicando:

Aleatorio significa azaroso, relativo al azar, y se refiere a todo conocimiento incierto. Proviene del latín *aleas*, que significa originalmente dados y luego por extensión azar (TE7, 2016, p.338).

En síntesis, la noción de aleatoriedad en los libros analizados, se introduce inicialmente en el currículo de Educación Primaria, mediante metodologías afines a juegos aleatorios rutinarios y registro de resultados. A

partir del quinto nivel, la noción de aleatoriedad es relacionada con experimento aleatorio y equiprobabilidad, camino que podría llevar al estudiantado a suponer que los resultados de un experimento aleatorio siempre tienen igual probabilidad de ocurrir (Huerta, 2020), así como también, suponer que, si existe una cierta tendencia hacia alguno de los resultados, el fenómeno ya no sería aleatorio Konold (1991).

En relación con las actividades afines al concepto aleatoriedad y las habilidades cognitivas que abordan los libros de texto, en general, se hace referencia a situaciones-problemas rutinarios, o lo que autores como Manouchehri et al. (2012) han denominado, simplemente *ejercicio*. Se identifica que prevalecen las actividades asociadas a juegos de azar como ruletas, dados, cartas y monedas, como se observa en la Tabla 4, las que modelan experimentos aleatorios con respuestas esencialmente equiprobables; lo que podría generar en el estudiantado, el sesgo de la equiprobabilidad, y con ello, la aplicación mecanicista de la Regla de Laplace en el cálculo de probabilidades (Huerta, 2020). Una tendencia similar se evidencia en los cuadernos de actividades.

Tabla 4

Actividades afines al concepto aleatoriedad en los textos del estudiante, en los años 2016, 2020 y 2021, por nivel.

Actividad	2016								2020								2021										
	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7
Ruletas			x	x			x		x	x			x	x	x			x	x	x	x	x					
Dados			x	x	x	x	x		x	x			x	x			x	x	x	x	x	x					
Cartas							x			x			x								x		x				
Monedas	x			x	x		x				x	x	x	x	x	x				x	x	x	x				
Bolsas				x			x		x		x								x								
Tómbola									x		x	x															
Urnas							x	x						x							x	x	x	x			
Tarjetas											x											x	x				
Internet														x	x							x	x				
Excel																							x			x	
Celular														x													

Por otro lado, se identifica en las tres series de libros, el uso del diagrama de árbol para modelar fenómenos aleatorios, como el lanzamiento de dados y monedas. Por ejemplo, en el libro de sexto de primaria, TE14 (p. 247), se muestra el uso de un diagrama de árbol para simular los posibles resultados al lanzar dos dados legales. Cabe hacer notar, que esta representación es

pertinente para modelar y explicitar todas las respuestas asociadas a un experimento aleatorio, permitiendo conocer la cardinalidad del espacio muestral, como así también, “ayuda a comprender la estructura de un experimento y, por lo tanto, a resolver los problemas” (Roldán et al., 2018, p. 56) asociados con él. Sin embargo, su uso no se encuentra señalado explícitamente en los objetivos de aprendizaje de la educación primaria en Chile, descritos en la Tabla 1. Además, en la literatura especializada, y en particular Roldán et al. (2018), observan que el diagrama de árbol es un recurso didáctico que permite representar y estudiar el comportamiento de un experimento aleatorio y el espacio muestral asociado a él, conceptos que son base para el cálculo de probabilidad.

Respecto a las habilidades cognitivas afines al concepto aleatoriedad presentes en las actividades de los libros de texto, el tipo de actividades planteadas se muestra en las Tablas 5 y 6. Al respecto, se observan diferencias en el número de actividades presentes entre los años 2016, 2020 y 2021, prevaleciendo la habilidad afín a la simulación de experimentos aleatorios relacionados con monedas, dados, tómbolas y ruletas.

Tabla 5

Habilidades declaradas en las actividades sobre aleatoriedad en los textos del estudiante, en los años 2016, 2020 y 2021, por nivel

Habilidades	2016						2020						2021					
	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8
Simular		2	6	5	2		8	8	7	17	7	11	4	7	15	7	11	
Clasificar		4			4			3		8	7			16	9	7		
Representar		2	1			6	6	3	1	3	1	3	4	4	6	1	3	
Interpretar								1							1			
Ejemplificar		1			4		3						3					
Conceptual						4		7		4	1				1	1		
Concluir			2				4	6	1	4	1		1	7	13	1	1	
Inferir		4		4			2	1		6	6						6	
Conjeturar											1				4	1		

Además, se identifica también que los textos del estudiante y cuadernos de ejercicio promueven el trabajo procedimental, ofreciendo un escaso desafío cognitivo, como lo observado por Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen (2018). Sin embargo, los textos escolares y cuadernos de actividades del año 2020 presentan una mayor variabilidad en las habilidades, en contraste con los del 2016 y 2021, las que transitan entre lo procedimental, lo conceptual y lo inferencial. Estas, eventualmente, permitirían a los y las estudiantes ahondar en

el concepto aleatoriedad, presentando una mayor demanda cognitiva; escenario que es coherente a lo mencionado por Franklin y Garfield (2006) y por Will y Pfannkuch (1999), en relación al desarrollo de habilidades que permitan la comprensión conceptual, la representación gráfica e inferir resultados, y en menor grado, conjeturar acerca de los resultados obtenidos, respectivamente.

Tabla 6

Habilidades declaradas en las actividades sobre aleatoriedad en los cuadernos de actividades, en los años 2016, 2020 y 2021, por nivel

Habilidades	2016								2020								2021							
	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8						
Simular			9	5	1	6	5	6	9	9	1	8			5	1	1	5	1					
					3						1				0	9		3						
Clasificar					5		2	1	9	7	6	3			1	8	5							
								0							3									
Representar			4	1	1	1	2	4		9	5	5		2	6	2	8	4						
					5																			
Determinar			4	4	7		1		4	7					4	2	5							
Interpretar											3			1										
Ejemplificar																	3							
Conceptuales																	3							
Concluir			1						2	2	1		3		3		1	3	5					
																	4							
Inferir				2					4		5	3	2											
Conjeturar																	2							

Como ejemplo, en una actividad del texto del estudiante de tercer año de primaria, TE11 (p.258), acerca de la extracción de tarjetas, con imágenes de frutas, de una bolsa, se encuentran explícitas las habilidades de simular e inferir acerca del resultado, proponiendo la pregunta "¿es posible saber qué fruta saldrá con anticipación?", facilitando así el desarrollo de un pensamiento estadístico (Franklin & Garfield, 2006). Sin embargo, pese que estos autores y el informe GAISE (2005; 2016), han resaltado la importancia del contexto en las situaciones problemas, esta actividad no hace mención a un contexto atingente a la simulación, de tal forma que permita al estudiantado entregar argumentos acerca de la importancia que tienen las frutas presentes en las tarjetas en su alimentación diaria, acorde a las políticas de una alimentación saludable impulsada en Chile.

Por otro lado, en relación con las habilidades cognitivas superiores, en general se observa una escasa presencia de actividades dirigidas a inferir y

formular conjeturas en los textos del año 2016 y 2021; lo que eventualmente no permitiría desarrollar la habilidad de inferir y, por consiguiente, potenciar a nivel de enseñanza básica una inferencia informal en el estudiantado (Makar & Rubin, 2009).

Acorde a lo mencionado, una de las pocas actividades afines a la habilidad de conjeturar presentadas en el libro de texto TE22 (p. 189), de sexto de primaria, solicita al estudiantado formular conjeturas acerca del comportamiento al lanzar monedas y dados legales. Actividad, que invita a las y los estudiantes a analizar y estudiar la variación de los resultados y, por lo tanto, a desarrollar un pensamiento probabilístico (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Similarmente, en el libro de texto TE22 (p. 185), se solicita al alumnado clasificar el tipo de experimento realizado y representar mediante un diagrama de árbol la probabilidad de obtener un premio bajo ciertas condiciones; representación, que según Sánchez y Ruiz (2020), hace “emerger el uso de datos como evidencia para poder generalizar” (p. 14). Además, esta actividad tiene de manera implícita una componente afin al pensamiento probabilístico, la interpretación de los resultados en el contexto del problema, lo cual conlleva comunicar los resultados con el uso del lenguaje probabilístico (León, 2020), procesos que tienen asociada actividades con una alta demanda cognitiva (Stein & Smith, 1998).

De igual forma, el cuaderno de actividades CA14 (p. 128), de sexto de primaria, presenta una actividad en la cual se entregan los resultados del lanzamiento de un dado, resumidos en una tabla de distribución. Actividad donde se debe simular e inferir acerca de los resultados, es decir, ir más allá de la evidencia empírica haciendo inferencias acerca de su comportamiento, y aproximando al alumnado a la Ley de los grandes Números; tópico que se introduce en los libros de texto de la Educación Secundaria.

En forma análoga, en el libro de texto TE4 (p. 213), de cuarto de primaria, se solicita a dos estudiantes simular, físicamente, el experimento del lanzamiento de un dado, 20 veces, registrar los resultados y representar en un gráfico de barras. Al respecto, esta actividad tiene asociada habilidades esencialmente procedimentales, como la de representar en una tabla la frecuencia los resultados obtenidos y graficarla, que evidencia una baja demanda cognitiva; situación que podría estar centrada en el desarrollo de habilidades de orden superior como la interpretación y la toma de decisiones, en base a información resumida de manera tabular y gráfica, proveniente de un fenómeno no determinístico, lo que eventualmente podría ser fortalecido incorporando el uso de herramientas tecnológicas.

En suma, se evidencia que las actividades presentes en los textos, generalmente muestran una baja demanda cognitiva, centradas esencialmente en habilidades procedimentales, acorde a lo mencionado por Ruiz-Reyes et al. (2017). Estos resultados son similares a los encontrados por Salcedo (2012; 2015) en los libros de texto de Educación Primaria en Venezuela, y por Vásquez et al. (2019) en el caso de los libros de texto chilenos de primer a quinto curso de Educación Primaria, al estudiar los tópicos afines a probabilidad. Sin embargo, se observa que los libros de texto del año 2020, se incorporan actividades que siguen las orientaciones dadas por Franklin y Garfield (2006), presentando actividades que permitirían promover habilidades cognitivas de orden superior, como concluir e inferir en base a resultados.

Respecto al uso de las herramientas tecnológicas en los libros de texto para la enseñanza del concepto aleatoriedad, estas fueron analizadas mediante al modelo de Cullen et al. (2020), lo que se resume en la Tabla 7. En general se observa que estas pueden ser clasificadas en la categoría *razonamiento basado en la evidencia*, es decir, permiten generar y analizar los fenómenos aleatorios mediante el uso de computadoras y Apps. También se identifica un escaso uso de herramientas tecnológicas, pese a que existe un aumento en los años 2020 y 2021; lo que podría ser producto de la educación remota que se debió implementar en respuesta a la contingencia sanitaria, producto de la COVID-19.

Tabla 7

Actividades afines al modelo propuesto por Cullen et al. (2020) sobre el uso de la tecnología en los textos del estudiante

Categorías	2016						2020						2021					
	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8
MC1										x								x
MC2																		
MC3						x				x	x					x	x	
MC4						x				x	x	x				x	x	x

Asimismo, no se observan actividades que apunten a generar y conectar múltiples representaciones gráficas en forma dinámica mediante el uso de la computadora (MC2). Finalmente, en relación a hacer uso de la calculadora y los softwares para explorar fenómenos estadísticos, mediante la formulación de conjeturas basadas en la exploración (MC1), solo se evidencian actividades en el nivel 6, en los años 2020 y 2021, siendo una actividad valiosa para el

desarrollo del pensamiento probabilístico, la que debería ser implementada en todos los niveles.

Como ejemplo, en los textos TE14 (p. 254) y TE22 (p. 191) se identifican dos actividades, para estudiantes de sexto de primaria, donde se les pide simular un fenómeno aleatorio mediante herramientas tecnológicas. En la primera actividad, se les pide simular el lanzamiento de una moneda, la cantidad de veces que se elija, mediante una aplicación del celular y registrando los resultados. En la segunda actividad, se hace referencia a la función *aleatorio.entre* de Excel, para simular el lanzamiento de un dado, y validar las conjeturas y resultados obtenidos al realizar el juego en forma física; propiciando en el estudiantado el desarrollo de habilidades de orden superior como conjeturar sobre el comportamiento de un fenómeno no determinístico.

Finalmente, se identifica en TE15 (p. 218) la entrega de un link de acceso a la plataforma MINEDUC, para simular el lanzamiento de dos dados. Actividad donde se solicita solo registrar los resultados obtenidos y cuantificar el espacio muestral. Se observa que esta actividad es esencialmente procedimental, quedando el desafío al profesorado de potenciar dichas actividades de manera que se desarrollen habilidades superiores como la argumentación, inferir y conjeturar.

Por otra parte, se evidencia también que los cuadernos de actividades no presentan situaciones-problemas donde intervengan herramientas tecnológicas para simular experimentos aleatorios. Lo que revela un desfase entre lo teórico (libros de texto) y la práctica (cuadernos de ejercicio), evidenciando una falta de articulación entre estos.

CONCLUSIÓN

De acuerdo con los resultados obtenidos, independiente de la serie de libros analizados, el concepto aleatoriedad es introducido mediante el uso de metodologías de enseñanza afines a juegos aleatorios y conceptos asociados a experimento aleatorio, azar, aleatorio y espacio muestral, sin ahondar en la definición de algunos conceptos cardinales como azar y aleatoriedad, con el fin de promover el desarrollo de habilidades que permitan que el alumnado “tenga un suficiente dominio del lenguaje para entender los problemas que se les plantean, resolver las tareas, comunicar las soluciones encontradas y justificarlas” (Hernández-Salmerón et al., 2017, p.306).

Además, las tareas planteadas, se relacionan con problemas rutinarios afines a los juegos de azar, como el lanzamiento de dados, monedas y ruletas entre otros, las que permiten aprovechar las experiencias personales del alumnado (Makar, 2009), en coherencia con lo mencionado en el currículo escolar chileno para la educación escolar primaria (OA2, OA3 y OA4); aun cuando esta mirada es esencialmente sesgada, ya que gran parte de los fenómenos aleatorios, con los cuales debemos interactuar diariamente, no se comportan de esta manera (Huerta, 2020). Más aún, es escasa la presencia de actividades provenientes de contextos reales, lo cual permitiría que el estudiantado reflexione, argumente y de sentido a los hallazgos encontrados.

Asimismo, los libros de texto introducen los diagramas de árbol, representaciones que no son mencionadas en los objetivos de aprendizaje, lo que según Roldán et al. (2018) permiten describir de manera sintética el comportamiento de un fenómeno aleatorio, permitiendo ir “de lo abstracto a lo particular” (p.62). Lo cual, desde nuestra experiencia, es un acierto de los textos escolares incorporarlos en el nivel primario.

Por otra parte, las actividades, generalmente muestran una baja demanda cognitiva, dado que esencialmente el estudiantado se enfrenta a actividades que se centran en conocer definiciones, llevar a cabo procedimientos establecidos y replicar o simular los mismos experimentos que son mencionados en los ejemplos, fomentando en general el trabajo procedimental y algorítmico. Lo que eventualmente, no permitiría que el alumnado, adquiera las habilidades y conocimientos relacionados con el concepto aleatoriedad, de manera de formar ciudadanos con un pensamiento probabilístico, puesto que el concepto aleatoriedad se relaciona con la comprensión del concepto probabilidad. Sin embargo, los libros de texto, de los años 2020 y 2021, introducen algunas tareas que eventualmente permitirían desarrollar habilidades de alto nivel cognitivo, como son concluir e inferir (Stein & Smith, 1998). Al respecto, consideramos que los libros de texto deberían jugar un papel más preponderante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas relacionados con la probabilidad, de manera de dar respuesta a cabalidad al OA5 y no parcialmente, como se evidencia en los resultados entregados.

Por otro lado, las actividades presentes en los libros de texto hacen referencia a un número escaso de actividades relacionadas con el uso de herramientas tecnológicas declaradas en los objetivos de aprendizaje OA4, OA6 y OA7. Las que, en general, promueven el aprendizaje activo del estudiantado, favoreciendo la comprensión de conceptos cardinales afines a

probabilidad. Sin embargo, en los libros de texto de los años 2020 y 2021, se identifica más presencia de actividades que incorporan el uso de herramientas tecnológicas, las que desde nuestro punto de vista deberían permitir al profesorado facilitar el abordaje de conceptos probabilísticos y la comprensión de los mismo.

Finalmente, el presente estudio proporciona evidencias sobre la forma en que se está abordando en los textos escolares, uno de los objetos estadísticos fundamentales en probabilidad: la aleatoriedad; las que podrían orientar la reflexión en torno a núcleos temáticos, para profundizar en aspectos conceptuales afines a la probabilidad, de tal forma que se oriente en la formación del profesor, en el diseño de sus planificaciones e implementación, articuladas con las actividades que proponen los programas de estudio y los libros de texto.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

F.R.A. concibió la idea de la investigación presentada. F.R.A. recopiló los datos. Los tres autores (F.R.A., M.A. y D.D.L.) participaron activamente en el desarrollo de la teoría, la metodología, organización y análisis de los datos, discusión de resultados y aprobación de la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de esta investigación serán puestos a disposición por el autor de correspondencia F.R.A., previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto FONDECYT de INICIACIÓN 11220295. Financiado por la Agencia de Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID).

REFERENCIAS

- Alsina, Á. & Salgado, M. (2019). Ampliando los conocimientos en Educación Infantil: la incorporación de la probabilidad. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 18(36), 225-240.
- Ayer, A.J. (1974). El Azar. En M. Kline (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 172-181). Blume.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2016). Understanding randomness. Challenges for research and teaching. En K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). ERME.
- Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., & Contreras, J.L. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 222-245.
- Bergwall, A. (2019). Proof-related reasoning in upper secondary school: characteristics of Swedish and Finnish textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(5), 731-751. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1704085>
- Chance, B.L. (2002). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. *Journal of Statistics Education*, 10(3). www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html
- Cullen, C., Hertel, J., & Nickels, M. (2020). The roles of technology in Mathematics Education. *The Educational Forum*, 84(2), 166-178. <https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683>
- D'Angelo, C., Rutstein, D., Harris, C., Bernard, R., Borokhovski, E., & Haertel, G. (2014). *Simulations for STEM learning: systematic review and meta-analysis executive summary*. SRI International
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of student's thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167-180.
- Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson

Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 293-310.
<https://doi.org/10.1007/s10857-018-09423-y>

- Estrella, S., Olfos, R., & Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*, 41(2), 477-493.
- Franklin, C. & Garfield, J.B. (2006). The GAISE Project: developing statistics education guidelines for Pre K-12 and College Courses: 2006 NCTM Yearbook. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance: 2006 NCTM Yearbook* (pp. 345-376). NCTM.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting reseachs and teaching practice*. Springer.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citezens: Building blocks and instructional dilemas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer.
- GAISE (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education: College report*. ASA.
- GAISE (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A curriculum framework for PreK-12 statistics education*. ASA
- Grisales-Aguirre, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2),198-214.
- Hernández-Salmerón, E., López-Martín, M.M., & Batanero, C. (2017). Estudio exploratorio sobre el lenguaje del azar en Educación Secundaria Obligatoria. In J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 305-314). SEIEM.
- Homa-Agostinho, I. & Oliveira-Groenwald, C. (2020). Digital information and communication technologies as a didactic resource in the mathematics curriculum. *Uniciencia*, 34(2), 153-170.
- Huerta, P.M. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *RELIME*, 23(1), 79-102. <https://doi.org/10.12802/relime.20.2313>
- Inzunza, S. (2014). Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. En J. Asenjo, O. Macías, & J.C. Toscano (Eds.),

Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (pp. 1-11). OEI.

- Kamii, C. & Rummelsburg, J. (2008). Arithmetic for first graders lacking number concepts. *Teaching Children Mathematics*, 14(7), 389-394.
- Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Kluwer.
- Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- León, N. (2020). Alcances de la enseñanza de la estadística a través de la investigación en la educación media en Venezuela. *Paradigma*, 41, 657-684.
- Liu, Y. & Thompson, P. (2002). Randomness: Rethinking the foundation of probability. In D. Mewborn, P. Sztajn, E. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the Twenty Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1331-1334). PME-NA.
- López-Mojica, J.M., Ojeda-Salazar, A.M., & Salcedo-Prado, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 9(17), 87-102.
https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v9i17
- Manouchehri, A., Zhang, P., & Liu, Y. (2012). Forces hindering development of mathematical problem solving among school children. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, Seoul, Korea.
- Makar, K. & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- Martins, M.E. (2011). Como estimar a probabilidade de um acontecimento por simulação. In *Actas ProfMat 2011* (pp. 1-16). APM.
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum Qualitative Social Research*, 1(2), 20. <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>

- McMillan, J. & Schumacher, S. (2011). *Investigación educativa*. Pearson-Adisson Wesley.
- MINEDUC (2012a). *Bases Curriculares de Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2012b). *Bases Curriculares para la Educación Básica*. Ministerio de Educación.
- MINEDUC (2008). *Política de textos escolares*. Ministerio de Educación.
- MINEDUC (2015). *Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Montiel, H. & Gomez-Zermeño, M.G. (2021). educational challenges for computational thinking in k–12 education: a systematic literature review of “scratch” as an innovative programming tool. *Computers*, 10(6), 69. <https://doi.org/10.3390/computers10060069>
- Occeli, M. & Valeiras, N. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 133-152.
- Ortiz, J.J., Batanero, C., & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Pea, R.D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.
- Penalva, M.C. & Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la Educación Secundaria. En J.M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 27-51). GRAO.
- Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 27-46. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302>
- Ramírez, G. & Batalha, A. (2019). Aprendizaje de la aleatoriedad y conceptos asociados: un estudio en secundaria con apoyo de Geogebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 20(1), 1-13. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v20i1.4591>
- Renelle, A., Budgett, S., & Jones, R. (2021). New Zealand teachers' generation problem misconceptions. *Teaching Statistics*, 43(2), 56-61. <https://doi.org/10.1111/test.12248>

- Roldán, A., Batanero, C., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en probabilidad y combinatoria. *Épsilon*, 100, 49-63.
- Ruiz-Reyes, K., Begué, N., Batanero, C., & Contreras, J.M. (2017). Un estudio comparativo de los contenidos del muestreo en la Educación Secundaria Obligatoria en Chile. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(3), 67-83. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i3p67-83>
- Ruiz López, N. (2015). La enseñanza de la estadística en la Educación Primaria en América Latina. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 13(1), 103-121.
- Sánchez, N. & Ruiz, B. (2020). Análisis de las actividades propuestas en dos programas de estudio chilenos en el eje de Estadística y Probabilidad. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, e776. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.776
- Salcedo, A. (2012). Análisis de las actividades para el estudiante en los libros de matemáticas. *Investigación y Postgrado*, 27(1), 83-109.
- Salcedo, A. (2015). Exigencia cognitiva de las actividades de estadística en textos escolares de Educación Primaria. En J.M. Contreras, C. Batanero, J.D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina y M.M. Gea, & M.M. López-Martín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 307-315). Universidad de Granada.
- Shield, M. & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- Stein, M.K. & Smith, M.S. (1998). Mathematics tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Vásquez, C., Pincheira, N., Piñeiro, J., & Díaz-Levicoy, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *Bolema*, 33(65), 1133-1154. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a08>
- Van Zanten, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM*, 50(7), 827-838.

- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Zabala-Vargas, S.A., Ardila-Segovia, D. A., García-Mora, L. H., & Benito-Crosetti, B. (2020). Aprendizaje Basado en Juegos (GBL) aplicado a la enseñanza de la matemática en educación superior. Una revisión sistemática de literatura. *Formación Universitaria*, 13(1), 13-26.
- Zisimos B., & Tasos P. (2021) Understanding 15-year-old students' conceptions of randomness through their 'potential worlds': a qualitative analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(2), 237-258.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1676928>