ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7023

Geometria Experimental e o teorema de Pitágoras por Montessori

Circe Mary Silva da Silva

Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pelotas, RS, Brasil

Recebido para publicação 8 mar. 2022. Aceito após revisão 2 dez. 2022
Editora designada: Maria Célia Leme da Silva

RESUMO

Contexto: Alguns livros didáticos de geometria dos séculos XIX e XX mostram inovações metodológicas em relação aos tradicionais livros seguidores da proposta lógico-dedutiva de Euclides. **Objetivo**: Identificar em livros didáticos de autores franceses, italianos, americanos e brasileiros a presença de uma geometria experimental e verificar no livro *Psico Geometria: el estúdio de la geometria basado en la psicologia infantil* de Maria Montessori (1934) como a abordagem didática do teorema de Pitágoras, por ela proposto, enquadra-se numa perspectiva de geometria experimental. **Design**: Usando a análise documental, analisamos os livros dos seguintes autores: Houël (1867), Méray (1874), Laisant (1898, 1906), Calkins (1861), Bert (1886), Prestes (1895), Lyra da Silva (1923), Wentworth e Hill (1901) e Montessori (1916, 1934) para compreender a abordagem do ensino da geometria. **Ambiente e participantes**: As fontes de pesquisa coletadas na Biblioteca Nacional da França (BNF) e no Repositório Digital da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) referem-se ao ambiente geográfico de quatro países e os participantes são os autores dos livros de geometria. **Coleta e análise de dados**: Os documentos selecionados e analisados encontram-se na BNF – Gallica em versão digitalizada, assim como no Repositório Digital da UFSC. Constatamos a partir da análise documental de tais livros que as propostas metodológicas procuram fugir de uma apresentação dedutiva da geometria elementar e incluíram em seus textos experiências para a introdução de conceitos e demonstrações visuais da geometria elementar. **Resultados:** Os autores analisados, oriundos de diferentes países, manifestaram em suas críticas um certo descontentamento com o ensino elementar da geometria, principalmente com os autores de livros didáticos pelo fato de eles abordarem a geometria dedutiva nas classes iniciais, privilegiando uma apresentação dedutiva da matemática. **Conclusão:** Identificamos em todos os autores analisados uma proposta de geometria experimental e constatamos que a proposta de Montessori também insere alguns raciocínios dedutivos.

Autora correspondente: Circe Mary Silva Silva. Email: cmdynnikov@gmail.com

Palavras-Chave: Livros de Geometria; Montessori; Teorema de Pitágoras.

Experimental Geometry, Pythagorean Theorem and Montessori

ABSTRACT

Background: Some 19th and 20th-century geometry textbooks show methodological innovations in relation to the traditional books that followed Euclid's logical-deductive proposal. **Objective:** To analyse in the book *Psico Geometria: el estúdio de la geometria basado en la psicologia infantil* by Maria Montessori (1934) as the didactic approach of the Pythagorean theorem, proposed by her, fits into an experimental geometry perspective. **Design**: Using documentary analysis, we analysed the books of the following authors: Hoüel (1867), Méray (1874), Laisant (1898, 1906), Calkins (1861), Bert (1886), Prestes (1895), Lyra da Silva (1923), Wentworth and Hill (1901) and Montessori (1916, 1934) to understand the approach to teaching geometry. **Environment and participants**:-The research sources collected in the National Library of France (BNF) and in the Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) Digital Repository refer to the geographic environment of authors from four countries **Data collection and analysis:** The selected and analysed documents can be found at BNF – Gallica in a digitized version, as well as at the UFSC Digital Repository. Based on the documentary analysis of these books, we found that the methodological proposals seek to escape from a deductive presentation of elementary geometry and include in their texts experiences for the introduction of concepts and visual demonstrations of elementary geometry. **Results:** The authors of the analysed works, from different countries, criticized the elementary teaching of geometry, especially the authors of textbooks, for the fact that they approach deductive geometry in the initial classes, favouring a deductive presentation of mathematics. Montessori's book shows an experimental geometry proposal for the Pythagorean theorem. **Conclusion**: We found that Montessori's proposal, besides presenting characteristics of an experimental geometry, also inserts some deductive reasoning.

Keywords: Geometry Teaching, Montessori, Pythagorean Theorem

LANÇANDO ÂNCORAS PARA O FUTURO

O termo geometria experimental não é novo. Foi usado em livro do século XIX, por Paul Bert1 (1886). Na sua visão, as crianças na escola primária tinham pouco gosto pela geometria e a razão para isso residia na maneira como os alunos recebiam as primeiras noções de geometria – um "interminável desfile de definições que não servem de maneira nenhuma para interessar uma

---

1 *Premiers Éléments de Géometrie Expérimentale appliquée* à la mesure des longueurs, des surfaces et des volumes. Paris: Librarei CH. Delagrave, 1886.

criança” (Bert, 1886, p. v). Não faz muito sentido dizer para uma criança de dez anos, segundo ele, que uma superfície tem duas dimensões, que um ponto não tem dimensão e logo a seguir marcar com giz branco um grande ponto, na lousa, o qual está mostrando uma superfície. A crítica era totalmente procedente pois, até então, a definição de dimensão ainda estava envolvida em nebulosas discussões. Embora Bert não defina o que está entendendo por geometria experimental, é possível depreender que sua apresentação não contempla aspectos teóricos da geometria, mas limita-se a apelar para o bom senso e a evidência da observação.

Atualmente, uma “geometria experimental” pode ser entendida como uma abordagem didática que introduz conceitos e propriedades geométricas com apoio ou articulada com experiências de natureza variada (tais como objetos manipuláveis, desenhos, softwares dinâmicos para o ensino etc). Contempla, especialmente, a introdução de conceitos mais abstratos como aqueles que estão na base da geometria, como ponto, reta e plano e propriedades elementares como o teorema de Pitágoras com a ajuda de experiências.

O objetivo do presente trabalho é identificar em livros a presença de uma geometria experimental e verificar no livro *Psico Geometria: o estudo da geometria baseado na Psicologia Infantil* de Maria Montessori (1934) como a abordagem didática do teorema de Pitágoras, por ela proposto, enquadra-se numa perspectiva de geometria experimental.

Segundo Viñao (2008), os livros textos guardam uma relação direta com a história das disciplinas escolares. Para Choppin (2000, p.108), os manuais escolares são, antes de tudo, ferramentas pedagógicas que visam auxiliar na aprendizagem. São, além disso, “depositários de conhecimentos e técnicas que em um dado momento uma sociedade crê que a juventude deve adquirir para perpetuar seus valores”.

Os autores dos quais nos ocuparemos foram selecionados entre aqueles cuja obra já havíamos visitado em pesquisas anteriores (Silva &Silva, 2019, 2020; Silva, 2021), que propõem em seus livros mudanças no ensino da geometria (seja por razões de ordem pedagógica, epistemológica ou da própria matemática), que eram preferencialmente matemáticos ou professores de matemática, assim como, aqueles identificados por Bardin (2020) escritos principalmente por matemáticos.

Condorcet (1743-1794), matemático e filósofo francês; Pestalozzi (1746-1827), pedagogo suíço; Fröbel (1782-1852), pedagogo alemão, foram três autores que influenciaram fortemente a educação durante décadas. Na visão de Gasca (2015), o aspecto comum entre eles era a proposta da presença da geometria lado a lado com a aritmética no ensino de crianças desde a primeira etapa escolar.

A inclusão de conceitos geométricos era recomendada por Fröbel:

> Não é possível uma educação verdadeiramente humana sem as matemáticas ou, pelo menos, sem aprofundar na ciência dos números, a qual deve englobar, mesmo que só em pequeno complemento, algumas noções das formas e volumes (Fröbel, 2010, p. 106).

No século XIX e início do século XX, alguns autores de livros de matemática começaram a defender a ideia de um ensino da matemática mais experimental, principalmente para a geometria elementar, lançando ferozes críticas aos livros destinados ao ensino inicial. Pode-se nomear entre eles os autores franceses: Jules Hoüel, em 1867, em sua obra *Essai critique sur les príncipes fondamentaux de la Géométrie élémentaire;* Charles Méray, com a obra *Nouveaux éléments de géométrie*, em 1874; Charles- Ange Laisant, em 1898, no livro *La Mathématique Philosophie Enseignement;* Jules Bert, com o livro *Premiers Éléments de géométrie Expérimentale,* em 1886*;* Norman Calkins, com o livro *Primary Object Lessons*2, em 1861, e Wentworth & Hill, em 1901, nos Estados Unidos da América. E, ainda, os brasileiros Prestes, em 1895, e Lyra da Silva, em 1923 e a italiana Montessori, em 1916 e 1934.

O livro de Calkins, se distingue do conjunto de autores franceses, por não ser um livro de matemática e sim um livro ou manual de pedagogia ou metodologia para professores e pais. Calkins busca criar lições para o método intuitivo conforme proposto por Pestalozzi, de quem é seguidor.

Hoüel declara, no prefácio, que seu livro é um protesto contra os textos de geometria elementar, que nada de novo trazem para aperfeiçoar a exposição dos primeiros princípios desta ciência. Ele diz: "Contentam-se em repetir as frases tradicionais e em estabelecer com um falso aparelho de rigor os primeiros teoremas [...]." (1867, p. iii). Segundo este autor, "a geometria baseia-se na noção indefinível e experimental da solidez ou invariabilidade das figuras" (p. 37). Ele prossegue dizendo que se faz uma confusão entre axiomas e verdades abstratas. A experiência ensina propriedades que desfrutam de uma certeza

2 Traduzido para o português por Rui Barboza em 1886 com o título: Primeiras licções de coisas: manual de ensino elementar para uso dos pais e mestres.

imediata, no entanto há outras propriedades mais ocultas que precisam do raciocínio.

Hoüel, ao refletir sobre o ensino da geometria elementar, posiciona-se com clareza: se o objetivo do ensino da matemática é oferecer um modelo de lógica inflexível, aplicado a princípios certos, para se alcançar tal meta, é preciso que seu ensino jamais parta do rigor que distingue a matemática de outras ciências, pois esta é uma condição essencial para que este estudo seja fértil.

No estudo da geometria, para os iniciantes, ele sugere em lugar de demonstrações, as verificações experimentais, a analogia e a indução, como uma exposição provisório da matéria:

> [...] o aluno será treinado em traços gráficos, o manuseio de instrumentos, a solução de vários problemas de levantamento de planos e carpintaria, a construção de figuras em relevo por meio de fios ou argila plástica, a representação destas figuras usando suas projeções, etc (Hoüel, 1886, p. 82).

Afirma, ainda, que se pode misturar a geometria com o ensino dos números inteiros, que são representados por pontos distribuídos sobre uma reta ou um plano.

Méray, ao tratar de noções básicas da geometria, como a reta, abandona a definição euclidiana e diz que a linha reta apoia-se na "ideia de uma linha que vem de objetos muito alongados, mas extremamente delgados em todas as outras direções, como um fio muito fino, o traço de luz aparente de um ponto brilhante animado com uma alta velocidade [...]". (Méray, 1874, p. 2) No prefácio da primeira edição diz que: "A primeira origem das verdades geométricas é inquestionavelmente experimental" (Méray, 1874, p. xiii). Propõe, também, que para se construir uma reta passando por dois pontos dados, basta a ajuda de uma régua (p. 7). Méray apoia sua proposta fortemente na ideia de movimento. Assim ele apresenta: "O termo deslocamento de uma figura é muitas vezes entendido como um movimento limitado, em virtude do qual ela passa de uma primeira chamada posição inicial para uma segunda chamada posição final". (p. 9) A partir da ideia de movimento, de deslocamento, ele introduz dois conceitos importantes: translação e rotação. Nem todos autores analisados destacam essa ideia de movimento, como em Calkins. Entretanto, o livro de Wentworth e Hill traz mais claramente a ideia de movimento – uma linha se movendo, em geral, gera uma superfície (Wentworth e Hill , 1901, p. 30).

Charles- Ange Laisant, em 1898 abordou o caráter experimental da matemática no livro *La Mathématique Philosophie Enseignement* no qual propõe que o ensino da geometria para os iniciantes deva ser apoiado em visualizações, observações e na realização de experimentos, fugindo de uma exposição dedutiva, a qual ainda os alunos não conseguem acompanhar.

Calkins afirma que "a existência da noção (matemática) no espírito nasce da percepção das semelhanças e diferenças entre os objetos". (Calkins, 1886, p. 2) Ele traz diálogos fictícios entre professor e alunos sempre com base em observações e experiência (Silva; Silva, 2020). Ao tratar das linhas, sugere aos estudantes um experimento de ligar dois pontos distintos, com uma linha reta, com uma curva e uma linha quebrada, conforme figura 1. Com uma corda bastante fina, propõe a medida do comprimento da corda para cada caso. As próprias crianças devem descobrir qual é o caminho mais curto. E pergunta: "Podeis entre dois pontos tirar uma linha mais curta que a reta?" (Calkins, 1886, p. 71).

Figura 1

Linha. (Calkins, 1873, p. 70)

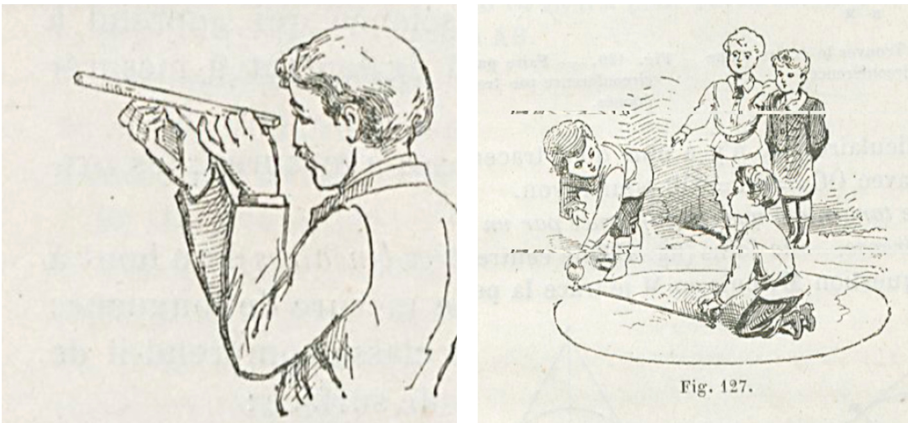
Nas lições de formas de Calkins a proposta é uma apresentação simultânea com formas planas e sólidas (Frizzarini & Leme da Silva, 2016). Na França, também em 1874, o livro de Charles Méray *Nouveaux éléments de géométrie*, traz inovações, ele diz que é um artifício didático separar a geometria em plana e espacial. Para que os alunos possam "ler no espaço" (geometria espacial), ele traz em nota de rodapé: que o uso de figuras em relevo é indispensável para guiar os iniciantes (p. xii). O autor distingue na geometria dois tipos de proposições: 1) aquelas que provêm da experiência combinada com a abstração3 e 2) aquelas mais numerosas que se obtêm pelo raciocínio, e que são quase a totalidade da geometria racional.

3 Na terceira edição, ele alterou um pouco essa redação: No primeiro tipo de proposição colocou os axiomas, cuja certeza é dada pela simples observação ou

Bert, em 1886, propõe uma abordagem dos primeiros elementos da geometria em que as definições aparecem na medida que se fazem necessárias e o mesmo vale para as demonstrações de propriedades elementares. Sua meta é ensinar coisas úteis e práticas, como as medidas de figuras, terrenos, alturas de objetos, etc. À esquerda da figura 2, extraída de seu livro, mostra a noção de reta que ele define como aquela que se pode fixar como com uma régua; à direita da figura 2, as crianças no pátio aprendendo a traçar uma circunferência com uma estaca e corda.

Figura 2

A reta (E). (Bert, 1886, p. 2). *Traçado da circunferência* (D). (Bert, 1886, p. 77)



Charles- Ange Laisant, no livro *Initiation mathématique* (1906) retornou ao tema da geometria experimental, já defendido em 1898. Nesse livro, Laisant faz um corte profundo com o treinamento tradicional da matemática pelas seguintes razões: organização diferente dos conteúdos, uso de linguagem acessível, utilização de muitas ilustrações e representações informais e confiança na mente matemática de crianças muito jovens (Gasca, 2015). Em 1912, ao responder à uma enquete sobre o papel da intuição e experiência no ensino secundário, manifestou-se contrário a abordagem, pois

pela abstração; o segundo tipo: os teoremas, que são em número ilimitado e obtidos pelo raciocínio (Méray, 1907) segundo ele, ela fica incompleta e insolúvel se restringirmos a discussão apenas ao ensino secundário e se ignorarmos as condições psicológicas e fisiológicas do desenvolvimento do cérebro. Segundo Laisant: "o papel da intuição e experiência na educação em geral e em especial na matemática é um problema capital da pedagogia" (Laisant, 1912, p. 528).

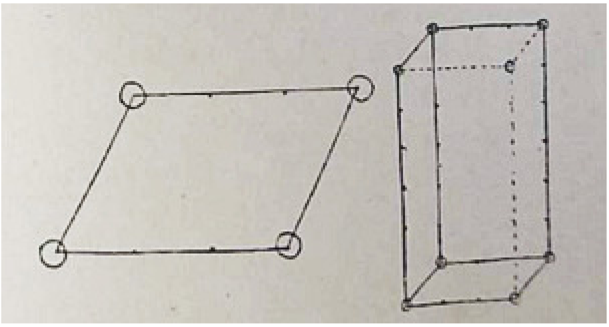
Na virada do século XX, segundo Bardin (2020), John Perry na Inglaterra, em 1901, defendia um ensino da geometria precedido por medidas de figuras, onde se testava experimentalmente regras, por exemplo, o cálculo do comprimento da circunferência do círculo. Ele apresentou dois princípios: 1) a geometria experimental deve preceder a demonstrativa; 2) alguns raciocínios dedutivos devem acompanhar a geometria experimental.

No Brasil, o autor Gabriel Prestes (1895), diretor da Escola Normal de São Paulo, no livro *Noções intuitivas de Geometria Elementar,* cujo público alvo eram os professores primários, propôs a obra para o ensino no segundo ano, pois, no primeiro, ele sugeria seguir um ensino intuitivo baseado no sistema de Calkins ou Prang. Apropriando-se da obra de Bert, ele escreveu um livro que tem proximidades com a proposta francesa, como Silva (2019, p. 302) constatou: "[...] inversão na marcha dos conteúdos tradicionalmente apresentados ao propor um estudo direto das medidas de linhas, áreas e volumes, uso de materiais como fios, barbantes, papelão, recortes de papel, construção de sólidos para um trabalho experimental". O autor não usou a expressão geometria experimental em seu livro, preferiu geometria intuitiva, talvez com foco no método intuitivo, amplamente divulgado no final do século XIX no Brasil. No prefácio, cita Clairaut e afirma que o professor, ao iniciar o ensino de geometria por uma série de definições, princípios e postulados, que a criança não compreende, contribui para fatigar o espírito dos alunos.

Na introdução, ele postula a necessidade de distinguir, no ensino da geometria, duas partes: uma concretizável, que estaria adequada ao nível de inteligência infantil, e outra abstrata, baseada em observações e capaz de desenvolver-se pela dedução. Em seu livro, ele mostra esta parte "concretizável", que interpretamos como uma "geometria experimental". Por exemplo, em lugar de desenhar, em perspectiva, um paralelepípedo no quadro, que confundiria os alunos, ele sugere utilizar oito rolhas e doze pedaços de arame e realizar o seguinte experimento: com 4 rolhas e 4 pedaços de arame (de igual comprimento), construir um quadrado, conforme figura 3, à esquerda; sobre os vértices desse quadrado (nas rolhas, colocar 4 arames de comprimento igual e maiores que aqueles do quadrado e firmar verticalmente; nas extremidades, colocar um outro quadrado como o anterior, conforme figura 3 à direita.

Figura 3

Construção do paralelepípedo. (Prestes, 1895, p. 77)



Para a compreensão do que é um cilindro e de que este tem 2 faces planas, ele toma uma tora de madeira e mostra, aproximando um pedaço de madeira plana, como elas se ajustam nas faces da tora, conforme a figura 4.

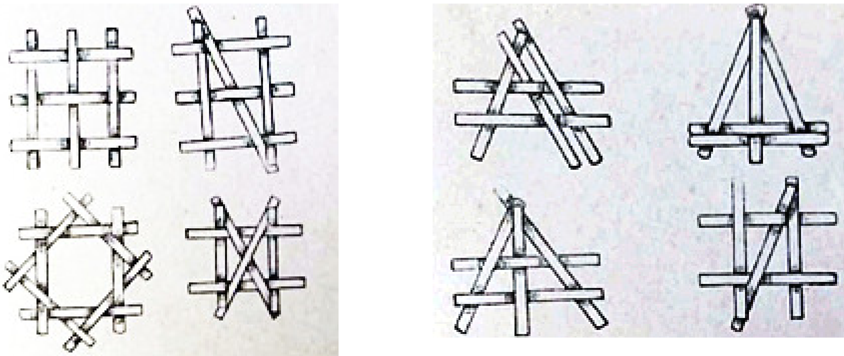
Figura 4

Faces planas do cilindro. Prestes (1895, p. 69)

Prestes toma de empréstimo ideias de Fröbel quando este propunha o uso de entrelaçamento de varinhas. Ele afirma que, para recapitular os conteúdos de posições relativas das linhas, podem ser usadas as combinações das varinhas (Figura 5). Assim, entenderão melhor quando duas linhas são paralelas, perpendiculares ou oblíquas.

Figura 5

Varinhas. (Prestes, 1895, p. 55)



Em 1923, Heitor Lyra da Silva, engenheiro e professor de matemática, publicou o livro *Geometria (Observação e Experiência).* A palavra experiência, que ele emprega no título do livro, aparece em atividades propostas, que assim podem ser exemplificadas: para traçar um ângulo reto, propõe usar um instrumento de carpinteiro ou realizar dobraduras numa folha de papel; para construir uma pirâmide, sugere desenhar no chão um quadrado, traçar as diagonais e no ponto central colocar um mastro, cravar quatro estacas nos vértices e cobrir tudo com um pano de lona – assim se forma a barraca de campo; traçar uma circunferência, como fazem os jardineiros ao construírem canteiros circulares, usando uma estaca e um fio, calcular a área de uma figura qualquer por meio de uma balança sensível e papel cartão; usar o papel quadriculado para encontrar aproximadamente áreas de figuras quaisquer; calcular o volume de um corpo qualquer, usando uma proveta graduada e água; calcular a altura de uma árvore, fincando no chão uma estaca e comparando a sombra da árvore com a da estaca, pela semelhança de triângulos. (Silva; Silva, 2018)

A fim de exemplificar a proposta de Lyra da Silva, a figura 6 mostra como ele explica o cálculo do volume de um objeto qualquer pela experiência com uma proveta ou um copo com água:

> [...] mergulhar o corpo, marcar o nível da água, retirar o corpo e em seguida despejar água até que o nível volte a altura que estava. Como cada grama de água corresponde a um cm^3, basta verificar quantas gramas foram despejadas até que o nível voltasse a altura primitiva, para ficar conhecendo o volume do corpo.

Figura 6

Cálculo do volume. (Lyra da Silva, 1923, p. 138)

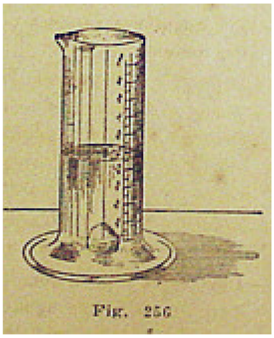
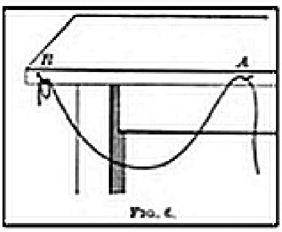
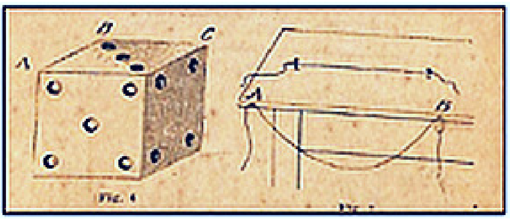


Figura 7

Linha reta. (Silva, 2021, p. 7) (E) e (Silva, 2021, p. 8) (D)

Figura 1 – Linha reta





Lyra da Silva apropriou-se, algumas vezes, de formulações e exemplos que aparecem na obra dos autores Wentworth e Hill, como afirma Silva (2021, p. 7), "Para apresentar o conceito de linha reta, a figura usada é muito próxima a da obra estadunidense". A figura 7 traz duas figuras de ambos os livros: à esquerda a linha reta segundo Wentworth e Hill e à direita de Lyra da Silva (Silva, 2021).

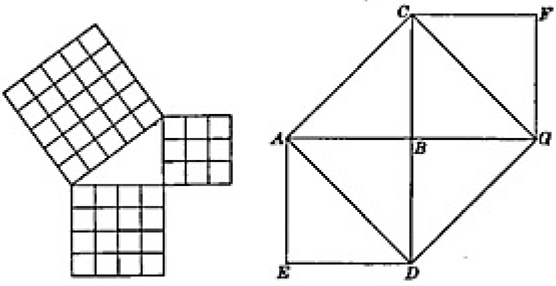
O TEOREMA DE PITÁGORAS

As críticas à demonstração do teorema de Pitágoras conforme apresentada nos livros didáticos na virada do século XX eram frequentes e mobilizaram autores de livros didáticos a proporem demonstrações mais visuais e experimentais, fugindo da rigidez dedutiva que desanimava os alunos no estudo da geometria elementar. Variadas foram as propostas, entretanto, a título de exemplo, apresentamos apenas alguns autores.

Os autores americanos Georg Albert Wentworth e G. A. Hill publicaram, em 1901, a obra *First Steps in Geometry.* Segundo Silva (2020), há uma preocupação explícita nessa obra de apresentar os primeiros passos da geometria priorizando um ensino prático e experimental. Para o caso do teorema de Pitágoras, os autores comentam tratar-se de um resultado descoberto há mais de 2000 anos pelos gregos e apresentam duas demonstrações visuais de que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos (Figura 8).

Figura 8

Teorema de Pitágoras. (Wentworth & Hills, 1901, p. 104)

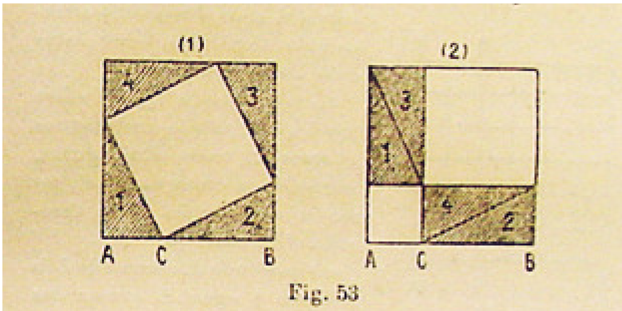


Na figura 8 à esquerda, ele diz que se os quadrados construídos sob os lados 3, 4 e 5 tem respectivamente 9, 16 e 25 unidades, e 25= 9 + 16 o teorema é naturalmente uma verdade. A figura 4, à direita ilustra o teorema no caso de um triângulo retângulo ABC ter os lados AB e BC iguais, neste caso, os ângulos C e A medem cada um 45º. Se construirmos sobre esses lados os quadrados ABDE e BCFG, e desenharmos DG e AD e CG, nós obtemos uma figura ACFGDE dividida em seis triângulos retos iguais e cada um é igual ao triângulo ABC. O quadrado construído sobre AC contêm 4 de tais triângulos e cada um dos quadrados construídos sobre CB e AB contêm 2 desses triângulos, logo o teorema vale nesse caso.

Laisant comenta, no discurso final de seu livro *Iniciação matemática* (Laisant, 1906, p. 167-168), que desde os gregos, portanto há vários séculos, que se utiliza um "[...] método fatigante, antirracional, que desanima e desgosta os alunos, mormente os principiantes". Apoiado nas ideias de Méray, seu livro introduz uma proposta em que o aluno não mais recebe passivamente os conhecimentos do professor, mas que é também protagonista ativo desse processo. Ele propõe num dos subtítulos de seu livro a sugestiva expressão – "tormamo-nos geômetras". Nesse capítulo, após apresentar as áreas de vários polígonos, introduz o teorema de Pitágoras afirmando que este teorema tem sido "o tormento de muitas gerações de estudantes" e a razão disso é que a demonstração clássica é pouco natural e difícil de reter. A experiência que propõe é uma demonstração, tipo quebra-cabeça, em que o aluno constrói peças de madeira ou cartão no formato de triângulos e quadrados conforme a figura 9.

Figura 9

Teorema de Pitágoras. (Laisant, 1919, p. 77)



Laisant sugere construir o quebra-cabeça em madeira ou cartão, considerando o quadrado cujo lado é AB, marca-se um ponto C entre A e B. Tendo-se AC e CB por comprimentos dos lados do ângulo reto, contruíndo-se 4 triângulos e designando-os por 1, 2, 3 e 4 (conforme figura 9 à esquerda). Vemos que forma um desenho que mostra no seu interior um quadrado, que tem por lado exatamente a hipotenusa. Dispondo agora estes de maneira que ocupem a posição indicada na figura 9 à direita, temos dois quadrados – os quadrados construídos sobre os lados do ângulo reto. Daí os dois reunidos tem a mesma área que o quadrado da hipotenusa da figura à direita.

O livro de Méray teve três edições4. Em 1903, surgiu a segunda; a terceira, em 1907. Nas duas primeiras edições o teorema de Pitágoras é obtido como um caso particular extraído de um triângulo qualquer, usando o conceito de projeção. Na terceira, além da demonstração dedutiva, ele elogia e cita a demonstração visual que Laisant propôs, em 1906, do teorema de Pitágoras.

Na década de 1930, Maria Montessori lançou dois livros específicos para o ensino da matemática, um deles intitulado *Psico-geometria: o estudo da geometria baseado na psicologia infantil*, no qual abordou o teorema de Pitágoras (Montessori, 1934). Nele, a autora apresenta demonstrações deste resultado.

MONTESSORI E O EMPIRISMO

> [...] a mente deve agarrar-se, em primeiro lugar, a alguma realidade e prosseguir depois num campo puramente lógico (Montessori, 1934, p.8)

A proposta de Montessori para a introdução da geometria parte da seguinte premissa – o professor deve partir de "coisas", isto é de representações concretas de objetos geométricos. Montessori é uma empirista, que valoriza a experiência como geradora de conhecimento humano, construiu uma proposta de ensino em que a aprendizagem do aluno ocorre a partir da periferia – com atividades sensoriais e uso de materiais manipulativos – para o centro, a mente da criança (Silva, 2021). Ela enquadra-se na corrente pedagógica iniciada no século XIX de valorização de um ensino com base em experiências. Montessori como uma psiquiatra e pedagoga tinha a preocupação com o aprender da

4 Localizamos 3 edições na biblioteca digital BNF: Gallica.

criança, por isso ela enfatiza tanto o método que o professor deve seguir para obter sucesso no processo de ensinar e aprender.

Assim como os autores analisados anteriormente, Montessori fazia suas críticas ao ensino tradicional da geometria. Afirmava que a preocupação dos professores era conseguir o mais rápido possível transmitir a abstração à mente infantil, porque, sem isso, se perderia a essência do ensino cuja finalidade é "elevar a mente aos campos da abstração" (Montessori, 1934, p. 8). Para ela, só excepcionalmente se consegue penetrar na mente infantil.

Montessori sugere o uso de um material para um estudo de geometria nas escolas - um material manejável, que segundo ela, possibilita induzir a mente a raciocinar.

> É a oferta da periferia e não a ação direta sobre o centro, o que caracteriza nosso método e o diferencia dos demais. Em vez de recorrer ao poder da compreensão do raciocínio e aos mecanismos mentais para transmitir uma coisa feita (pronta) à inteligência do discípulo, nos expomos a sua periferia, que está em contato com o ambiente, os meios que se prestam a um exercício espontâneo da mente (Montessori, 1934, p. 65).

Para Montessori, é evidente que o trabalho superior da mente tem sua origem na periferia material.

Ela indaga:

> Não foi das coisas, de onde os primeiros geómetras obtiveram seus conhecimentos? Não foram as correspondências e relações entre as coisas as que estimularam alguma mente ativa e interessada a formular axiomas e por conseguinte, teoremas? Como obteve Pitágoras seu famoso teorema que infinitas gerações se contentaram com fazer uso dele para aplica-lo como quem faz uso de uma herança recebida? É difícil de compreender a demonstração daquele teorema para a maior parte dos escolares, porque sua mente está passiva, fechada (Montessori, 1934, p. 64-65).

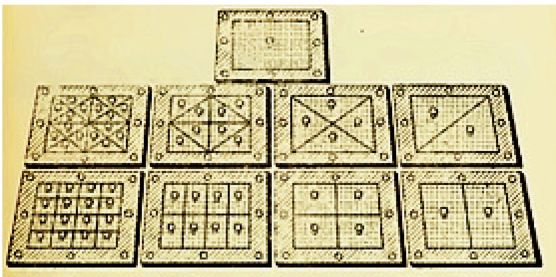
FIGURAS GEOMÉTRICAS MANIPULÁVEIS DE MONTESSORI

Maria Montessori ficou muito popular com os materiais didáticos que produziu. Em 1916, ela publicou *L'Autoeducazione nelle scuole elementari.* No ano seguinte, esta obra foi traduzida para o inglês e publicada em dois volumes. O segundo volume - *The Montessori Elementary Material* – tinha um capítulo sobre a geometria e o ensino desta matéria com manipuláveis. O livro Psico Geometria de 1934, Montessori é resultado das experiências de ensino que a autora já havia realizado na *Casa dei Bambini* com o uso do material específico para o ensino da geometria, construído em moldes de ferro e com peças encaixáveis e coloridas. No livro de 1916, a autora explica que o principal propósito deste material seria o de facilitar a autoeducação das crianças por meio de exercícios de geometria, bem como auxiliar na resolução de problemas reais. O fato de a criança poder manipular figuras geométricas, organizar e avaliar as relações prende a sua atenção. Segundo ela,

> A criança que exercita longa e espontaneamente em tais meios de desenvolvimento, não só continua a fortificar suas atividades de raciocínio e a força do caráter, mas ela adquire conhecimentos superiores e claros que ampliaram sua mente; nas abstrações espontâneas e subsequentes, ela terá a possibilidade de progresso surpreendente (Montessori, 1916, p. 432).

Figura 10

Quadrados subdivididos. (Montessori, 1916, p. 435)

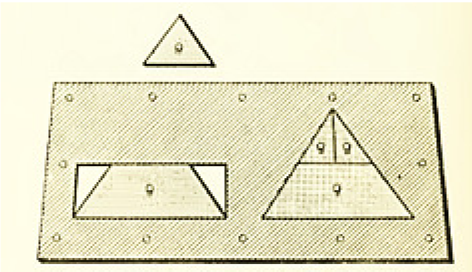


Entre esses materiais, encontra-se aquele que permite compreender a equivalência, semelhança e similaridade de figuras. Assim formado: um quadrado dividido em 2 retângulos, 4 quadrados iguais, 8 retângulos iguais, 16 quadrados iguais, 2 triângulos iguais, 4 triângulos iguais, 8 triângulos iguais e 16 triângulos iguais (Figura 10).

Para demonstrar alguns resultados, por exemplo a igualdade entre um retângulo e um triângulo, com certas condições, ela criava materiais específicos, como o da Figura 11.

Figura 11

Relação entre triângulo e retângulo. (Montessori, 1916, p. 444)



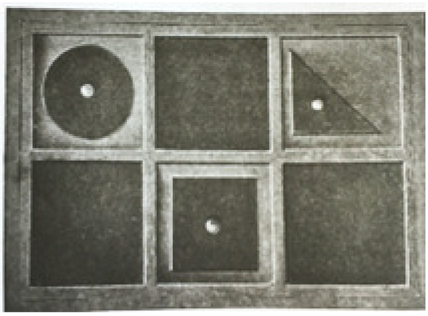
Há uma variedade de materiais construídos em peças de metal inseridas numa placa, que servem para "demonstrar" resultados geométricos. Nessa obra, ela incluiu uma seção de geometria espacial em que utiliza figuras geométricas sólidas tais como: um paralelepípedo quadrangular, pirâmide quadrangular, prisma triangular, cilindro, cone, ovóide, elipsoide, cubo, octaedro etc. Ela conclui dizendo que o estímulo dado à criança com esse material tem múltiplas consequências para a preparação metódica do intelecto da criança.

Montessori diferentemente dos autores antes citados prepara materiais específicos para as atividades propostas que, por sua vez, visam a objetivos pré-estabelecidos. Ela afirma que cada disciplina, incluindo a matemática, deve ser apresentada com o uso de objetos externos em uma construção sistemática bem definida. Desta maneira, cada conquista que a criança realizar com o "método da liberdade" - isto é deixar a criança exercer ações com os objetos no momento adequado e nele ficar em ação até a maturidade - traz como resultado a abstração espontânea (Montessori, 1916).

No livro Psico geometria, de 1934, Montessori incluiu esse material com amplas explicações de uso. Segundo ela, no início da aprendizagem infantil, não devemos nos preocupar com definições, mas permitir que a criança se exercite com os objetos que a rodeiam, concretizando o mundo exterior por meio das sensações e de uma intensa atividade motriz. O material é por ela chamado de moldes geométricos. Consiste em uma peça quadrada maior com espaço oco, que serve de suporte para encaixar as peças menores (Figura 12).

Figura 12

Moldes geométricos. (Montessori, 1934, p. 16)



Como as peças são móveis, se pode retirar e recolocar no lugar oco. Com esse material concreto, a autora chama a atenção que o próprio material apresenta um *controle de erro*, que permite que a própria criança atue de maneira crítica, sabendo quando encaixou certo ou errado. O aparato se presta à comparação das figuras, e, portanto, "[...] é um material indutivo destas experiências de buscar, tatear e acoplar" (Montessori, 1934, p. 18).

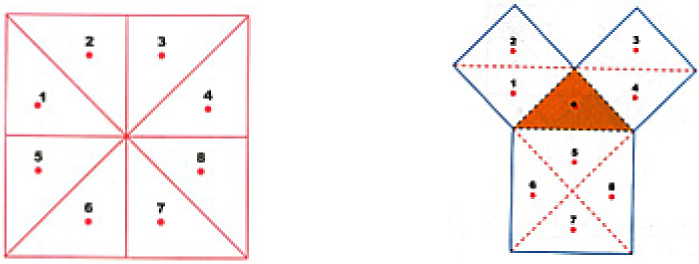
MONTESSORI E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Montessori, ao abordar os raciocínios sobre os triângulos retângulos, em que tratará do teorema de Pitágoras, utiliza a palavra "demonstração" para mostrar essa relação com seu material manipulativo. Não se trata de uma demonstração matemática como entendemos atualmente, mas que pode ser lida como mostrar, ilustrar. Embora use amplamente a palavra demonstração, em algumas ocasiões faz a ressalva de se tratar de uma "demonstração material" (Montessori, 1934, p. 249).

Assim, começa com a primeira demonstração para o um triângulo que tem os dois catetos iguais. O material utilizado por Montessori consiste de encaixes numa moldura de ferro, com um lugar oco onde as peças de madeira se encaixavam. Ela usa um quadrado cuja medida do lado é 10 cm, que foi dividido em 8 partes (8 triângulos), como à esquerda da figura 13.

Figura 13

Teorema de Pitágoras. (Montessori, 2021, p. 221-222)



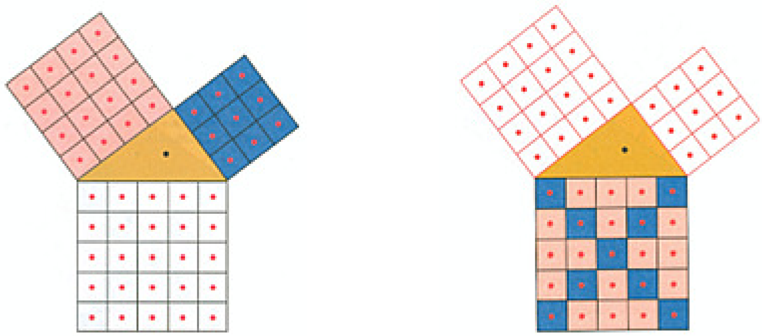
Pode-se constatar que os triângulos 1 e 2; e 3 e 4 formam quadrados nos lados do triângulo pintado em amarelo (figura 13 à direita). Enquanto os triângulos 5, 6, 7e 8 foram dispostos no lado da hipotenusa e formam um quadrado. A soma dos quadrados 1 e 2 e 3 e 4 formam um retângulo que é a metade do quadrado da figura 4 e também o quadrado formado pelos triângulos 5, 6, 7 e 8 são a outra metade do quadrado original. Isso prova o teorema de Pitágoras para o caso do triângulo isósceles. A demonstração da figura 13 é similar àquela de Wentworth e Hill.

Para Montessori, não se fornece um material para demonstrar no concreto o que se ensina de um modo abstrato, o material manipulável conduz os estudantes a encontrar relações evidentes, a demonstrar ou revelar, com sua aproximação outras relações não tão evidentes.

A segunda demonstração é aquela do triângulo retângulo que se acha em uma condição especial, com medidas dos lados 3, 4 e 5 (essa também é uma demonstração similar a de Wentworth e Hill, mas as cores e a disposição dos quadrados coloridos na figura 17 apelam mais para a visualidade). A ideia continua a ser de utilizar as relações já conhecidas de áreas de figuras planas e estabelecer para tal triângulo a relação da terna pitagórica, como 3x3=9 quadrados, 4x4=16 quadrados e 5x5= 25 quadrados, cumprem a relação 25= 9+16. A figura 14 ilustra a demonstração visual.

Figura 14

Teorema de Pitágoras. (Montessori, 2019, p. 223-224)



O material deve ser colorido e confeccionado na quantidade que aparece nas figuras, ou seja, 16 quadradinhos de uma cor e 9 de outra que irão cobrir o quadrado construído na hipotenusa.

A terceira demonstração: caso geral é também uma demonstração visual. O material de encaixe necessita de um espaço para o triângulo retângulo sobre o qual os quadrados vão ser construídos, assim esse espaço deve ser igual ao formato da figura 15, e as peças removíveis e coloridas.

Atualmente, a variabilidade deste exemplo pode ser visualizada muito facilmente com a ajuda de software de geometria dinâmica.

É preciso mostrar que a soma dos dois retângulos vermelhos, ou do quadrado vermelho, é igual a soma do quadrado dos catetos (em amarelo).

A estratégia é retirar o quadrado menor e deslocar para lá o triângulo retângulo de maneira que o vértice do triângulo toque na extremidade do encaixe como na figura 16 à esquerda. A explicação é que o paralelogramo (cor azul) possui a mesma área que o quadrado extraído (um lado do paralelogramo é a hipotenusa e o outro o cateto. Da mesma maneira, retira-se o quadrado do cateto maior e desliza-se o triângulo até a extremidade da moldura (figura 16 à direita). O quadrado extraído tem a mesma área que o paralelogramo em azul da figura 15, o que pode ser visto em azul é o espaço que se formou ao deslocar-se o triângulo retângulo.

Figura 15

Peças de Encaixe. (Montessori, 2019, p. 225-226)

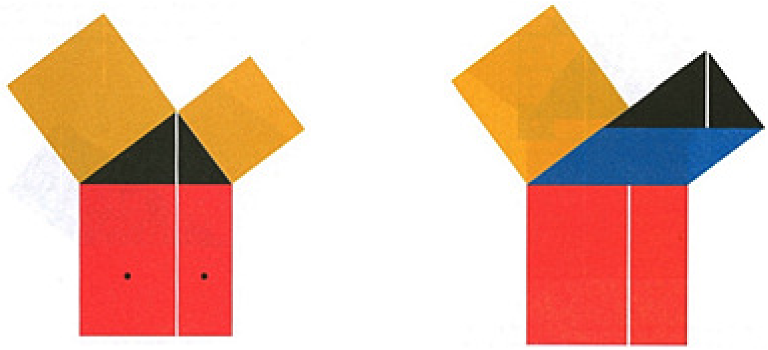
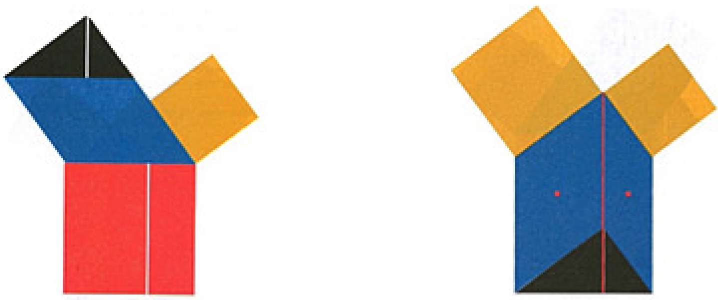


Figura 16

Deslocamentos dos triângulos. (Montessori, 2019, p. 227-228)

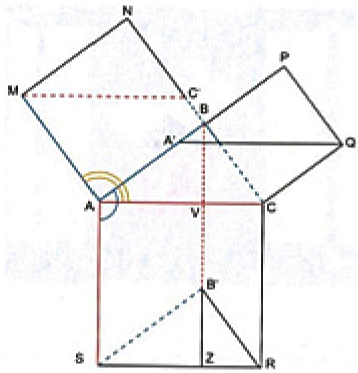


O terceiro movimento é extrair o quadrado maior (lado hipotenusa) e deslocar o triângulo até coincidir com a moldura (figura 15). O quadrado extraído tem área igual ao do paralelogramo azul (figura 15). Deslocando as figuras e completando os espaços ela afirma que o teorema de Pitágoras está "materialmente demonstrado" (Montessori, 1934, p. 252). Constata-se que a demonstração material usa o movimento das figuras (peças construídas em madeira colorida) na moldura de fundo. Para maiores detalhes da demonstração, sugere-se consultar o livro de Montessori.

Entretanto, ela não faz apenas essa demonstração visual, ela introduz a seguir, um raciocínio dedutivo, em que mostrará que o quadrado e o retângulo são equivalentes aos paralelogramos construídos. Apoia-se na figura 17 para realizar uma demonstração totalmente dedutiva (Montessori, 1934, p. 254-255).

Figura 17

Teorema de Pitágoras dedutivo. (Montessori, 2019, p. 259)



Na introdução da tradução russa do livro de Montessori (2019, p. 8), Serguei Kurganov afirma que na abordagem pedagógica da Psicogeometria de Montessori:

> [...] o professor por si só não transmite as ideias matemáticas para a criança. A mente da criança que está despertando, abre-as cada vez do seu jeito clareando e aprofundando a compreensão da matemática.

Fugindo um pouco do usual em livros didáticos, ela prossegue generalizando o resultado para outras figuras geométricas como o triângulo equilátero (figura 13) e para o triângulo isósceles (figura 14). Dizendo: “Um triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos” (Montessori, 1934, p. 258). Naturalmente, está se referindo as áreas dos triângulos, entretanto não explica porque vale a relação no caso do triângulo equilátero. Sabendo que a área de um triângulo é $\frac{b\times h}{2}$ e que a altura h no triângulo equilátero é h=$\frac{l\sqrt{3}}{2}$, teremos para cada lado a,b e c (sendo a hipotenusa a e os catetos b e c) as seguintes áreas: $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. Então: $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=b^2\frac{\sqrt{3}}{2}+c^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, o que recai no teorema anterior.

Figura 18

Teorema de Pitágoras. (Montessori, 2019, p. 235- 236)

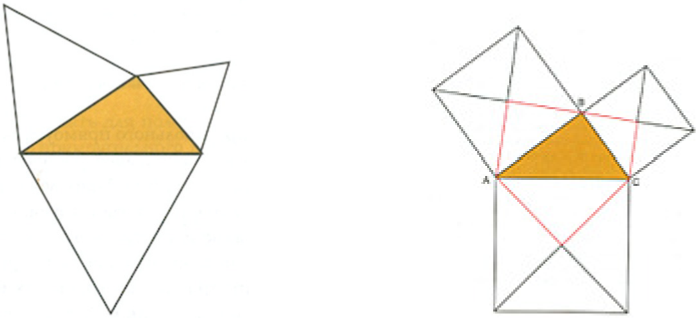
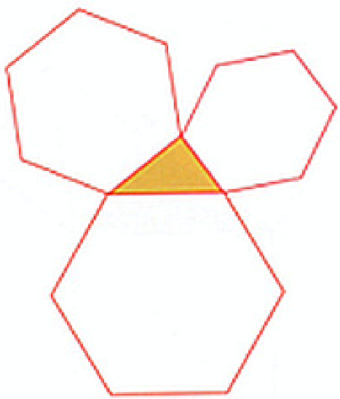


Figura 19

Teorema de Pitágoras – caso hexágono. (Montessori, 2019, p. 238)

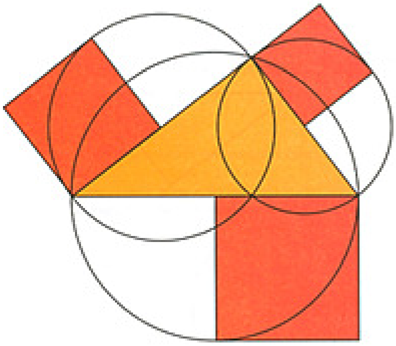


A explicação para o teorema de Pitágoras, no caso de tomar triângulos isósceles construídos nos lados do triângulo retângulo justifica-se a partir do caso particular para o caso dos quadrados, uma vez que cada triângulo isósceles é a quarta parte do quadrado construídos sobre os lados do triângulo retângulo (figura18).

A autora sugere que a demonstração para o caso do hexágono regular seja feita considerando que os hexágonos podem ser divididos em 6 triângulos equiláteros e a demonstração para estes já é conhecida.

Figura 20

Teorema de Pitágoras – caso semi-círculo. (Montessori, 2019, p. 239)



Para o semi-círculo ela justifica que a área do círculo está numa relação constante com o quadrado do raio e se os círculos são construídos de modo que cada lado do triângulo retângulo seja seu respectivo diâmetro, aparece a relação pitagórica (Montessori, 1934).

O objetivo de Montessori, ao trabalhar com essas atividades manipulativas, é permitir que as crianças percebam relações existentes entre as figuras e, também, que este estudo experimental possa prepará-las para um estudo sistemático da disciplina de geometria (Silva, 2021). O ensino de uma geometria experimental é propedêutico para a geometria euclidiana.

CONCLUSÕES

Os autores revisitados: Hoüel, Méray, Calkins, Bert, Laisant, Wentworth &Hill, Prestes, Lyra da Silva e Montessori trazem elementos de uma proposta pedagógica com características de uma geometria experimental.

Entre eles, alguns apresentam mais claramente essa abordagem, com muitos exemplos didáticos, enquanto outros manifestam-se defensores de uma tal proposta mas do ponto de vista didático pouco contribuem. Os autores analisados, oriundos de diferentes países, manifestaram em suas críticas um certo descontentamento com o ensino elementar da geometria, principalmente com os autores de livros didáticos pelo fato de eles abordarem a geometria dedutiva nas classes iniciais, privilegiando uma apresentação dedutiva da matemática. A preocupação desses autores com a escrita de um livro texto que vise efetivamente à aprendizagem vai ao encontro das ideias de Choppin (2000).

No século XX, os livros de Montessori (1916, 1934) enfatizam uma geometria experimental, justificada por sua base teórica empirista e pelo desenvolvimento de um método sistemático apoiado em materiais manipuláveis especialmente construídos para a criança manusear e, por meio de atividades, chegar às suas próprias conclusões.

Montessori tinha clareza que realizava dois tipos de "demonstração", uma que chamava de material ("está materialmente demonstrado", dizia ela), quando usava os encaixes de figuras moldadas em madeira colorida, em que a evidência prevalecia sobre a dedução e, outra totalmente dedutiva, em que dizia ("vamos repetir a demonstração com raciocínios"). No caso do teorema de Pitágoras, ela chama a atenção que Pitágoras deu especial atenção ao ângulo reto e o distinguiu dos demais. Assim como exemplo de aplicação do conceito de equivalência, ela estabeleceu uma prova material e outra dedutiva do resultado entre os lados de um triângulo retângulo. Nesse sentido, sua abordagem metodológica assemelha-se aquela de Pery, na Inglaterra, iniciar com uma geometria experimental e inserir alguns raciocínios dedutivos. Montessori ao usar moldes geométricos, figuras de encaixar, material manipulável para que as crianças cheguem aos resultados geométricos realiza o que denominamos de uma geometria experimental, abundantemente ilustrada em seu livro *Psico Geometria*, em que introduz o movimento em suas pranchas confeccionadas em ferro e com a possibilidade de realizar deslocamentos. Gradualmente ela introduz deduções, assim, não é possível caracterizar toda sua proposta como essencialmente experimental. Sua defesa em apresentar uma geometria experimental tem base na Psicologia infantil e no seu entendimento sobre o funcionamento do cérebro infantil - as atividades desenvolvidas com material manipulativo ativam a mente e estimulam o fortalecimento das funções cerebrais. A mão que toca e que manuseia os objetos era considerada por Montessori como essencial na aprendizagem – por isso uma proposta de geometria experimental (Silva, 2021). Nesse sentido, Montessori continua atual pois, segundo as pesquisas em neurociência dos últimos anos, o papel da manipulação de objetos no desenvolvimento neuro-psicológico é fundamental na aprendizagem. Sua proposta pedagógica ativa é semelhante aquelas recentes que usam software dinâmico, como Cabri, Geogebra e outros para realizar demonstrações geométricas visuais com características de uma geometria experimental. A diferença crucial é que o movimento no software dinâmico é realizado numa tela plana de um monitor, enquanto na proposta de Montessori a mão manipula os objetos e efetua os movimentos. Uma combinação de ambas propostas pode ser um caminho pedagógico interessante para o fortalecimento das funções cerebrais e consequente aquisição de novos conhecimentos científicos.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo estão disponíveis abertamente na Biblioteca Nacional de França – Gallica através do link https://gallica.bnf.fr/accueil/fr/content/accueil-fr?mode=desktop e do repositório do GHEMAT através do Link https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/1769 em formato que permitem serem lidos e processados automaticamente por computador.

REFERÊNCIAS

Almeida, Manoel C. & Justinom Edson J. R. (2020). *Ensinamentos da neurociência para uma pedagogia renovada*. e-book.

Bardin, Evelyne (2020). From experimental to theoretical geometry in new pedagogical movements at the turn of the 19th and 20th centuries (1872-1906). In: *History of Mathematics Education: contexts, reforms and methods. Proceedings of the Sixth International Conference on History of Mathematics Education* (p. 219-232). Verlag für wissenschatliche Texte und Medien.

Bert, P. (1886). *Premiers Éléments de Géometrie Expérimentale appliquée à la mesure des longueurs, des surfaces et des volumes*. Delagrave.

Calkins, Norman (1873). *Primary Object Lessons*. 8 ed. Harper& Brothers.

Calkin, Norman (1886). *Primeiras lições de coisas.* Trad. de Rui Barbosa. Ministério da Educação e Saúde (Volume XIII, tomo I das *Obras completas de Rui Barbosa).* https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/169134

Choppin, Alan. (2000) Pasado y presente de los manuales escolares. In: Berpio, J. R. (Ed.). *La cultura escolar de Europa* (p. 107-141). Biblioteca Nueva.

Fabri, Mara; Fortuna, Stefania. (2020). Maria Montessori and neuroscience: the trailblazing insights of an exceptional mind. *The Neuroscientist*, *26*, 28 fev.

Frizzarini, C. R. B., & Leme da Silva, M. C. (2016). Saberes geométricos de Calkins e sua apropriação nos programas de ensino dos grupos escolares paulistas. *Revista Brasileira de História da Educação*, *16*(3), 10-35.

Fröbel, F. (2010). *Friedrich Fröbel*. Trad. Org. Helmut Heiland. Coleção educadores. Massangana.

Gasca, A. M. (2015). Mathematics and children's minds: the role of geometry in the European tradition from Pestalozzi to Laisant. *International Archive of the History of Science*, *65*(2).

Houël, Jules (1867). *Essai critique sur les príncipes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*. 2. Gauthier-Villars.

Hughes, Steven. (2009). Neuropsychology and Montessori. *News AMI/USA*, *XVIII*(1), 1-2.

Laisant, C.A. (1907) *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*. Gauthier-Villars. https://archive.org/details/mathmatiquephilo00lais

Laisant, Charles-Ange, (1906). *Initiation mathématique*. Hachette.

Laisant, Charles (1919). *Iniciação Matematica*. Trad. Henrique Schindler. 2. ed. Guimarães. https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/135725

Laisant, Charles-Ange (1912). Report by David Eugene Smith. *L'Enseignement mathématique*, *14*, 507-532,.

Méray, Charles (1874). *Nouveaux éléments de géométrie*. F. Savy. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99636n?rk=107296;4

Méray, Charles (1903). *Nouveaux éléments de géométrie*. 2ª ed. P. Jobard.

Méray, Charles (1906). *Nouveaux éléments de géométrie*. 3ª ed. P. Jobard.

Montessori, Maria (1916). *L'Autoeducazione nelle scuole elementar*. Ermano Loeschler.

Montessori, Maria (1934). *Psico Geometria: el estúdio de la geometria basado em la psicologia infantil de Maria Montessori*. Araluce. https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/159258

Montessori, Maria (2019). *Psico Geometria* [ПсихоГеометрия]. Tradução do espanhol por Serguei Safronov. Narodnaia Kniga.

Prestes, G. (1895). *Noções intuitivas de geometria elementar*. Horacio Belfort Sabino.

Silva, H. L. (1923). *Geometria (Observação e Experiência)*. Leite Ribeiro.

Silva, Maria Célia Leme (2019). A Geometria Elementar e Intuitiva de Gabriel Prestes. *JIEEM*, *12*(3), 295-303.

Silva, Maria Célia Leme (2020). Wentworth & Hill e Heitor Lyra da Silva: circulação e apropriação de uma geometria intuitiva. *Perspectiva*, *39*(1), 1-17.

Silva, Circe Mary Silva ; L□m□da Silva, Maria Célia (2019). Obs□rvação □ Experiência como fio condutor da Geometria de Heitor Lyra da Silva. *Zetetiké*, *27*, 1-18.

Silva, Circ□Mary Silva; L□m□da Silva, Maria Célia (2020). Intuitiv□and experimental geometry: circulation of international proposals. In: *History of Mathematics Education: contexts, reforms and methods. Proceedings of the Sixth International Conference on History of*

Mathematics Education (p. 233-246). Verlag für wissenschatliche Texte und Medien.

Silva, Circe Mary Silva (2020). Psico-geometria de Maria Montessori. *Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP*, *2*(2), 12-31.

Silva, Circe Mary Silva (2021). Maria Montessori, Psico Geometria e Nerociência. *Educação Matemática em Revista (RS*), *22*(2), 135-146.

Viñao, Antonio (2008). A história das disciplinas escolares. *Revista Brasileira de História da Educação, 18*, 173-215

Wentworth, G. A.; Hill, G. A. (1902). *First Steps in Geometry*. Athenaeum.