ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7061

Conocimientos y Competencias de Futuros Maestros para la Creación de Problemas de Proporcionalidad

María Burgos[a]
Jorhan J. Chaverri Hernández[b]
[a] Universidad de Granada (UGR), Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Cartuja, Granada, España
[b] Universidad de Costa Rica (UCR), Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias, San Pedro, San José, Costa Rica

Recibido para publicación 22 mar. 2022. Aceptado después de la revisión 21 sep. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: La invención de problemas es una competencia fundamental que potencia los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas, por lo que debe ser un objetivo en los planes de formación de profesores. **Objetivos**: Este trabajo describe y analiza una intervención formativa con futuros maestros, dirigida a desarrollar la competencia mencionada, usando tareas de proporcionalidad. **Diseño**: Es un estudio cualitativo e interpretativo que adopta una metodología propia de las investigaciones de diseño o ingeniería didáctica. El diseño de la intervención y el análisis de contenido de las respuestas de los participantes usan herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Contexto y participantes**: La acción formativa se llevó a cabo con 127 estudiantes del grado de Educación Primaria en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria, en una universidad española. **Recolección de datos y análisis**: Se propuso a los futuros maestros organizados en 33 equipos de trabajo, crear dos problemas a partir de una situación dada, identificando objetos y dificultades, cuya solución fue analizada por el equipo investigador. **Resultados**: Los resultados muestran que los participantes encuentran dificultades para elaborar enunciados de proporcionalidad pertinentes a partir de la situación dada, identificar el nivel de complejidad asociado, reconocer los objetos matemáticos que interactúan en la solución a sus problemas y las dificultades que éstos podrían ocasionar a los alumnos de primaria. **Conclusiones**: Es necesario reforzar la competencia de creación de problemas y el razonamiento proporcional en la formación de profesores.

Palabras clave: invención de problemas; proporcionalidad; formación de profesores; conocimiento didáctico-matemático; análisis ontosemiótico.

Autor correspondiente: Jorhan J. Chaverri Hernández. Email: jorhan2009@hotmail.com

Knowledge and Competencies of Prospective Teachers for the Creation of Proportionality Problems

ABSTRACT

Background: Problem posing is a fundamental competence that enhances the didactic-mathematical knowledge of the mathematics teacher, so it should be an objective in teacher training plans. **Objectives**: This paper describes and analyses a training intervention with future teachers, aimed at developing the aforementioned competence, using proportionality tasks. **Design:** This is a qualitative and interpretative study that adopts a methodology characteristic of didactic design or engineering research. The design of the intervention and the content analysis of the participants' responses use theoretical and methodological tools from the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction. **Context and participants**: The training action was carried out with 127 students of the Primary Education degree in the framework of the Design and Development of the Mathematics Curriculum in Primary Education subject, in a Spanish university. **Data collection and analysis:** The future teachers, organised in 33 work teams, were asked to create two problems based on a given situation, identifying objects and difficulties, the solution of which was analysed by the research team. **Results:** The results show that the participants encounter difficulties in elaborating relevant proportionality problems from the given situation, identifying the associated level of complexity, recognising the mathematical objects interacting in the solution to their problems and the difficulties that these could cause to primary school pupils. **Conclusions:** It is mandatory to reinforce problem creation competence and proportional reasoning in teacher education.

Keywords: problem posing; proportionality; teacher training; didactic-mathematical knowledge, ontosemiotic analysis.

INTRODUCCIÓN

Parece claro que la invención de problemas es tan importante para las matemáticas como la resolución de problemas, no hay problema que resolver si antes no se ha planteado uno. Sin embargo, mientras que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas se ha situado en el centro de los planes de estudio y la práctica educativa, el planteamiento de problemas ha recibido menor atención (Ellerton, 2013). Además, su empleo en clases de matemáticas no es una práctica común (Espinoza et al., 2014).

La invención de problemas no solo está estrechamente relacionada con la resolución de problemas, sino que ambas deben verse como propuestas complementarias que permiten incrementar las habilidades matemáticas de los estudiantes (Espinoza et al., 2014; Mallart-Solaz, 2019; Pino-Fan et al., 2020;

Silver, 2013). Por un lado, contribuye al desarrollo y evaluación del conocimiento matemático, dado que estimula un alto nivel de abstracción y requiere de un importante dominio del contenido que se estudia, así como el uso adecuado del lenguaje, conceptos, procesos y procedimientos matemáticos (Ayllón et al., 2016; Fernández-Millán & Molina, 2016; Kwek, 2015). Por otro, reduce los errores, incrementa la creatividad y la motivación, y disminuye la ansiedad, y el miedo de los estudiantes hacia las matemáticas (Ayllón et al., 2016; Fernández & Carrillo, 2020; Tichá & Hošpesová, 2013).

Para que los profesores puedan diseñar tareas de invención de problemas adecuadas para sus estudiantes y gestionar las dificultades en dicho contexto, también ellos deben estar capacitados para plantear problemas (Singer et al., 2013). Los docentes, además de resolver problemas, deben ser capaces de elegirlos, modificarlos o crearlos con una finalidad didáctica (facilitar o profundizar en el aprendizaje de sus alumnos y estimular su razonamiento matemático), así como de evaluar críticamente la calidad de la actividad matemática que promueven (Malaspina et al., 2015, Malaspina et al., 2019). Sin embargo, incluso los profesores con años de experiencia tienen dificultades para proponer problemas que sean relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, plantean enunciados que no están adaptados al nivel educativo, son incorrectos o incompletos, y en su mayoría considerados solo académicos (Ellerton, 2013; Mallart et al., 2018; Singer & Voica, 2013).

Esto ha motivado que recientemente un gran número de investigadores en educación matemática se interesen por la invención de problemas, señalando explícitamente su estrecho vínculo con las competencias docentes y destacando la importancia de fomentar su desarrollo en los programas de formación de profesores (Ellerton, 2013; Espinoza et al., 2014; Felmer et al., 2016; Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018; Milinković, 2015; Silver, 2013; Tichá & Hošpesová, 2013). La invención de problemas debe verse

> Tanto como medio de instrucción (destinado a involucrarlos en actividades de aprendizaje genuinas que produzcan una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos matemáticos) como objeto de instrucción (centrado en el desarrollo de la competencia para identificar y formular problemas a partir de situaciones no estructuradas). (Singer et al., 2013, p. 5)

Incorporar la creación de problemas en la formación de profesores supone desarrollar herramientas teórico-metodológicas que los guíen en una tarea compleja con la que no están familiarizados (Ellerton, 2013; Mallart-Solaz, 2019; Mallart et al., 2018).

Las intervenciones desarrolladas con profesores en formación (Burgos et al., 2018; Burgos & Godino, 2020b, 2021a, 2021b, 2022; Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018), empleando los constructos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino et al., 2007), muestran el estrecho vínculo entre la capacidad de crear problemas que faciliten los aprendizajes de los estudiantes y su competencia de análisis didáctico. Esta última supone, en particular, "analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa" (Godino et al., 2017, p. 92).

En esta investigación se describe el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con futuros maestros de primaria, destinada a desarrollar su competencia para crear problemas matemáticos con fines didácticos, siguiendo el esquema desarrollado por Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2013; Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018) en el marco del EOS. Así, partiendo de la consideración de la creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas, el núcleo de este trabajo es la invención por maestros en formación de problemas que involucran la proporcionalidad.

A pesar de su gran importancia y de que ha sido un tópico de fructífera investigación en las últimas décadas, las nociones de razón y proporción siguen presentando problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Obando et al, 2014). En concreto, las investigaciones centradas en analizar el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la proporcionalidad muestran que tanto los profesores en formación inicial como en ejercicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Balderas et al., 2014; Buforn & Fernández, 2014; Buforn et al., 2018; Burgos et al., 2018; Burgos & Godino, 2020b, 2022; Lo, 2004; Rivas et al., 2012; Weiland et al., 2020).

Mostramos una metodología para desarrollar y evaluar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de futuros maestros sobre proporcionalidad por medio de la creación de problemas. En la acción formativa, los futuros docentes deben elaborar problemas de proporcionalidad a partir de una situación dada, con el objetivo de graduar su complejidad e identificar, en base a los elementos matemáticos implicados en su resolución, las potenciales dificultades para los alumnos.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El EOS asume una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas como quehacer humano, que le lleva a considerar la actividad de las personas en la resolución de problemas como elemento central en la construcción del conocimiento matemático, en su doble faceta institucional y personal (Godino et al., 2007).

Significado pragmático y configuración ontosemiótica

Dada la pluralidad y relatividad de la actividad matemática, el significado no se puede resumir a una definición solamente matemática, sino está estrechamente ligado a la práctica y al objeto. En el EOS, se entiende por *objeto matemático*, cualquier entidad que interviene de alguna manera en la práctica o actividad matemática y que puede ser separado o individualizado, siendo *practica matemática* "toda actuación o manifestación (lingüística o no)[1] realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p. 334). El *significado* de un objeto matemático se entiende como el sistema de prácticas (institucionales o personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como objetos personales (Godino & Batanero, 1994). Esta dualidad permite hablar de significado institucional y personal de los objetos matemáticos.

En las prácticas matemáticas, o sistema de prácticas matemáticas, participan y emergen distintos tipos de objetos matemáticos, que son clasificados según su naturaleza y función en las siguientes categorías: *situaciones-problema* (ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra matemáticas o extra matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática), *lenguajes* (términos y expresiones

[1] Verbal, gráfica, etc.

matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros), *conceptos* (entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición), *proposiciones* (enunciados sobre conceptos, propiedades o atributos) *procedimientos* (técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos), y *argumentos* (requeridos para demostrar las proposiciones o explicar los procedimientos).

La actividad matemática viene modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, de las que emergen los diferentes objetos matemáticos (la "estructura") lenguajes, conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos y situaciones-problema, por medio de los procesos (el "funcionamiento") de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización, respectivamente. De esta forma, queda determinada la *configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos,* entendida como red articulada en las que objetos y procesos desempeñan una determinada función dentro de la práctica matemática que los origina. Dicha herramienta es clave para el análisis de la actividad matemática desde sus dos interpretaciones: en la perspectiva epistémica o institucional, el análisis permite caracterizar los conocimientos institucionales, en la interpretación cognitiva o personal describe los conocimientos personales (Font et al., 2013). Reconocer las configuraciones de objetos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema permite al profesor prever conflictos potenciales de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados oportunamente en el proceso de aprendizaje (Godino et al., 2017).

Modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas

El modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor desarrollado en el marco del EOS articula las categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas, por medio de las facetas y componentes de los procesos de estudio matemático consideradas en dicho marco (Godino et al., 2017). Así, se acepta que el profesor debe tener *conocimiento matemático per se*, que le permita resolver los problemas y tareas propuestas en el currículum del nivel educativo donde imparte su docencia, y articularlo con los niveles superiores. Además, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático el profesor debe tener un *conocimiento didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan el proceso educativo: *epistémica* (conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, significados institucionales de referencia), *ecológica* (relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, factores curriculares y socio-profesionales que condicionan los procesos de instrucción matemática), *cognitiva* (cómo los estudiantes razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje), *afectiva* (aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y su estudio), *mediacional* (recursos tecnológicos, materiales y temporales adecuados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes) e *interaccional* (conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, selección y organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, gestión de las interacciones que se puede establecer en el aula).

De manera específica, la creación de problemas, su solución, el análisis de los conocimientos puestos en juego y la modificación atendiendo a dichos conocimientos o las dificultades para los alumnos, constituyen una parte esencial de la facetas epistémica, cognitiva e interaccional de dicho modelo en tanto permiten al profesor graduar la complejidad de las tareas que propone a sus estudiantes, comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización de los conocimientos.

Además de disponer de estos conocimientos, el modelo CCDM propone que el profesor debe ser *competente* para abordar los problemas didácticos básicos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En particular, la *competencia de análisis e intervención didáctica* permite al profesor describir, explicar y juzgar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y hacer propuestas de mejora (Godino et al., 2017). Las herramientas teóricas y metodológicas del EOS permiten desarrollar dicha competencia que se articula por medio de las subcategorías: análisis de significados globales, análisis ontosemiótico de prácticas, gestión de configuraciones didácticas, análisis normativo y análisis de la idoneidad didáctica (Godino et al., 2017). Dado el interés de esta investigación, nos centraremos en las competencias de *análisis de significados globales*, basada en la identificación de las situaciones-problemas y las prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución, y en la competencia de *análisis ontosemiótico de las prácticas*, que supone la capacidad para reconocer la configuración de objetos y procesos intervinientes y emergentes de las prácticas matemáticas. Ambas competencias son fundamentales en la creación de problemas para responder a determinados requerimientos. Recíprocamente, la creación de problemas sirve de medio para desarrollarlas, pues requiere: reflexionar sobre la estructura global del problema, los objetivos que persigue, si la información facilitada es suficiente para resolver el problema y de qué forma puede abordarse; analizar los objetos y procesos matemáticos que intervienen y cómo se relacionan para dar solución al problema propuesto; reconocer las posibles dificultades que se pueden encontrar los alumnos y como abordarlas en el planteamiento de nuevas situaciones.

Creación de problemas y competencias docentes

Si bien existen diferentes posturas sobre qué estrategias o metodologías se consideran en la creación de problemas (Akay & Boz, 2010; Chapman, 2012; Contreras, 2007; Silver, 1994; Stoyanova, 1998), en este trabajo adoptamos la propuesta de Malaspina (2013). De acuerdo con este autor, la creación de problemas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, el cual está determinado por cuatro elementos fundamentales: la *información*, es decir, los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema; el *requerimiento,* esto es, lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones; el *contexto*, que puede ser intra matemático o extra matemático; el *entorno matemático* o marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema, por ejemplo: funciones lineales, teoría de números, geometría analítica, etc.

La creación de nuevos problemas puede darse a través de la variación de un problema dado o por elaboración (Malaspina, 2013). La *variación de un problema* es un proceso por el que se construye un nuevo problema modificando uno o más de los cuatro elementos del problema inicial. Por otro lado, la *elaboración de un problema* es un proceso en el que se construye un nuevo problema de forma libre, a partir de una situación (dada o configurada por el autor), o bien, por un requerimiento específico, que puede tener énfasis matemático o didáctico. En la *elaboración de un problema a partir de una situación*, el contexto se origina en la situación, la información se obtiene por selección o por modificación de la que se percibe en tal situación, el requerimiento es una consecuencia de las relaciones entre los elementos de la información implícita en el enunciado y el entorno matemático se puede determinar por el autor o por las formas de resolver el problema. En la *elaboración a partir de un requerimiento específico* (matemático o didáctico), el contexto o la información debe establecerse para responder de manera adecuada a dicho requerimiento. El conocimiento didáctico-matemático sobre el contenido, en nuestro caso la proporcionalidad, es especialmente importante para responder adecuadamente al requerimiento.

Conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional

Desde la perspectiva epistémica, es decir, desde el conocimiento matemático institucionalizado, la proporcionalidad ha sido estudiada fundamentalmente a partir de tres enfoques: el aritmético, centrado en las nociones de razón y proporción (donde destacan los problemas de comparación o de valor faltante); el algebraico-funcional, basado en la noción y propiedades de la función lineal; y el geométrico, focalizado en la semejanza de figuras. Aunque el primero de estos significados es el que predomina en la mayoría de las propuestas curriculares e investigaciones (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2007), diversos autores defienden la importancia de comenzar el estudio de la proporcionalidad con una aproximación informal previa a la formalización de los conceptos de razón y proporción (Cramer & Post, 1993; Ruiz & Valdemoros, 2004). Esta perspectiva de tipo intuitivo, basada en la comparación perceptiva y el análisis cualitativo de las relaciones multiplicativas entre números particulares, se propone como primer acercamiento a la proporcionalidad (Burgos & Godino, 2020a; Fiol & Fortuny, 1990).

En relación al desarrollo del razonamiento proporcional en escolares y las dificultades que éstos se encuentran al afrontar situaciones de proporcionalidad, diversas investigaciones (Fernández & Llinares, 2011, 2012; Silvestre & Ponte, 2011; Tournaire & Pulos, 1985; entre otros) muestran que el mayor o menor éxito en las tareas de proporcionalidad depende de factores como: la relación entre los números implicados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes involucradas en la situación, el formato en que se presenta la tarea, la familiaridad del contenido, etc.

Finalmente, para afrontar las dificultades que se encuentran los estudiantes en el desarrollo del razonamiento proporcional, es importante hacer explícita la relación multiplicativa en situaciones proporcionales, permitir que distingan comparaciones multiplicativas de las aditivas e involucrar tanto razones internas (relaciones entre diferentes valores de la misma magnitud) como externas (entre valores de magnitudes diferentes) en las situaciones propuestas (Fernández & Llinares, 2011; Lamon, 2007; Ruiz & Valdemoros, 2004).

Disponer de estos conocimientos didáctico-matemáticos en las facetas epistémica, cognitiva e instruccional permitirá a los profesores crear problemas en los que estén involucrados los diversos significados de la proporcionalidad, conociendo las configuraciones de objetos característicos (Burgos & Godino, 2020a) y las relaciones establecidas, e identificando cómo éstos contribuyen a un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional de sus estudiantes y qué dificultades pueden encontrarse sus alumnos al resolverlos.

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque mixto: cualitativa, pues permite describir e interpretar el conocimiento didáctico-matemático de los futuros maestros y las dificultades que presentan en la creación de problemas, y cuantitativa, dado que facilita el tratamiento de los datos a través de la categorización, medición y descripción de las características y los perfiles del grupo de participantes.

Teniendo en cuenta el problema de investigación, el marco metodológico será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino et al., 2014) que sigue las fases propias de las investigaciones de diseño: *estudio preliminar*[2] (significados institucionales de referencia, interpretados a través de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos; significados personales de los estudiantes, dificultades previstas y creencias en relación al contenido matemático, análisis de los recursos técnicos y temporales previstos), *diseño de la trayectoria didáctica* (selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, planificación de intervenciones controladas del docente), *implementación* de la trayectoria didáctica (observación de las interacciones entre personas, recursos y evaluación de los aprendizajes logrados), *análisis retrospectivo* (derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación). Además, se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) para examinar los protocolos de respuesta de los estudiantes para maestro de primaria que intervinieron en la experiencia formativa.

[2] Supone, en particular el estudio de los referentes sobre creación de problemas y conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la proporcionalidad que requieren los futuros maestros para plantear problemas pertinentes.

A continuación, se describen el contexto de la investigación y su diseño, prestando atención a la selección de las tareas propuestas a los participantes.

Contexto y participantes

La acción formativa se llevó a cabo con dos grupos de 61 y 66 estudiantes del grado de Educación Primaria (EPM en adelante) en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria, en una universidad española[3].

El estudio de la proporcionalidad es uno de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria que los estudiantes habían cursado en su primer año de formación de grado. Los EPM al acabar este curso deben conocer y relacionar los principales conceptos, propiedades y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de Educación Primaria, así como ser capaces de enunciar, plantear y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos, comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas. En segundo curso, los EPM recibieron formación específica sobre los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas tanto en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), como didácticos (tareas y actividades, materiales y recursos). En la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de las Matemáticas en Educación Primaria, los futuros maestros deben profundizar y aplicar el conocimiento adquirido en los cursos previos para diseñar y fundamentar unidades didácticas. En particular, uno de los focos fundamentales de la asignatura es el análisis, diseño y secuenciación de tareas matemáticas de acuerdo con unos contenidos específicos y determinadas expectativas de aprendizaje.

Diseño e implementación de la intervención

La intervención se desarrolló a través de cuatro momentos diferenciados. En la primera sesión formativa, llevada a cabo durante la clase

[3] Para no revelar la identidad de los participantes no se firmó el formulario de consentimiento informado (TCLE), en todo caso, se exonera a Acta Scientiae de las consecuencias que puedan derivarse, incluyendo la exhaustiva asistencia y eventual indemnización por los daños que pueda ocasionar cualquiera de los participantes en la investigación, según la Resolución nº 510, del 7 de abril de 2016, del Consejo Nacional de Salud de Brasil.

de teoría (dos horas de duración) se presentaron las nociones de tarea matemática, prácticas y objetos matemáticos. Se destacó la importancia de que el profesor seleccione, diseñe y secuencie tareas que permitan promover eficazmente el aprendizaje de sus escolares, presentado como elementos[4] que guíen la búsqueda, selección y modificación de las tareas, los siguientes:

- *Contenido matemático* que involucra: objetos matemáticos, significados, contextos.
- *Finalidad*: Expectativas de aprendizaje (objetivos específicos y competencias) que permite desarrollar.
- *Limitaciones de aprendizaje:* Posibles dificultades y errores que pueden aparecer en su resolución.
- *Nivel de complejidad.* En el contexto de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum se consideran los niveles de complejidad de los problemas establecidos en el marco PISA (OCDE, 2003): a) *nivel de reproducción*, tareas relativamente familiares que requieren básicamente la reiteración de los conocimientos estudiados, la utilización de algoritmos sencillos o la realización de operaciones sencillas; b) *nivel de conexión*, además de las competencias necesarias en el nivel anterior, exige integrar y vincular las ideas principales, establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar la solución a problemas no rutinarios pero en contextos familiares o cercanos; c) *nivel de reflexión*, moviliza capacidades que requiere comprensión y reflexión sobre los procesos necesarios o empleados para resolver el problema, identificar conceptos o propiedades no siempre explícitos para planificar estrategias en distintos escenarios, argumentar y justificar resultados y generalizar a nuevos contextos.

Esta sesión se organizó sobre el análisis de tareas, algunas de las cuales fueron de proporcionalidad, recordando las configuraciones epistémicas que emergen de las prácticas asociadas a los distintos significados y algunas de las dificultades y errores sobre dicho contenido identificadas en las investigaciones en didáctica de las matemáticas (estudio preliminar).

[4] Estos elementos aparecen contemplados en el programa de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum en cuyo marco se desarrolla la intervención.

En la siguiente sesión práctica (una hora de duración), los EPM trabajaron con sus equipos habituales de trabajo en el análisis de una tarea matemática (centrada en la construcción a escala de un puzle y asignación proporcional de precios a sus piezas) siguiendo los elementos descritos. La tercera sesión (dos horas de duración) se centró en dar a conocer a los EPM la metodología para la creación de problemas descrita en la sección previa, insistiendo en la importancia de la invención de problemas, el papel que desempeña dentro del currículum y su desarrollo, así como en la necesidad de que los docentes adquieran la capacidad de crear problemas de matemáticas, para poder orientar adecuadamente el desarrollo de tal capacidad en sus alumnos. En esta sesión formativa, se emplearon también algunos ejemplos de tareas de proporcionalidad, entre otros, para mostrar la creación de problemas por variación o por elaboración, recordando nuevamente los conocimientos necesarios sobre el razonamiento proporcional. En la cuarta sesión (una hora de duración), los estudiantes trabajaron de nuevo de forma colaborativa, formando un total de 33 equipos de trabajo (19 equipos en un grupo y 14 en otro, a los que nos referiremos como E1, E2, etc.) para responder a tres consignas sobre creación de problemas por variación (tarea 1), elaboración de problemas a partir de una situación dada (tarea 2) y creación de problemas a partir de un requerimiento didáctico-matemático (tarea 3). En la Figura 1 se describe la consigna sobre la tarea 2 planteada a los EPM, de cuyos resultados se da cuenta en este artículo.

Figura 1

Consigna sobre creación de problemas a partir de una situación

Crea, a partir de la siguiente situación, dos problemas de proporcionalidad en los que consideres que el grado de complejidad es distinto. Identifica en cada caso los objetos matemáticos que intervienen, las posibles dificultades que podrían encontrar alumnos de primaria, indicando el curso para el que estarían destinados.

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17,80 €. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 €

Según se establece en la consigna, el entorno matemático en el que se deben crear los problemas es el de proporcionalidad. Por sí sola, la situación dada en la Figura 3, no determina un problema dado que no hay un requerimiento (no hay cuestión que se pida al alumno resolver). Crear el problema a partir de la situación supone, en particular, "añadir" las preguntas a la situación. Observamos que al solicitar que los problemas respondan al entorno de proporcionalidad y tener un nivel de complejidad diferente, se deben atender también a requerimientos didáctico-matemáticos. Sin embargo, el punto de partida para la elaboración de los problemas viene dado por la situación establecida. Las condiciones adicionales permiten delimitar la tarea de acuerdo con el interés de la investigación y realizar un análisis de características específicas en la misma.

Los resultados de investigaciones previas (ver la revisión de Stahnke et al., 2016) muestran que tanto profesores en formación como en ejercicio tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (dejándose llevar por sus propias creencias), diferenciar tareas rutinarias de no rutinarias, identificar su potencial didáctico y elegir los formatos adecuados para fomentar el aprendizaje de sus alumnos. Por este motivo, proponemos a los EPM que, como parte del análisis, reconozcan los objetos matemáticos implicados en su solución, las posibles dificultades asociadas y el curso para el que serían adecuados. Así, articulamos la creación de problemas con las competencias para el análisis de significados y análisis ontosemiótico de prácticas, objetos y procesos (Godino et al., 2017). Pedir a los EPM que identifiquen las dificultades que pueden tener sus alumnos en los problemas que ellos plantean, nos permite diagnosticar y reforzar su conocimiento didáctico-matemático en la faceta cognitiva (Godino et al., 2017). Además, reflexionar sobre el curso al que estarían destinados, les ayuda a concretar el grado de complejidad atendiendo a los conocimientos que les son más o menos familiares a los estudiantes, según la planificación escolar.

Categorías de análisis de la información

Presentamos en esta sección las categorías empleadas para la valoración de sus respuestas a la consigna.

Pertinencia de los problemas y grado de complejidad asociado. Para que el problema se considere pertinente debe ser, en primer lugar, significativo. Esto supone que el enunciado propuesto establezca realmente un problema matemático, que tenga solución y ésta no está implícita en el enunciado, su redacción sea clara y no presente ambigüedad (falta o redundancia en la información), así como que se identifiquen claramente los distintos elementos que lo caracterizan. Si no posee alguna de estas características se considera un problema no significativo. En este sentido, el enunciado no se considera significativo si plantea inventar un problema, o si el requerimiento implica solamente creencias, un dominio meramente conceptual o si es posible responder al mismo sin realizar ningún tipo de procedimiento matemático.

El problema se considera *pertinente* si es significativo, parte de la situación inicial dada sin alterarla y es de proporcionalidad. De esta forma aparecen las siguientes categorías a priori:

- Ninguno de los problemas creados es pertinente.
- Solo un problema planteado es pertinente, pero no supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.
- Solo un problema planteado es pertinente y supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.
- Los dos problemas planteados son pertinentes, pero ambos corresponden al mismo nivel de complejidad.
- Los dos problemas planteados son pertinentes y sus niveles de complejidad son distintos.

Reconocimiento de objetos matemáticos. Los EPM deben identificar los objetos matemáticos que intervienen en cada uno de los problemas creados. Se trata de que reflexionen sobre las configuraciones ontosemióticas en los problemas de proporcionalidad que ellos mismo elaboran y ayudarles a diagnosticar las posibles dificultades en la actividad matemática. De acuerdo con la finalidad del trabajo, centramos la atención en las configuraciones asociadas a los problemas de enunciado pertinente. En este caso, dentro de cada problema, se emplearon las siguientes categorías de análisis de reconocimiento de objetos según las categorías del EOS:

- *No responde*. Los EPM no identifican los objetos matemáticos en el problema.
- *Incorrectos*. Todos los objetos matemáticos señalados por los EPM son incorrectos.
- *Mayoría incorrectos*. Los EPM identifican correctamente al menos uno de los objetos matemáticos en el problema, pero menos de la mitad.
- *Parcialmente correctos*. Los EPM identifican correctamente al menos la mitad, pero no todos, los objetos matemáticos en el problema.

- *Correctos.* Todos los objetos matemáticos del problema son identificados correctamente.

Identificación de dificultades previstas en la resolución del problema. Por otro lado, los EPM deben señalar las dificultades que podrían encontrar alumnos de primaria al resolver los problemas. Atendiendo a las categorías de objetos del EOS, se clasifican en:

- *Situacionales*, asociadas a la comprensión del enunciado del problema.
- *Conceptuales*, relacionadas a conceptos, sus descripciones o definiciones.
- *Proposicionales*, asociadas a las proposiciones o propiedades que relacionan conceptos.
- *Procedimentales*, vinculadas al desarrollo de técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentales*, relativas a la justificación de proposiciones y procedimientos.

RESULTADOS

A continuación, presentamos los resultados del análisis de contenido de las respuestas elaboradas por los equipos de trabajo a la tarea propuesta (Figura 1), siguiendo las categorías establecidas en la sección previa.

Pertinencia y grado de complejidad de los problemas elaborados por los EPM

Como se observa en la Tabla 1, los EPM tuvieron dificultades para elaborar problemas pertinentes a partir de la situación dada; sólo 5 equipos respondieron adecuadamente a la tarea elaborando dos problemas pertinentes con grados de complejidad distintos.

Tabla 1

Distribución de los equipos de EPM de acuerdo la pertinencia y grado de complejidad de los problemas creados (n=33)

Categorías	Frecuencia (Porcentaje)
Ninguno de los problemas creados es pertinente.	16 (48,48)
Solo un problema planteado es pertinente, pero no supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.	5 (15,15)
Solo un problema planteado es pertinente y supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.	7 (21,21)
Los dos problemas planteados son pertinentes, pero tienen el mismo nivel de complejidad.	0 (0,00)
Los dos problemas planteados son pertinentes y tienen distintos niveles de complejidad.	5 (15,15)
Total	33 (100)

De los 66 problemas que se analizaron (dado que cada equipo debía crear dos problemas en la tarea), 44 se valoraron como no pertinentes. De estos 44 problemas no pertinentes, 28 son además no significativos, fundamentalmente porque los enunciados son ambiguos, les falta claridad o no se pueden resolver. Por ejemplo, en la Figura 2 el equipo E19 propone un problema en el que se debe comparar el peso de dos tartas y decidir si el precio fuera proporcional al peso (aquí incluyen una errata en su enunciado), cuál sería más cara. Sin embargo, a partir de las dimensiones de la tarta no se puede determinar su peso, por lo que no se puede responder al requerimiento.

Figura 2

Enunciado no significativo. No se puede resolver (E19)

Ana encuentra dos tartas para regalar en un cumpleaños y sabe que una pesa 500 g pero la segunda no especifica el peso aunque sí especifica las medidas y encontramos que mide 10 centímetros de largo, 10 centímetros de ancho y 6 centímetros de grosor. ¿Qué tarta pesa más? Si el peso fuese proporcional al peso, ¿Cuál sería más cara?

En la Figura 3 mostramos uno de los problemas que propone E25. En este enunciado se conserva la situación inicial, sin embargo, no deja claro si las entradas de Pablo son del mismo tipo que las de Julio (por lo que tendrán un determinado precio) o del tipo de las de Clara (tendrán otro) o de qué forma se puede determinar su valor unitario.

Figura 3

Problema no significativo, enunciado ambiguo (E25)

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80€. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21€. Al final de la tarde se une a Julio y Clara su amigo Pablo. Clara decide que por ser su cumpleaños [illegible] va a invitar a las atracciones que quiera. Pablo se sube en 6 atracciones, sabiendo que Clara ha pagado 21€ subiéndose en 10 atracciones, ¿Cuánto tendrá que pagarle a Pablo?

De los 16 problemas que se consideran significativos, aunque no pertinentes, 11 mantienen el entorno de la proporcionalidad (al menos de forma implícita) modificando parcial (Figura 4) o totalmente la información dada en la situación de partida.

Figura 4

Problema no pertinente. Modifica parcialmente la situación dada (E24)

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 4 atracciones y le ha costado 10 euros. Clara se ha montado en 8 atracciones y ha pagado 20 euros. Si se gastaran cada uno 25 € ¿en cuántas atracciones se podrán subir?

Los otros 5 enunciados significativos, pero no pertinentes, mantienen parcialmente la situación, pero plantean problemas aditivos de comparación (4) o combinación (1). Por ejemplo, en la Figura 5 se aprecia que el problema propuesto por el equipo E1, que si bien parte de la situación dada, pero precisa calcular la diferencia entre los gastos totales de Julio y Clara, lo que no refiere a una situación proporcional sino a un problema aditivo de comparación.

Figura 5

Problema no pertinente, creado fuera del entorno de proporcionalidad (E1)

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80 €. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 €. ¿Cuánto se ha gastado Clara más que Julio?

Los 22 (de un total de 66) problemas creados de manera pertinente por los EPM responden fundamentalmente a estos tipos:

a) Se consideran dos pares de magnitudes directamente proporcionales: número de entradas-precio pagado por ellas para cada uno de los niños. Se da un nuevo valor conocido del número de entradas que se desea comprar para cada uno de ellos (común o no) y se requiere determinar el nuevo precio, o bien, se pide determinar la cantidad de entradas de cada tipo que puede comprar cada niño (ver Figura 6). Esta categoría se encuentra en 10 de los problemas pertinentes creados.

b) Se consideran dos pares de magnitudes directamente proporcionales: número de entradas-precio pagado por ellas para cada uno de los niños. Se requiere comparar los valores unitarios (precio de una única entrada) en cada caso, usualmente para decidir qué niño obtuvo un mejor precio por su entrada (Figura 7). De este tipo, se encuentra 8 problemas pertinentes.

c) Se consideran que las dos magnitudes número de entradas (entendidas todas del mismo tipo) y precio son directamente proporcionales. Se entiende que la diferencia de precio total de los niños es porque se compró un bono, otro artículo o bien se aplicó un descuento (en este caso a Clara). Se requiere averiguar el precio del bono o bien del descuento aplicado-pregunta si estas son directamente proporcionales. Supone aceptar que tanto Julio como Clara deberían haber pagado el mismo precio unitario (Figura 8). De esta categoría, se proponen 4 problemas.

A continuación, consideramos cuál fue el grado de complejidad real en aquellos problemas considerados pertinentes y cómo lo valoraron los EPM. De los 22 problemas pertinentes, 8 corresponden al grado de reproducción, 8 al de conexión y 6 al de reflexión. De estos, solo 11 fueron clasificados por los equipos de EPM: 10 según los niveles de PISA, de ellos 6 correctamente (uno de reproducción, dos de conexión y tres de reflexión), y otro como de "contexto y familiaridad" (E6). Aquellos que lo hicieron de forma incorrecta, dieron un nivel mayor de complejidad del realmente implicado (conexión por reproducción y reflexión por conexión). Además, pocos justificaron la valoración de dicho grado. Esto muestra que, a pesar de que la mayoría de los equipos (trece de dieciocho) que crearon problemas pertinentes, lo hicieron con niveles de complejidad distintos (Tabla 1), tuvieron dificultades para identificar adecuadamente el grado de complejidad real de su problema. Estas limitaciones pueden deberse a que los EPM: (a) no conocen claramente lo que caracteriza a cada nivel, por ejemplo, consideran que un problema es de nivel de reflexión siempre que solicita una justificación (si incluye "justifica tu respuesta"), independientemente de los procesos implicados; (b) no tienen en cuenta cuáles son los conocimientos de los alumnos en los cursos en los que plantean los problemas; y como veremos (c) tienen dificultades para identificar la red de objetos que intervienen en los problemas de proporcionalidad, aun cuando son ellos mismos quienes los crean.

Para valorar si el curso para el que los EPM proponen los problemas es apropiado, se debe tener en cuenta los conocimientos que requieren los alumnos que deban resolverlo, en relación con los contenidos curriculares y las programaciones de los cursos de educación primaria. Como puede verse en la Tabla 2, éste es adecuado en 13 de los 22 problemas pertinentes.

Tabla 2

Relación entre el grado de complejidad y curso en problemas pertinentes

		Curso al que va dirigido			
		Correcto	**Incorrecto**	**No indica**	**Total**
Grado de complejidad	**Correcto**	4	1	0	5
	Incorrecto	4	2	0	6
	No indica	5	3	3	11
	Total	13	6	3	22

Además, observamos que cuando los EPM identifican el grado de complejidad de manera correcta, mayoritariamente escogen de forma adecuada el curso. Cuando asignan correctamente el curso y el grado de complejidad, son problemas propuestos para tercer ciclo que responden a los tres niveles de complejidad. En el caso de identificar de forma incorrecta el curso, los EPM proponen problemas que involucran división de números decimales para tercer o cuarto curso de primaria, por lo que no se consideran pertinentes según el currículum. Mencionemos además que, de los 44 problemas no pertinentes, 37 no indicaron el grado de complejidad y 9 tampoco el curso para el que estarían destinados.

En la Figura 6, se incluye un problema correspondiente al nivel de reproducción.

Figura 6

Problema de reproducción (E31)

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17,80€. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21€. ¿Cuánto le costará a Julio montarse en 5 atracciones más de las que ya se ha montado? ¿Y a Clara?

El equipo E31 justifica este grado de complejidad indicando que los alumnos “deberán utilizar procesos rutinarios y realización de operaciones sencillas. En este caso, una regla de 3 para cada una de las preguntas”. Esto es correcto, siempre que el problema se plantee para 6º que es cuando se suele enseñar la regla de tres como procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad. En otro caso (por ejemplo, en 5º curso para el que E31 plantea el enunciado) los estudiantes podrían usar otros procedimientos que pasarían por obtener el valor unitario en el caso de Julio, o incluso, en el caso de Clara obtener la mitad del precio (dado que el número de atracciones por las que se pregunta ahora es exactamente la mitad del comprado previamente).

La Figura 7 presenta uno de los problemas que propone E29 para 6º curso de primaria.

Figura 7

Problema del nivel de conexión (E29)

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80 €. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 €. ¿Quién crees que ha escogido mejor teniendo en cuenta la relación cantidad-precio? Justifica tu respuesta.

En este caso, el equipo asigna nivel de complejidad de reflexión indicando que “se pide al alumno que realice un razonamiento complejo y lo recoja por escrito de forma justificada”. Sin embargo, consideramos que su nivel correcto es de conexión. El alumno debe decidir la mejor opción en base a la relación cantidad (de entradas) y precio (pagado por estas). Supone una comparación relativa, que pasa por comparar las razones o bien por obtener el precio unitario. Sin embargo, estos son conceptos y procedimientos que el estudiante (de 6º de primaria) conoce. Finalmente, la Figura 8 incluye un problema propuesto por E26 para tercer ciclo de educación primaria (no indica el curso) y que, si bien no lo clasifica, consideramos que estaría próximo al nivel de reflexión.

Figura 8

Problema del nivel de reflexión (E26)

Julio y Clara han ido juntos a un parque de atracciones. Julio se ha subido en 8 atracciones y ha gastado 17.80€, mientras que Clara ha montado en 10 atracciones y se ha gastado 21€. Uno de los dos se acordó de que tenía un ticket de descuento. ¿Quién de los dos tiene el ticket? ¿Qué porcentaje de descuento ofrece el ticket?

El planteamiento pasa por aceptar que las entradas de Julio y de Clara tienen el mismo precio unitario, por lo que la diferencia se debe a que a uno le aplicaron un descuento inicial. Esto supone reconocer y distinguir la parte proporcional de la aditiva para decidir a quién aplicaron el descuento.

Identificación de objetos matemáticos

Con la identificación de los objetos matemáticos se espera que los EPM fijen la atención en aquellos elementos propios de la actividad matemática que pueden explicar las posibles dificultades que encuentren los escolares ante los problemas que ellos, como futuros docentes han propuesto.

A continuación, se analizan los objetos matemáticos identificados por los equipos de trabajo en los 22 problemas pertinentes de proporcionalidad que crearon en la consigna previa. La Tabla 3, muestra estos resultados a partir de 17 problemas pertinentes, ya que en cinco casos los EPM mencionaron algunos objetos matemáticos, pero no especificaron a cuál de los dos problemas pertenecían o a qué tipo de objeto. Por ejemplo, E14 indica como objetos "razón parte-todo, valores simbólicos (euros, €), mayor o menor, multiplicación, división", pero no aclara si son conceptos o procedimientos; tampoco indica cuáles son del primer o segundo problema.

Tabla 3

Frecuencia de identificación de objetos matemáticos en los problemas pertinentes (n=17)

Objetos	NR	IN	MI	PC	CO
Lenguajes	3	0	0	11	3
Conceptos	2	2	5	7	1
Proposiciones	9	8	0	0	0
Argumentos	10	5	2	0	0
Procedimientos	2	3	0	4	8

Nota: NR= no responde, IN= incorrectos, MI=mayoría incorrectos, PC= parcialmente correctos, CO= correctos.

De acuerdo con estos datos, se observa que, como en investigaciones previas (Burgos et al., 2018; Burgos & Godino, 2021a; Mallart et al., 2016), los EPM presentan dificultades para identificar objetos matemáticos que podrían intervenir o emerger en la solución de sus problemas sobre proporcionalidad. Esto es especialmente notorio en el caso de proposiciones y argumentos que en su mayoría o no se identifican o se hace de manera incorrecta.

En el caso de los conceptos hay una mayor variabilidad de éxito en su identificación. Los conceptos que identifican con más frecuencia de manera óptima son los de proporcionalidad (siete equipos en nueve de los problemas pertinentes) y magnitud (seis equipos en seis problemas pertinentes, aunque en tres de ellos se refieren únicamente al precio que se paga, omitiendo el número de atracciones como una de las magnitudes implicadas). Al igual que en los trabajos de Burgos et al. (2018), Burgos y Godino (2020b), Rivas et al. (2012), varios equipos de EPM (6 en total) consideran indistintamente la regla de tres como concepto asociado en el problema de proporcionalidad o como procedimiento para resolverlo.

Los lenguajes y procedimientos son los objetos identificados con mayor grado de pertinencia por los EPM. En el caso de los procedimientos señalan correctamente división y comparación de números decimales, reducción a la unidad o regla de tres. En el caso de los lenguajes, aunque reconocen correctamente el lenguaje natural o diagramático, obviaron el lenguaje simbólico, razón por la que en su mayoría la identificación de tipos de lenguajes fue parcialmente correcta.

Figura 9

Solución y objetos matemáticos indicados por E26 al problema de la Figura 8

Para saber quién de los dos tiene descuento en las atracciones, debemos ver qué les cuesta a ambos subirse en el mismo número de atracciones. Para ello, calcularemos el precio de las entradas de Julio si se subiera a 10 atracciones. Sabiendo que le ha costado 17.80€ subirse en 8 atracciones, para conocer el precio de las 10, planteamos la siguiente regla de tres:

$$\frac{17.8}{8} = \frac{?}{10}; \frac{17.8 \cdot 10}{8} = ?\,; ? = 22.25€$$

Comparamos los precios que pagan ambas personas (22.25 > 21) y vemos que es Clara la que paga menos, por lo que es ella la que tiene el descuento. Sabiendo que el precio sin descuento de 10 viajes (lo que pagaría Julio) es de 22.25€ y que el precio con descuento de 10 viajes (lo que paga Clara) es de 21€, podemos plantear el siguiente dibujo:

PRECIO TOTAL DE 10 VIAJES: 22.25€	
PRECIO CON DESCUENTO: 21€	DESCUENTO

Si 22.25€ es el 100% del precio, el descuento (22.25 - 21 = 1.25€) será una parte (?) del precio, por lo tanto, podemos plantear la siguiente regla de tres:

$$\frac{22.25}{100} = \frac{1.25}{?}; \frac{? \cdot 22.25}{100} = 1.25; \frac{?}{100} = \frac{1.25}{22.25}; \frac{1.25 \cdot 100}{22.25} = ?\,; ? = 5{,}61797753\ \%$$

Solución: El descuento lo tiene Clara, y es del 5,62%.

Ojetos matemáticos.

Conceptos: magnitudes proporcionales (dinero - atracciones), porcentaje, descuento.
Procedimientos: regla de tres/ reducción a la unidad.
Proposiciones: "cuando aplicamos un descuento, lo que sucede es que calculamos el porcentaje del descuento sobre el precio total, y luego lo descontamos al precio total".
Argumentos: ninguno.
Lenguajes: natural, simbólico, diagramático.

En la Figura 9 incluimos la solución propuesta y los objetos identificados por E26 al problema descrito en la Figura 8. Para resolver el problema E26 obtiene el precio que debería pagar Julio por subirse en 10 atracciones suponiendo que el precio de cada atracción es la misma, lo que le permite decidir que es Clara a quien le han aplicado el descuento. A continuación, determina a qué porcentaje corresponde.

El equipo E26 emplea la regla de tres como procedimiento (aunque indica también la reducción a la unidad), si bien no la fundamenta en la relación de proporcionalidad directa. Lo que indica como proposición es más una secuencia de procedimientos y observamos como señala explícitamente la ausencia de argumentos en su solución.

Reconocimiento de dificultades

Después de analizar los objetos matemáticos involucrados en las prácticas necesarias para resolver los problemas sobre proporcionalidad que crearon, los EPM debían identificar las potenciales dificultades para sus alumnos de primaria. En este caso, la clasificación se realizó en base a la tipología de objetos primarios establecida en el marco teórico (Sección 3.5). De los 33 equipos, 3 no indicaron dificultades y otros 5 las señalaron de forma genérica (no distinguían según enunciados). Así del total de enunciados propuestos por los EPM, se encuentran dificultades asociadas de forma específica a 50 problemas (17 pertinentes y 33 no pertinentes). Los tipos de dificultades más frecuentemente identificadas fueron las de tipo procedimental (en 12 de los 17 problemas pertinentes y 20 de los 33 no pertinentes) y situacional (en 9 de los 17 problemas pertinentes y en 17 de los 33 no pertinentes). Todas las dificultades señaladas por los EPM en los problemas pertinentes fueron correctas. También lo fueron en la mayoría de los problemas no pertinentes, donde los EPM sólo señalaron de manera incorrecta algunas dificultades (3 procedimentales, 1 situacional y 1 de tipo argumentativo).

En la Tabla 4 se resumen las frecuencias de enunciados en los que se identifican dificultades de cada tipo.

Las dificultades de tipo situacional que señalan de manera mayoritaria los EPM tienen que ver con reconocer o interpretar adecuadamente la relación de proporcionalidad que se establece entre las magnitudes del problema (“Dificultad para relacionar los datos”, E3; “No razonar la relación proporcional precio-las veces que se monta”, E6). Cuando el requerimiento del problema que plantean lleva a determinar el precio que deben pagar Julio y Clara por montarse en una cantidad dada de atracciones, señalan dificultad para distinguir dos relaciones multiplicativas distintas en el mismo enunciado (“que al alumno le produzca confusión al ver que no le costará lo mismo a Clara que a Julio al montarse en el mismo número de atracciones", E28). Similarmente, cuando deben obtener el precio unitario para decidir qué atracción fue más barata señalan pertinentemente el interpretar una comparación absoluta y no relativa ("la principal dificultad que se puede presentar es que relacionen directamente el hecho de que a Clara le ha sobrado menos dinero signifique que se ha montado en atracciones más caras, sin tener en cuenta que Julio se ha montado en menos atracciones que ella", E23).

Tabla 4

Número de problemas en los que se identifican dificultades por categoría (n=50)

Dificultades	**Número de problemas pertinentes (*n*=17) con dificultades identificadas por los EPM**	**Número de problemas no pertinentes (*n*=33) con dificultades identificadas por los EPM**
Argumentales	1	1
Proposicionales	1	1
Conceptuales	4	9
Situacionales	10	17
Procedimentales	12	20
Total	27	48

Las dificultades de tipo procedimental se relacionan principalmente con la aplicación de la regla de tres ("que el alumno no conozca bien los procedimientos para la realización de una regla de tres de una forma adecuada y correcta", E28), la determinación de los precios unitarios ("dividir precio entre número de veces en vez de al revés", E22) y con cálculos aritméticos en relación a la división de números decimales ("en este caso deben trabajar la división con números decimales y con dos cifras, lo que le puede ocasionar dificultad y llevar a cometer errores si lo están aprendiendo o todavía no lo dominan con soltura", E1). El mayor énfasis en las dificultades vinculadas a la regla de tres está relacionado con que éste continúa siendo el procedimiento preferido por los futuros docentes para resolver problemas de proporcionalidad. Opiniones similares a las del equipo E20, para quienes "los alumnos pueden tener dificultades a la hora de realizar las operaciones, ya que en vez de realizar la regla de tres para calcular las operaciones pueden hacer multiplicaciones" muestran que, para los EPM emplear otras estrategias distintas puede ser un motivo o fuente de dificultad.

Las dificultades de tipo conceptual están relacionadas fundamentalmente con el concepto de proporcionalidad ("no comprender el concepto de proporcionalidad", "dificultad con el concepto constante de proporcionalidad", E3).

Finalmente, para los EPM que han participado en la experiencia ha sido complejo identificar dificultades de tipo proposicional y argumental en sus propios problemas. Esto puede estar motivado por un escaso conocimiento de los EPM sobre las propiedades de la relación de proporcionalidad y sus limitaciones para argumentar en situaciones de proporcionalidad (Balderas et al., 2014). Las dificultades de tipo proposicional son esencialmente aquellas que tienen que ver con las propiedades de las operaciones con números decimales, mientras que las de tipo argumental se asocian a limitaciones por parte del alumno para justificar los procedimientos (justificar la obtención de la constante de proporcionalidad o precio por unidad). Esto se convierte en una situación preocupante, dado que la argumentación es uno de los procesos y competencias que se deben desarrollar en diferentes currículos de matemáticas (Balderas et al., 2014; Ministerio de Educación Pública, 2012).

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

Además de resolver problemas de matemáticas, un profesor debe estar capacitado para seleccionar, modificar y plantear problemas con fines educativos específicos (Tichá & Hošpesová, 2013). La creación de problemas, no sólo en el diseño y planificación de las clases, sino siempre que sea necesaria durante su implementación, es uno de los rasgos de la competencia de análisis e intervención didáctica del profesor (Godino et al., 2017). Además, la creación de problemas con propósitos didácticos aparece como medio para potenciar y articular otras competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor; requiere reflexionar sobre los elementos que caracterizan el problema (información, requerimiento, contexto y entorno matemático), de qué forma o formas se puede resolver, analizar las prácticas y objetos matemáticos implicados e identificar las posibles dificultades que pueden encontrar los alumnos en cada caso.

En este artículo hemos informado sobre el diseño, la implementación y análisis de una intervención con futuros profesores de primaria centrada en la creación de problemas de proporcionalidad a partir de una situación dada. Los resultados descritos en el trabajo contribuyen, por un lado, a la comprensión de las dificultades que presentan los futuros maestros en la creación de problemas de proporcionalidad y, por otro, al diagnóstico de sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas a través de su propio análisis.

Desde el punto de vista del conocimiento didáctico-matemático en la faceta instruccional, los EPM tienen dificultades para crear problemas de proporcionalidad que respondan a una situación dada, lo que se pone de relieve cuando más del 66% de los problemas propuestos fueron no pertinentes. Además, plantean enunciados ambiguos, carentes de sentido y que o bien no se podían resolver o bien la solución estaba implícita en el propio enunciado, lo que supuso que más del 42% de sus problemas fueron no significativos. Es posible que, al pedirles crear problemas a partir desde una situación determinada, se encuentren en una posición extraña, inesperada y más restringida (Tichá & Hošpesová, 2013).

En la faceta epistémica, se observan las limitaciones de los EPM para identificar los objetos matemáticos involucrados en los problemas creados por ellos mismos (Burgos et al., 2018; Burgos & Godino, 2022), así como para distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales al crear problemas que no responden a situación de proporcionalidad pero que consideran propios de dicho entorno (Fernández et al., 2012). Las limitaciones para identificar los objetos matemáticos podría ser consecuencia de la falta de experiencia con esta actividad (Rivas et al., 2012), pues la formación previa en el grado y con el taller impartido parece no ser suficiente para comprender la naturaleza y funcionalidad de los objetos matemáticos (Burgos & Godino, 2020b, 2021a).

En la faceta cognitiva, los EPM identifican escasamente las dificultades que puede generar en los escolares la resolución de sus problemas propuestos y cuando lo hacen no siempre es de forma correcta, centrándose mayoritariamente en dificultades de tipo procedimental, lo que coincide con los resultados obtenidos por Burgos y Godino (2020b). Como muestran las investigaciones de Lamon (2007) o Riley (2010) entre otros, los futuros maestros focalizan la atención en el aspecto operacional y justifican sus estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad en base a los procedimientos, lo que les lleva tanto a no identificar objetos como proposiciones o argumentos, como a ignorarlos como fuentes de dificultades para los alumnos. Prever las dificultades que pueden tener los alumnos en la resolución de tareas permite seleccionar estrategias más adecuadas para adaptarlas a los propósitos de aprendizaje (Burgos & Godino, 2020b), para lo que es necesario que los futuros maestros asuman que el conocimiento de los procedimientos por sí solo no es suficiente, profundizando en los conceptos, propiedades y sus relaciones en el currículo de la escuela primaria (Tichá & Hošpesová, 2013).

La identificación y justificación del nivel de complejidad asociado es algo que también resultó complejo para los participantes, a pesar de ser un análisis al que los EPM deben estar familiarizados incluso de cursos previos. Sin embargo, la formación recibida al respecto se basa en problemas presentes en materiales curriculares (libros de texto, entre otros) o pruebas de evaluación de primaria y no sobre los problemas que ellos mismos elaboran. Parece pues necesario reforzar en la formación de profesores el estudio del nivel de complejidad de las tareas en base al análisis de objetos y procesos matemáticos implicados en su resolución. Asimismo, a pesar de que los EPM conocen las directrices curriculares y los programas de estudio de los alumnos de educación primaria, tuvieron grandes limitaciones para determinar o adaptar sus problemas a un nivel educativo específico (por ejemplo, considerando el uso de la regla de tres en cursos anteriores a los estipulados en el currículo de matemáticas).

Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente, un desafío a sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (Malaspina et al., 2019). Deficiencias en el conocimiento del contenido matemático limitan al profesor para la invención de sus propios problemas, lo que lo lleva a utilizar problemas propuestos en libros de texto que, en ciertos casos, tienen errores o no responden al contexto o necesidades del estudiante (Salazar, 2017). Un conocimiento sesgado del razonamiento proporcional puede causar una deficiencia no sólo en la creación de problemas, sino también en el reconocimiento de las dificultades implicadas en la resolución de tareas de proporcionalidad (Burgos & Godino, 2020b). Tomando como punto de partida la necesidad de reforzar el razonamiento proporcional en la formación de profesores, las limitaciones encontradas por los EPM que han participado en la intervención sugieren la necesidad de mejorar el instrumento de investigación, así como de desarrollar nuevas acciones formativas específicas:

– Aunque algunos equipos los resolvieron, la solución de cada uno de los problemas creados no se solicitó en la consigna de la intervención formativa. Es posible que los resultados hubieran sido diferentes de haberlo requerido explícitamente, dado que habría podido mejorar la identificación de los objetos matemáticos y las dificultades que implicaba resolverlos.

- Por otro lado, la creación de problemas se puede plantear también para mejorar una propuesta previa o los resultados de esta. Así se puede pedir a los participantes que después de resolver el primer problema creado, creen uno nuevo que ayude a superar las dificultades diagnosticadas en el anterior, que contribuya a su comprensión o bien que tenga un mayor grado de complejidad o de demanda cognitiva para el estudiante.
- El análisis de la complejidad podría complementarse con el estudio de los procesos matemáticos implicados y del grado de formalización y abstracción matemática requerida.

Nuestro instrumento se puede adaptar y ampliar, modificando la situación y el requerimiento didáctico-matemático o el entorno, para atender a nuevos conocimientos. Esta flexibilidad permite también, diseñar e implementar nuevas intervenciones con profesores en formación de educación secundaria. Nos interesa también desarrollar acciones formativas sobre creación de problemas con profesores en ejercicio, tanto de educación primaria como de secundaria, con los que esperaríamos obtener mejores resultados.

RECONOCIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI /10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España), la AUIP y a la Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades de la Junta de Andalucía (los dos últimos, patrocinadores del Programa de Becas de Movilidad Académica de la AUIP).

DECLARACIONES DE LOS AUTORES

M.B.: conceptualización, investigación, metodología, supervisión, validación, visualización, redacción – revisión y edición. J.J.C.: conceptualización, tratamiento de los datos, validación, visualización, redacción – borrador original. Ambos autores participaron activamente en el análisis y discusión de los resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor de correspondencia, M.B., previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Akay, H. & Boz, N. (2010). The Effect of Problem Posing Oriented Analyses-II Course on the Attitudes toward Mathematics and Mathematics Self-Efficacy of Elementary Prospective Mathematics Teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 35*(1), 59-75. https://doi.org/10.14221/ajte.2010v35n1.6

Ayllón, M. F., Gallego, J. L., & Gómez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos, 38*(152), 51–67. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57588

Balderas, R. G., Block, D. & Guerra, M. T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué": Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2), 7–32.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense.

Buforn, A. & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema, 28*(48), 21–41. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Buforn, A., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *RMIE, 23*(76), 229–251.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22.

Burgos, M. & Godino, J. D. (2020a). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM - Avances de Investigación en*

Educación Matemática, *18*, 1–20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M. & Godino, J. D. (2020b). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9

Burgos, M. & Godino, J. D. (2021a). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. *Profesorado, 25*(2), 281–306. https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i2.8725

Burgos, M. & Godino, J. D. (2021b). Prospective primary school teachers' competence for the cognitive analysis of students' solutions to proportionality tasks. *Journal für Mathematik Didaktik.* https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Burgos, M. & Godino, J. D. (2022). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education 20,* 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. *PNA, 6*(4), 135–146.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.

Contreras, J. (2007). Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problems: Using a Problem-Posing Framework with Prospective Mathematics Teachers. *The Mathematics Educator, 17*(2), 15–23.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404–407.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

Espinoza, J., Lupiáñez, J., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 14*(2), 1–12. https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664

Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (Eds.). (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Fernández, M. E. & Carrillo, J. (2020). Un acercamiento a la forma en que los estudiantes de primaria formulan problemas. *Revista de Educação Matemática, 17,* 1–19. https://doi.org/doi.org/10.37001/remat25269062v17id257

Fernández, C. & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67–80. https://doi.org/10.1174/021037011794390111

Fernández, C. & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129–142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012) Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44*(6), 747–759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández-Millán, E., & Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Fiol, M. L. & Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Síntesis.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2–3), 167–200.

Kwek, M. L. (2015). Using problem posing as a formative assessment tool. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: from research to effective practice* (pp. 273–292). Springer.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Information Age.

Lo, J-J. (2004). Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 265–272.

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 129–140). CIBEM.

Malaspina, U., Mallart, A., & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861–2866). CERME.

Malaspina, U., Torres, C., & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. In P. Liljedahl & L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133–151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Mallart, A., Font, V., & Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of*

Mathematics, Science and Technology Education, 14(4), 1465–1481. https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Mallart, A., Font, V., & Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema de en la formación inicial de maestros. *Perfiles educativos, 38*(152), 14–30.

Mallart-Solaz, A. (2019). Interés de los futuros maestros en saber crear problemas de matemáticas para enseñar a resolverlos. *Psicología Educativa*, *25*(1), 31–41. https://doi.org/10.5093/psed2018a17

Milinković, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. En J. Cai, N. Ellerton, & F. M. Singer (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, (pp. 47–70). Springer.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de Matemáticas.* San José, Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime, 17*(1), 59–81. https://doi.org/10.12802/relime.13.1713

OCDE (2003). *The PISA 2003. Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OCDE.

Pino-Fan, L. R., Báez-Huaiquián, D. I., Molina-Cabero, J. G., & Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *UNICIENCIA, 34*(2), 114–136. https://doi.org/10.15359/ru.34-2.7

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1055–1061). The Ohio State University.

Rivas, M. A., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42b), 559–588. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008

Ruiz, E. F. & Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J.

Hoines & A. B. Flugestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 201–208). PME.

Salazar, L. (2017). Invención de problemas contextualizados de probabilidad: una competencia a desarrollar en profesores de matemática. *Revista comunicación*, *26*(2), 38–48.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational studies in mathematics, 83*(1), 157–162. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3

Silvestre, A. I. & Ponte, J. P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 137–158.

Singer, F. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational studies in mathematics*, *83*(1), 9–26. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational studies in mathematics, 83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 48*(1), 1–27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). MASTEC.

Tichá, M. & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133–143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181–204. https://doi.org/10.1007/BF02400937

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R., & Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*(2), 179–202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0