

Aplicações no ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral através de experimentos envolvendo temperaturas

Denise Helena Lombardo Ferreira
Júlio César Penereiro

RESUMO

O objetivo deste artigo é mostrar que a partir de dados reais é possível usar vários conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral tornando a aprendizagem desses conteúdos mais significativa para os estudantes. Nesse aspecto, empregamos a Modelagem Matemática como um caráter utilitário de conteúdos matemáticos. Apresentamos algumas sugestões de atividades envolvendo esses conteúdos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, sobretudo aqueles relacionados à integração numérica, mediada pelo programa Excel e com medidas de temperaturas realizadas por dois experimentos diferentes. Desta maneira, esperamos atender algumas das expectativas dos estudantes, como vincular os conceitos matemáticos enfocados em sala de aula com a realidade do cotidiano e aliados à tecnologia disponível.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem. Cálculo. Aplicações.

Teaching and learning applications of differential and integral calculus through experiments involving temperatures

ABSTRACT

The aim of this article is to demonstrate how possible is the use of various contents of Differential and Integral Calculus in order to turn the learning of such contents more meaningful for the students. In this regard we use Mathematical Modeling as an utilitarian character of mathematical contents. We present some suggestions for activities involving such topics related to Differential and Integral Calculus, especially those related to numerical integration, mediated by the software Excel using temperatures measurements carried out by two different experiments. In this way, we hope to meet some of the students' expectations, linking the mathematical concepts covered in classroom with the reality of daily life combined with available technology.

Keywords: Teaching and learning. Calculus. Applications.

Denise Helena Lombardo Ferreira é Doutora em Educação Matemática (UNESP/Rio Claro, 2000), professora titular da Faculdade de Matemática do CEATEC/PUC-Campinas. Endereço para correspondência: Rod. Dom Pedro I, Km 136 – Parque das Universidades, Campinas (SP) – CEP 13086-900. E-mail: lombardo@puc-campinas.edu.br

Júlio César Penereiro é Doutor em Astrofísica (IAG – USP, 1993), é professor titular da Faculdade de Matemática do CEATEC/PUC – Campinas. Rod. Dom Pedro I, Km 136 – Parque das Universidades, Campinas/SP – CEP 13086-900. E-mail: jcp@puc-campinas.edu.br

Acta Scientiae	Canoas	v. 12	n.1	p.67-82	jan./jun. 2010
----------------	--------	-------	-----	---------	----------------

INTRODUÇÃO

Estudantes de todos os níveis de escolaridade, como bem se sabe, apresentam dificuldades de aprendizagem nos conteúdos matemáticos. Encontramos na literatura estudos que buscam entender as razões dessas dificuldades e, ao mesmo tempo, procuram encontrar alternativas para o ensino desses conteúdos (CURY, 2007; POCHULU, 2004; FERREIRA; BRUMATTI, 2009a).

Experiências realizadas em diversas Instituições de Ensino Superior comprovam que é comum encontrarmos, entre alunos dos cursos de engenharia, um elevado número de reprovações na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). É urgente a necessidade da adoção de novos comportamentos no que concerne à prática docente dessa disciplina, com o intuito de promover um aprendizado mais significativo. Nesse contexto, entendemos por significativo a possibilidade de envolver o estudante em conteúdos matemáticos com problemas que sejam motivadores e que, por exemplo, estejam relacionados a temas da sua realidade, isto é, associados a assuntos direcionados ao meio ambiente, à saúde pública, a demanda de energia, etc. Isso ocorre naturalmente quando fazemos uso dessa estratégia, empregando a Modelagem Matemática para o ensino e aprendizagem. O que possibilita o tratamento de situações reais, resgatando não apenas a construção desses conteúdos matemáticos, como também a investigação, a reflexão e a argumentação crítica. É justamente essa a proposta utilizada por Bassanezi (2002, p. 16), quando afirma que “[...] a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Nesse ambiente, as ações são voltadas para a experimentação, visualização, interpretação e, mesmo, a previsão de um fenômeno. Além disso, a Modelagem Matemática pode auxiliar os estudantes a identificarem aplicações em outras áreas do conhecimento e em diferentes contextos, servindo como um mecanismo para se concretizar a interdisciplinaridade.

Zbiek e Conner (2006) destacam alguns objetivos a serem alcançados ao se empregar a Modelagem Matemática em sala de aula, como preparar os estudantes para trabalhar profissionalmente com a modelagem, motivá-los mostrando as aplicabilidades das ideias matemáticas no mundo real e fornecer oportunidades para que eles as integrem com outras áreas do currículo.

Muitas dessas habilidades, como raciocinar, analisar, argumentar com clareza, demonstrar ideias, lidar com informação e tecnologia, podem ser favorecidas pelo desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Essas habilidades requerem interação, colaboração, cooperação, participação ativa, envolvimento em atividades de estudo, socialização de ideias, capacidade de argumentação e síntese, capacidade de expressar ideias próprias, disposição para rever os resultados obtidos que se alinham aos cenários para investigação propostos por Skovsmose (2008). Para o autor, “[...] um cenário para a investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações” (SKOVSMOSE, 2008, p. 21).

Nos últimos anos alguns livros de CDI como os de Anton, Bivens e Davis (2007), Stewart (2008), Thomas et al. (2005), dentre outros, abordaram aplicações da Matemática

em situações do cotidiano. Stewart (2008), por exemplo, ao enfatizar a compreensão dos conceitos no ensino de CDI, destacou que a visualização e as experiências numéricas e gráficas, entre outras ferramentas, alteram fundamentalmente a forma como ensinamos os raciocínios conceituais. Além desses, diversos outros pesquisadores têm discutido a aplicação da Modelagem Matemática no ensino de CDI (ARAÚJO; BARBOSA, 2005; SANT'ANA, 2004; FREITAS; SANT'ANA, 2007).

Quando o professor e seus estudantes se envolvem conjuntamente nos procedimentos relacionados diretamente com a modelagem (especialmente na seleção dos temas, coleta dos dados e escolha dos modelos matemáticos) e na abordagem dos conteúdos matemáticos, essa atitude pedagógica de atuar com a Modelagem Matemática se aproxima do que Barbosa (2001) considera como sendo de “nível 3”. Segundo esse pesquisador, a partir de um tema gerador, os alunos coletam informações qualitativas e quantitativas relacionadas com o assunto de interesse, formulam e solucionam problemas. Entretanto, essa forma de atuação exige dos estudantes muitas horas de atividades extraclasse, o que torna inviável sua aplicação para aqueles que exercem atividades profissionais.

Barbosa (2001) considera igualmente outras duas possibilidades: nível 1 – abordando a “problematização” de algum episódio “real”, quando a uma dada situação (que pode até ter sido extraída de um livro texto) é associada a problemas; nível 2 – abordando o cenário no qual o professor apresenta um problema aplicado, sendo que os dados necessários para a solução desse problema são coletados pelos próprios alunos durante o processo de investigação.

Dando prioridade ao nível 1 na classificação de Barbosa, interagimos com professores para levantar dados, informações e problemas relacionados especificamente com a área de Engenharia Elétrica com a finalidade de construir modelos matemáticos que utilizam conceitos de CDI. No que se refere ao ensino e aprendizagem, são fatores importantes e motivadores aqueles que interligam os conteúdos adquiridos de outras disciplinas (Física Básica, Eletrônica e Circuitos Elétricos) em que o estudante está envolvido na fase de sua formação com os do CDI. Outro aspecto a ser destacado é a eventual necessidade de resgatar conteúdos matemáticos e de ciências explorados no Ensino Básico. Com isso, espera-se que as dificuldades de aprendizagem possam ser amenizadas, uma vez que o estudante estará envolvido com informações relacionadas aos seus interesses.

Ferreira (2003) destaca que a Escola não pode se restringir à transmissão de conteúdos, mas deve, principalmente, ensinar o estudante a pensar e questionar, de modo a substituir conteúdos descontextualizados por situações de seu interesse, de maneira a permitir a análise crítica e aplicação dos seus conhecimentos. Nessa mesma linha, Candau (2002) assinala que a Escola deve ser um espaço de diálogo entre os diferentes saberes: científico, social, escolar, que incorpore a análise crítica, a capacidade reflexiva e que conceba a cidadania como uma prática social cotidiana. Essa Escola idealizada é um espaço de busca e de desafios.

A Modelagem Matemática pode favorecer um ambiente de colaboração docente que, embora desejável, não é usual, pois é comum o professor atuar sozinho no desenvolvimento de suas disciplinas. Assim, como afirma Kenski (2007), professores

isolados desenvolvem disciplinas isoladas, sem maiores articulações com temas e assuntos que têm tudo a ver um com o outro, mas que fazem parte dos conteúdos de outra disciplina, ministrada por outro professor (KENSKI, 2007, p.45). Goddard, Goddard e Tschannen-Moran (2007) assinalam que são raros os exemplos de colaboração docente entre professores, quer estejam ministrando a mesma disciplina em turmas diferentes, quer sejam professores responsáveis por disciplinas diferentes ministradas para um mesmo grupo de estudantes.

Destacamos neste artigo a inclusão da tecnologia, tanto na aquisição dos dados por meio de dois diferentes sensores de temperaturas, como pelo uso do programa *Microsoft Excel* (Excel) na manipulação dessas informações, fortalecendo o fato que trabalhar com medições reais demanda o uso de ferramentas computacionais, o que acaba sendo um fator de motivação para o estudante. Nessa mesma linha, Lévy (1999) ressalta as possibilidades de novas estratégias e critérios que são necessários para a construção do conhecimento, como o de um conhecimento por simulação, típico da cultura da informática. Para o autor, o conhecimento é produzido pela simulação e experimentação. Dessa forma, a utilização desses recursos, particularmente na educação, ocupa uma posição central e, por isso, é importante refletir sobre as mudanças educacionais provocadas por essas tecnologias, propondo novas práticas docentes e buscando proporcionar experiências de aprendizagem significativas. Seria muito desejável um ensino que demandasse desafios constantes, focando o professor na colaboração, interação, síntese e na forma de expressar as suas ideias para com seus estudantes.

O objetivo deste artigo é mostrar que, a partir de dados reais, é possível utilizar vários conteúdos de CDI tornando a aprendizagem desses conteúdos mais significativa e suprir parte dos anseios dos estudantes. Na sequência, apresentamos algumas aplicações dos conteúdos de CDI relacionadas com os dados obtidos de temperaturas em dois experimentos realizados em uma Universidade particular de Campinas, Estado de São Paulo.

FORMULAÇÃO GERAL

Muitas vezes as informações numéricas são resumidas calculando-se algum tipo de média ou valor médio dos dados observados. Em Estatística, normalmente o estudante aprende que há vários tipos de média, porém, a mais comum é a média aritmética, que é obtida somando-se os dados e dividindo-se pelo número deles, ou seja, a média de n números é a soma dos números dividida por n . Para o caso de uma função contínua f em um intervalo $[a, b]$, o valor médio é obtido dividindo-se esse intervalo em n sub-intervalos de comprimentos iguais¹ e calcula-se o valor de f em um ponto c_k em cada sub-intervalo. Assim, a média dos n valores amostrados é dada por (THOMAS et al., 2005):

¹ O comprimento do sub-intervalo é dado por $\Delta x = (b - a) / n$.

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k) = \frac{\Delta x}{b-a} \sum_{k=1}^n f(c_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x. \quad (1)$$

O termo $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$ é uma soma de Riemann para f em $[a, b]$, logo a média é dada por $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Isso nos leva a seguinte definição para o valor médio:

Definição: Valor Médio (Média).

Se f for integrável em $[a, b]$, então seu valor médio (média) em $[a, b]$ é dado por (THOMAS et al., 2005):

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Isso acarreta o teorema do Valor Médio para integrais definidas:

Teorema: Seja $f(x)$ contínua no intervalo em $[a, b]$, então em algum ponto c em $[a, b]$, temos (THOMAS et al., 2005):

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

O valor médio de uma função $f(x)$ pode ser interpretado como a taxa média de variação de qualquer primitiva $F(x)$ de $f(x)$ (isto é, $F'(x) = f(x)$) no mesmo intervalo (HOFFMANN; BRADLEY, 2008).

Se $f(x) \geq 0$ $f(x)$ em $[a, b]$, então $f(c)$ tem a interpretação geométrica dada por (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007):

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

ou seja, o lado esquerdo dessa equação é a área de um retângulo com altura $f(c)$ e comprimento de base $b-a$, e o lado direito é a área sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ (Figura 1).

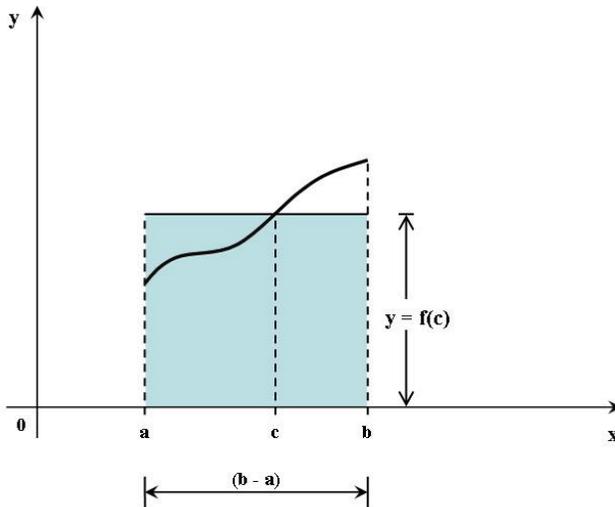


FIGURA 1 – Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio para $f(c)$.

O cálculo de integrais aparece constantemente na resolução dos mais variados problemas para um estudante de Ciências Exatas. Muitas vezes esses cálculos não podem ser determinados explicitamente por fórmulas simples e, nesses casos, somos conduzidos à resolução numérica. Os principais métodos de integração baseiam-se na substituição da função por polinômios interpoladores e na respectiva integração destes. A seguir apresentamos duas regras de integração numérica, a saber, a Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, cujos polinômios interpolam $f(x)$ em pontos do intervalo $[a, b]$ igualmente espaçados.

Regra dos trapézios

Quando não podemos determinar uma primitiva para uma função f que precisamos integrar, podemos aproximá-la, por exemplo, por meio de um polinômio do 1º grau, isto é, uma função linear. Para isso, precisamos de apenas dois pontos: $a = x_0$ e $b = x_1$. Seja Δx o comprimento do intervalo, então $x_1 = x_0 + \Delta x$. O polinômio de Lagrange de 1º grau que interpola esses pontos é dado por (RUGGIERO; LOPES, 1996):

$$f(x) \approx P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{-\Delta x} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{\Delta x} f(x_1) \quad (5)$$

Com a aproximação de $f(x)$ dada pela eq. (5), obtemos o valor aproximado da integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ dado por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)dx = \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + f(x_1)) \quad (6)$$

Ou seja, a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b] = [x_0, x_1]$ pode ser aproximada pela área do trapézio de altura $\Delta x = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

Para melhorarmos essa aproximação podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de igual comprimento $\Delta x = (b - a) / n$, e, nesse caso, o gráfico de f em $[a, b]$ pode ser aproximado por um segmento de reta em cada sub-intervalo, obtendo desta maneira a Regra dos Trapézios Generalizada:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \quad (7)$$

Regra 1/3 de Simpson

Diferentemente da Regra dos Trapézios, a Regra 1/3 de Simpson usa um polinômio interpolador do 2º grau, isto é, uma função quadrática, para aproximar $f(x)$. Para isso, precisamos de três pontos: x_0, x_1, x_2 , onde: $a = x_0$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $b = x_2 = x_0 + 2\Delta x$, e ainda $\Delta x = (b - a) / n$, ou seja, um número par de sub-intervalos. O polinômio de Lagrange de 2º grau que interpola esses pontos é dado por (RUGGIERO; LOPES, 1996):

$$f(x) \approx P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-\Delta x)(-2\Delta x)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(\Delta x)(-\Delta x)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(2\Delta x)(\Delta x)} f(x_2) \quad (8)$$

Com a aproximação de $f(x)$ dada pela eq. (8) e usando mudança de variável para resolver a integral de $P_2(x)$ no intervalo $[a, b]$ (RUGGIERO; LOPES, 1996), obtemos o valor aproximado da integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ dado por:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \quad (9)$$

Da mesma forma que procedemos na Regra dos Trapézios, para melhorarmos a aproximação, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de igual comprimento $\Delta x = (b - a) / n$ e, nesse caso, o gráfico de f em $[a, b]$ pode ser aproximado por uma função quadrática a cada par de intervalos sucessivos, obtendo desta maneira a Regra 1/3 de Simpson Generalizada:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \quad (10)$$

AQUISIÇÕES E MÉTODOS DE REDUÇÕES DOS DADOS

Objetivando o emprego do teorema dado pela eq. (2), vamos validar o valor médio das temperaturas provenientes de duas técnicas experimentais distintas: 1) medidas de temperaturas obtidas na Praça de Alimentação do campus universitário; 2) medidas de temperaturas provenientes de um Aquecedor Solar de Baixo Custo localizado no mesmo campus. A seguir detalhamos cada um dos procedimentos de aquisições e reduções dos dados, empregando os conteúdos da teoria da disciplina CDI abordada no item anterior e intermediada através do Excel. Vale destacar que este artigo foi elaborado empregando este programa, sendo que os valores da média e do desvio-padrão foram todos obtidos através do uso da *Ferramenta Estatística*.

Medidas das temperaturas na Praça de Alimentação

Os dados referentes às temperaturas na Praça de Alimentação foram medidos por um sensor digital de temperatura do tipo LM61 (NATIONAL, 2009). A interface entre o sensor e o computador foi desenvolvida por alunos bolsistas de Iniciação Científica do curso de Engenharia Elétrica em outras aplicações. A Figura 2 ilustra o sensor utilizado no experimento. As informações coletadas por esse sensor estão contidas na Tabela 1. Os dados aqui analisados foram coletados no dia 08 de outubro de 2008 no período de [17:26] a [18:14], com intervalo de um minuto. A Figura 3 ilustra o comportamento da temperatura em função do tempo.



FIGURA 2 – Ilustração do sensor de LM61 usado no experimento da Praça da Alimentação.

TABELA 1 – Dados de temperatura obtidos na Praça de Alimentação através do sensor digital LM61.

Hora	Tempo (min.)	Temperatura (°C)	Trapézios	1/3 de Simpson
[17:26]	0	21,0667	21,0667	21,0667
[17:27]	1	21,1600	42,3200	84,6400
[17:28]	2	21,2000	42,4000	42,4000
[17:26]	3	21,2000	42,4000	84,8000
.
.
[18:09]	46	22,0400	44,0800	44,0800
[18:10]	47	22,0000	44,0000	88,0000
[18:11]	48	22,0000	22,0000	22,0000

O valor médio e o desvio-padrão da temperatura (terceira coluna da Tabela 1) foi de: $21,2688 \pm 0,2981$ °C. Inferimos o valor da integral de $f(x)$ no intervalo $[17:26] \leq x \leq [18:11]$ ou equivalentemente, $0 \leq x \leq 48$, assumindo [17:26] o instante inicial, pela Regra dos Trapézios (quarta coluna, Trapézio, Tabela 1). Empregando a eq. (7) para a Regra dos Trapézios, obtemos o valor da integral igual a 1020,6394 e usando a eq. (3) encontramos a temperatura média dada por:

$$T = \frac{1}{48 - 0} (1020,6394) = 21,2633 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (11)$$

com desvio-padrão de 0,0055 °C.

Da mesma forma, mas agora empregando a eq. (10) para a Regra 1/3 de Simpson (quinta coluna, 1/3 de Simpson, da Tabela 1), inferimos o valor para a integral igual a 1020,6346. Assim, por analogia ao passo anterior, encontramos que o valor da temperatura média é dado por:

$$T = \frac{1}{48 - 0} (1020,6346) = 21,2632 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (12)$$

com desvio-padrão de 0,0056 °C.

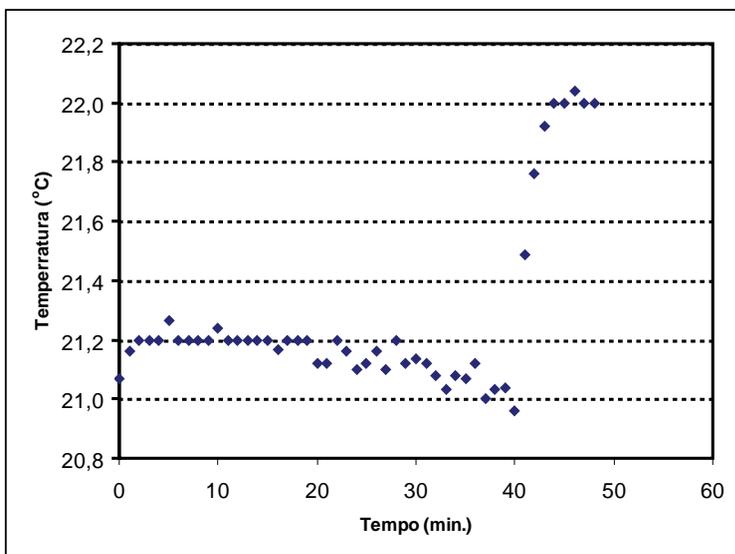


FIGURA 3 – Comportamento da temperatura em função do tempo para medidas feitas na Praça da Alimentação.

Medidas das temperaturas de um aquecedor solar de baixo custo

Similarmente, aplicamos os mesmos procedimentos numéricos para as medidas de temperaturas provenientes de um aquecedor solar de água construído com material de baixo custo, instalado no campus universitário (Figura 4). Maiores detalhes sobre a construção desse equipamento podem ser verificados em Melo, Penereiro e Ferreira (2009). A fim de determinar a eficiência do equipamento foram instalados sensores digitais de temperaturas do tipo DS1820, como ilustrado na Figura 4 (DALLAS, 2009), de forma que foram realizadas medidas de temperaturas do ambiente e de vários pontos específicos do aquecedor. Essas medidas foram realizadas em ensaios diários utilizando um intervalo de 10 minutos entre cada medição. Optamos por trabalhar apenas com os dados referente a um sensor (localizado após a saída dos painéis solares), medido no ensaio do dia 16 de fevereiro de 2009 no período de [06:06:07] a [23:46:07]. A Figura 5 ilustra o comportamento da temperatura em função do tempo.



FIGURA 4 – Imagem do Aquecedor Solar desenvolvido (à esquerda). Imagem do sensor de temperatura DS1820 utilizado no experimento (à direita).

A Tabela 2 apresenta os dados medidos nesse período e, com o emprego do Excel, calculamos o valor médio da temperatura e seu desvio padrão, obtendo: $35,2654 \pm 11,1423$ °C. Pelos mesmos procedimentos adotados na seção anterior, encontramos o valor da integral de $f(x)$ no intervalo de $0 \leq x \leq 1060$, assumindo [06:06:07] o instante inicial, pelas Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson (quarta e quinta colunas, Trapézios e 1/3 de Simpson, respectivamente, Tabela 2) com os valores de 37633,5000 e 37497,6667, respectivamente.

Em seguida, encontramos os valores da temperatura média por esses métodos dados pelas eqs. (13) e (14), respectivamente.

$$T = \frac{1}{1060 - 0} (37633,5000) = 35,5033 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (13)$$

e

$$T = \frac{1}{1060 - 0} (37497,6667) = 35,3752 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (14)$$

com desvios-padrão iguais a $0,2379$ °C e $0,1097$ °C, respectivamente.

TABELA 2 – Dados de temperatura obtidos no Aquecedor Solar através do sensor digital DS1820.

Hora	Tempo	Temperatura (°C)	Trapézios	1/3 de Simpson
[06:06:07]	0	20,1000	20,1000	20,1000
[06:16:07]	10	20,0000	40,0000	80,0000
[06:26:07]	20	19,9000	39,8000	39,8000
[06:36:07]	30	20,0000	40,0000	80,0000
.
.
.
[23:26:07]	1040	28,5000	57,0000	57,0000
[23:36:07]	1050	27,5000	55,0000	110,0000
[23:46:07]	1060	26,6000	53,2000	26,6000

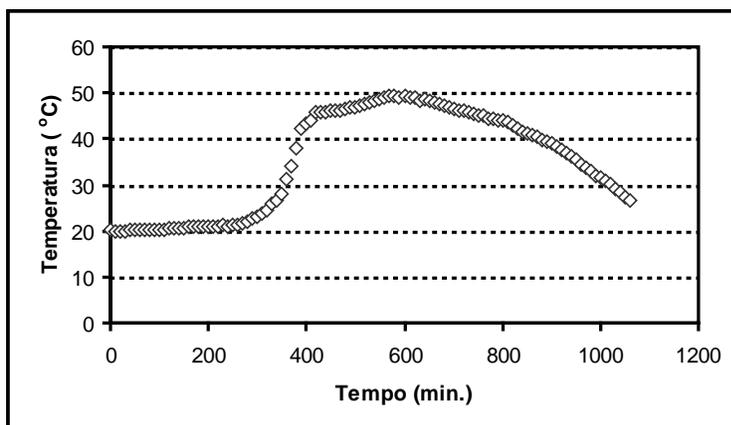


FIGURA 5 – Comportamento da temperatura em função do tempo das medidas do sensor localizado na saída dos painéis do Aquecedor Solar.

Um resumo de todas essas informações está contido na Tabela 3, de forma que podemos comparar os valores calculados empregando as duas regras (Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson) com o valor médio obtido diretamente com o Excel. Uma simples análise da tabela revela que os valores obtidos pelas regras trabalhadas são consistentes com o valor médio esperado. Assim, podemos observar que os resultados dos métodos aplicados ao experimento contendo diferentes tipos de sensores digitais são consistentes, de forma que podemos empregar esses exemplos com os estudantes em sala de aula.

Vale ressaltar que os desvios-padrão para as medidas no experimento na Praça de Alimentação foram menores do que os encontrados no experimento do Aquecedor Solar, aliás, como era de se esperar, pois o intervalo de temperaturas do primeiro experimento [entre 20,96 °C e 22,04 °C, vide Figura 3] é menor que o do segundo experimento [entre 19,90 °C e 49,30 °C, vide Figura 5].

TABELA 3 – Resultados sintetizados.

	Temp. média e desvio (oC)	Temp. média e desvio (oC) <i>Regra dos Trapézios</i>	Temp. média e desvio (oC) <i>Regra 1/3 de Simpson</i>
Praça da Alimentação	21,2688±0,2981	21,2633±0,0055	21,2632±0,0056
Aquecedor Solar	35,2654±11,1423	35,5033±0,2379	35,3752±0,1097

Outros tipos de tratamentos para esses dados

Várias outras aplicações dos conteúdos de CDI podem se originar a partir dos dados apresentados acima. A seguir citamos algumas delas.

1) *Ajuste dos dados por uma curva*

No programa Excel a ferramenta *Análise de Tendência* fornece algumas opções de curvas para ajustar os valores observados ($y = f(x)$). Com os dados organizados em uma planilha é possível construir o diagrama de dispersão, isto é, a representação dos pares de pontos levantados no plano cartesiano, auxiliando na decisão da curva a ser ajustada. Ao decidir pela curva, o programa fornece a expressão analítica daquela que melhor se ajusta aos dados observados, bem como o valor do coeficiente de explicação (ou determinação) (R^2)² para auxiliar a tomada de decisão.

2) *Taxa de variação média*

A título de ilustração e ainda utilizando os dados discutidos acima, vamos determinar a taxa de variação média da temperatura em relação ao tempo para dois valores observados na Praça de Alimentação (Tabela 1). Quando a temperatura passa de 21,0667 °C no instante Tempo = 0, para 21,1600 °C no instante Tempo = 1, a taxa de variação média é dada por $(21,1600 - 21,0667)/(1 - 0) = 0,0933$ °C/min. É possível observar que, nesse caso, a taxa de variação média obtida foi positiva, mostrando que houve um acréscimo da temperatura. Analogamente, para 21,04 °C (Tempo = 39) e 20,9600 °C (Tempo = 40), a taxa de variação média é dada por $(20,96 - 21,04)/(40 - 39) = -0,0800$ °C/min, ocasionando, nesse caso, uma taxa de variação média negativa, o que mostra que houve um decréscimo da temperatura. Similarmente, o mesmo estudo pode ser aplicado aos dados da Tabela 2.

3) *Ocorrência de valores máximos e mínimos*

A partir da curva que ajusta os dados observados, obtida no programa Excel com a ferramenta *Análise de Tendência*, é possível visualizar os intervalos onde a função é crescente ou decrescente, além dos pontos de mínimo e de máximo locais. Esses resultados podem ser confrontados com a aplicação dos conteúdos vistos em CDI, como a derivada primeira e derivada segunda de uma função.

² Esse coeficiente determina a qualidade do ajuste

4) *Valor médio da função*

De posse da curva que ajusta os dados observados, obtida com a ferramenta *Análise de Tendência* do Excel, também é possível usar o teorema do valor médio para integrais dado pela eq. (3) para obter o valor médio de uma função em um intervalo. Lembramos ainda que é possível aplicar as regras de integração vistas em CDI para a função ajustada e comparar com os resultados obtidos pela Regra dos Trapézios (eq. (7)) e Regra 1/3 de Simpson (eq. (10)).

Ressaltamos que é preciso usar o programa Excel na opção *Análise de Tendência* com cautela, pelo fato de ocorrerem falhas na determinação de curvas de tendência de ajustes polinomiais. No caso particular dos dados das medidas da seção anterior, devido ao truncamento das casas decimais, a função obtida pelo programa não aproximou os dados observados de forma coerente. Esse problema somente foi contornado quando o número de casas decimais na função obtida pelo Excel foi aumentado. Como exemplo, citamos os dados na Praça de Alimentação que, ajustados por uma função do 2º grau, produziu, pelo Excel, o coeficiente de x^2 igual a 0,0000002 quando o correto deveria ser 0,000000237.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Os estudantes comumente questionam a necessidade de associar a realidade por eles vivida com os conteúdos matemáticos estudados em aula (FERREIRA; BRUMATTI, 2009b). Entretanto, devido à exigência do ambiente de trabalho dos estudantes, aliada a dificuldade que eles possuem em conteúdos matemáticos (FERREIRA; BRUMATTI, 2009a), além da carga excessiva de trabalho do professor, a concretização dessa associação muitas vezes é prejudicada ou nem mesmo se realiza. Neste artigo, buscamos encontrar algumas aplicações dos conteúdos de CDI com dados reais, como pressupõe a Modelagem Matemática, para que futuramente possam ser utilizados no ensino e aprendizagem dessa disciplina em cursos de Ciências Exatas, de forma que os estudantes possam perceber a relevância de seus conteúdos e, conseqüentemente, uma motivação a mais para seu aprendizado.

Observamos que a manipulação de dados relacionados às temperaturas em dois experimentos pode proporcionar a aprendizagem de vários conteúdos da disciplina CDI. Similarmente, outros tipos de informações, como as intensidades de sinais obtidos pelo sensor LM61, cujas medições também foram feitas na Praça de Alimentação, podem representar aplicações de conteúdos de CDI, como aqueles obtidos para o caso das temperaturas. Outros tipos de medições realizadas no cotidiano e trabalhadas pelos alunos, poderão resultar em um vasto material didático útil tanto para eles quanto para o professor.

Seria bastante oportuno envolver os estudantes na busca desses problemas e de dados a eles relacionados, porém, tendo em vista a realidade dos estudantes do período noturno, muitas vezes é interessante que o professor os auxilie nessa tarefa.

Como destacamos acima, precisamos favorecer uma aprendizagem contextualizada, de forma que os alunos vejam o caráter utilitário da Matemática, o que muitas vezes demanda a necessidade do uso de tecnologias. Além disso, o fortalecimento da tecnologia é de extrema importância para o futuro profissional, podendo favorecer uma formação mais crítica e reflexiva do estudante. O presente artigo acena para a possibilidade de tal fortalecimento tecnológico, tanto pelo uso de sensores de temperaturas com vistas à aquisição dos dados, quanto pela aplicação do Excel na sua manipulação.

Pensando na continuidade desse trabalho, um interessante estudo poderia ser realizado no sentido de comparar a função obtida pelo Excel com aquela obtida por outros programas computacionais, como por exemplo, alguns *softwares* livres que possibilitem o ajuste de curvas, sobretudo, para os dados das Tabelas 1 e 2 aqui apresentados, pois como já mencionamos, o Excel apresentou uma função de aproximação incoerente com os dados tratados. Vale ressaltar que, ao aplicar a teoria usada no Método de Mínimos Quadrados (RUGGIERO; LOPES, 1996) para os dados coletados, foi possível observar a necessidade de aumentar o número de casas decimais na função ajustada pelo Excel. Acreditamos que isso reforça o pensamento de Pierre Lévy, como comentamos anteriormente, ao afirmar que o conhecimento é produzido pela simulação e experimentação (LÉVY, 1999).

Esperamos que as aplicações mencionadas neste artigo, e outras que poderão surgir a partir dele, resultem em uma aprendizagem mais relevante da Matemática, auxiliando na redução de tensões que frequentemente ocorrem em sala de aula, no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo: um novo horizonte*. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- ARAÚJO, J. L.; BARBOSA, J. C. Face a face com a Modelagem Matemática: como os alunos interpretam essa atividade? *Bolema*, ano 18, n.23, p.79-95, 2005.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, ano 14, n.15, p.5-23, 2001.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- CANDA, V. M. F. *Reinventar a Escola*. 3.ed. Petrópolis: Vozes, 2002.
- CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- DALLAS (Dallas Semiconductor – DS1820). Disponível em: <<http://datasheets.maxim-ic.com/en/ds/DS18S20.pdf>>. Acesso em: 17 mar. 2009.
- FERREIRA, D. H. L. *O tratamento de questões ambientais através da modelagem matemática: um trabalho com alunos do ensino fundamental e médio*. 2003. 278 f. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- FERREIRA, D. H. L.; BRUMATTI, R. N. M. Dificuldades em Matemática em um curso de Engenharia Elétrica. *Horizontes*, v.27, n.1, p.51-60, 2009a.

FERREIRA, D. H. L.; BRUMATTI, R. N. M. Vantagens e dificuldades em trabalhar com problemas reais no ensino da Matemática. *Anais do VI Congresso Iberoamericano de Educación Matemática*, Puerto Montt, Chile, 2009b, p.1692-1698.

FREITAS, C. A. M.; SANT'ANA, M. F. Modelo matemático do crescimento da Araucaria angustifolia: aplicação da modelagem matemática no ensino do cálculo diferencial e integral. *Acta Scientiae*, v.9, n.2, p.64-74, Canoas: da ULBRA, 2007.

GODDARD, Y. L.; GODDARD, R. D.; TSCHANNEN-MORAN, M. A. Theoretical and Empirical Investigation of Teacher Collaboration for School Improvement and Student Achievement in Public Elementary Schools. *Teachers College Record*. v.109, n.4, p.977-896. 2007.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*. 9.ed. Rio de Janeiro: L.T.C., 2008.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 2.ed. Campinas: Papirus, 2007.

LEVY, P. *Cibercultura*. São Paulo: Editora 34, 1999.

MELO, L. P.; PENNEREIRO, J. C.; FERREIRA, D. H. L. Construção de um aquecedor solar: uma alternativa para ensinar conceitos de termodinâmica, *Anais do 37º COBENGE – Congresso Brasileiro de Educação em engenharia*, Recife, 2009.

NATIONAL (National Semiconductor – LM61). Disponível em: <<http://www.national.com/mpf/LM/LM61.html>>. Acesso em: 14 abr. 2009.

POCHULU, M. D. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, v. 35, n. 4, 2004.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 2.ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1996.

SANT'ANA, M. F. Trabalhando o cálculo a partir da modelagem de um experimento. *Acta Scientiae*, v.6, n.2, p.73-82, Canoas, 2004.

SKOVSMOSE, O. *Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica*. Campinas: Papirus, 2008.

STEWART, J. *Cálculo*. 6.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

THOMAS, G. B. et al. *Cálculo*. 10.ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005.

ZBIEK, R. M., CONNER, A. Beyond Motivation: exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. v.63, n.1, p.89-112, 2006.

Recebido em: set. 2009 **Aceito em:** dez. 2009