ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.XXXX

O conhecimento sobre raciocínio matemático de futuros professores e professores dos primeiros anos no contexto de uma tarefa de geometria

Lina Brunheira[a] ORCID iD (0000-0002-5027-1867)
Lurdes Serrazina[a] ORCID iD (0000-0003-3781-8108)
Margarida Rodrigues[a] ORCID iD (0000-0003-4658-6281)

[a] Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação de Lisboa, CIED, e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Recebido para publicação 26 abr. 2022. Aceito após revisão 13 dez. 2022
Editora designada: Maria Célia Leme da Silva

RESUMO

Contexto: O conhecimento dos professores sobre o raciocínio matemático e a forma como promovê-lo influencia a maneira como planificam e conduzem as aulas. Em geometria, implica desenvolver a visualização e a estruturação espacial. **Objetivos:** Este artigo aborda o conhecimento dos professores e futuros professores do ensino básico sobre os processos de raciocínio, nomeadamente a forma como os relacionam, na resolução de uma tarefa didática envolvendo geometria. **Design:** O estudo seguiu uma abordagem qualitativa-interpretativa, adotando uma modalidade de investigação baseada em design. **Ambiente e Participantes:** As experiências de formação foram desenvolvidas com 31 futuros professores e 19 professores em exercício (1º ao 6º ano). Os participantes não foram selecionados pois eram as únicas turmas em formação na instituição. **Coleta e análise de dados:** Os dados foram coletados através de gravações áudio e vídeo das aulas, observação participante e registos escritos dos futuros professores. Utilizamos a análise de conteúdo dos dados recorrendo ao quadro de análise que elaborámos anteriormente sobre o conhecimento dos processos de raciocínio. **Resultados:** Os futuros professores identificaram o processo de generalizar, relacionando-o com processos de comparar e exemplificar. Em relação ao justificar, os participantes associaram-no à compreensão do porquê de uma relação funcionar como critério de seleção daquele processo. Já para os professores, a distinção entre justificar e generalizar pareceu ser mais difícil. **Conclusões:** O trabalho colaborativo em tarefas didáticas suportadas por tarefas matemáticas relevantes e episódios reais de sala de aula constituem cenários promissores para desenvolver o conhecimento de professores e futuros professores sobre o raciocínio matemático.

Corresponding author: Lina Maria Amador Brunheira Assunção. Email: lbrunheira@eselx.ipl.pt

Palavras-chave: Processos de raciocínio matemático; Futuros professores do ensino básico (1º ao 6º ano); Professores do ensino básico (1º ao 6º ano); Geometria; Estruturação espacial.

Preservice and in-service primary teachers' knowledge of mathematical reasoning processes in the context of a geometry task

ABSTRACT

Background: Teachers' knowledge of mathematical reasoning and how to foster it in pupils influence the way they plan and conduct their lessons. In geometry, it implies developing visualisation and spatial structuring. **Objectives**: This article addresses the knowledge of the preservice and in-service primary teachers about reasoning processes, namely the way they relate several reasoning processes, when solving a didactical task involving geometry. **Design**: The study reported here followed a qualitative-interpretative approach, adopting a design-based research modality. **Setting and Participants**: The teacher education experiments were developed with 31 preservice primary teachers and 19 in-service teachers of grades 1 to 6. The participants were not selected since they were the unique classes of pre and in-service primary teachers in the institution. **Data collection and analysis**: Data were collected by audio and video records of lessons, participant observation and the collection of written records of the preservice teachers. We used content analysis of the data using the framework we elaborated before concerned with knowledge of reasoning processes. **Results**: The preservice teachers identified the process of generalising, relating it with comparing and exemplifying processes. Regarding the process of justifying, participants used the association to the understanding of why a relationship works as a selection criterion for that process. On the contrary, the distinction between justifying and generalising appeared to be more difficult for in-service teachers. **Conclusions**: Collaborative work on didactical tasks that are supported by relevant mathematical tasks and real classroom episodes are promising scenarios to develop teachers' knowledge about mathematical reasoning.

Keywords: Mathematical reasoning processes; Preservice primary teachers; In-service primary teachers; Geometry; Spatial structuring.

INTRODUÇÃO

A formação de professores deve dar uma atenção especial ao raciocínio matemático, considerando tanto a capacidade de raciocinar como o conhecimento acerca dos processos de raciocínio (Stylianides & Stylianides, 2006). As orientações curriculares nacionais e internacionais (Ministério da Educação, 2021; MES - Ministry of Education Singapore, 2012; National Council of Teachers of Mathematics, 2000) enfatizam a importância de desenvolver o raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade. O conhecimento dos professores sobre o raciocínio matemático e como o promover nos seus alunos influencia o modo como planificam e conduzem as aulas (Lannin et al., 2011; Loong et al., 2017). Em particular, desenvolver os processos de raciocínio matemático no domínio da geometria, nas aulas dos primeiros anos, implica especificamente desenvolver a visualização e o raciocínio espacial (Moss et al., 2015) já que os processos centrais de generalizar e justificar (Rodrigues et al., 2021), neste caso, baseiam-se nas propriedades geométricas e na estrutura dos objetos.

Este artigo faz parte do projeto *Raciocínio Matemático e Formação de Professores* (REASON) que visa estudar o conhecimento matemático e didático que os professores necessitam para conduzir uma prática que promova nos alunos o raciocínio matemático e estudar os meios de promover o seu desenvolvimento na formação inicial e contínua de professores do ensino básico e secundário. Neste artigo, pretendemos discutir o conhecimento de processos de raciocínio de um grupo de futuros professores e de um grupo de professoras dos 1.º e 2.º ciclos, durante a exploração de uma tarefa envolvendo a geometria, nomeadamente o modo como dão significado e relacionam os diversos processos de raciocínio.

ENQUADRAMENTO CONCEITUAL

Raciocínio em geometria

Raciocinar geometricamente sobre um ente espacial (objeto, diagrama ou conceito) implica constituir um modelo mental adequado que captura a sua estrutura espacial relevante e as suas propriedades geométricas. Battista et al. (2018) afirmam que “estruturação espacial e geométrica são tipos de raciocínio espacial e geométrico, respetivamente, que desempenham papéis primordiais na construção de modelos mentais adequados para o raciocínio geométrico” (p. 202). Para que o raciocínio espacial apoie o raciocínio geométrico de modo adequado, estes modelos mentais devem incorporar o conhecimento operacional de propriedades e conceitos geométricos relevantes, usando modelos mentais que integram as propriedades geométricas na sua estrutura e operação (Battista, 2007). Fujita et al. (2020) consideram como capacidades de raciocínio a visualização espacial e o raciocínio espacial analítico baseado em propriedades, sendo coordenados por conhecimento específico do domínio. Sem esta coordenação, o raciocínio dos estudantes em resolução de problemas pode ser influenciado pela aparência visual dos objetos.

Jeannotte e Kieran (2017) consideram o aspeto processual do raciocínio matemático com uma natureza dinâmica e temporal, contemplando diferentes processos. Dentre estes, estabelecem-se duas categorias, uma relacionada com a procura de semelhanças e diferenças e outra com a validação. Na primeira categoria incluem-se os processos generalizar, conjeturar, identificar padrões, comparar e classificar; enquanto na segunda categoria estão os processos de justificar, provar e provar formalmente, procedendo ou não à mudança do valor epistémico de uma afirmação matemática de verdadeira para falsa ou mais provável.

Lannin et al. (2011) distinguem dois aspetos no processo de generalizar: (i) identificar elementos comuns em casos diferentes; (ii) estender o raciocínio para além do domínio no qual os elementos comuns foram inicialmente identificados, isto é, pensar sobre uma relação, ideia, representação, regra, padrão, ou outra propriedade matemática considerando-a num domínio mais amplo. Por exemplo, quando um estudante identifica quadrados como figuras que têm quatro lados iguais, ele está a fazer uma generalização que é falsa, mas é uma generalização. Para estes autores, o processo de justificar consiste na construção de uma sequência lógica de afirmações, cada uma apoiando-se em conhecimentos já estabelecidos de modo a chegar a uma conclusão. Portanto, construir uma justificação válida para uma generalização não é fácil pois tem de verificar-se que a generalização é verdadeira para todos os casos do domínio, recorrendo a relações implícitas válidas. Uma justificação válida deve explicar porquê oferecendo uma visão das relações subjacentes existentes em todos os casos.

Assim, consideramos que o processo de generalizar é fundamental em matemática quando pretendemos "fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos" e que a "justificação é central para que seja possível validar matematicamente" aquelas afirmações (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p. 783). Estes dois processos interagem entre si, pois em muitas situações a linguagem utilizada na justificação tem de ser geral de modo que seja clara a sua aplicabilidade a todo o domínio; por outro lado, como algumas vezes acontece em geometria, algumas generalizações são estabelecidas porque, pelo menos implicitamente, existe uma estruturação espacial dos objetos fundamental para que as justificações das relações sejam validadas (Brunheira, 2019).

Para Jeannotte e Kieran (2017), exemplificar é um processo auxiliar do generalizar e justificar, que permite inferir dados sobre um problema ao gerar elementos que apoiam aqueles processos. No processo de generalizar é essencial a procura de semelhanças e diferenças através da produção de exemplos, sendo neste caso necessário mobilizar o processo de comparar. Por sua vez, no processo de justificar, os exemplos podem ser relevantes, por exemplo quando se usam contraexemplos.

Por fim também olhamos para o processo de classificar pela sua importância no contexto do ensino dos primeiros anos, especialmente em geometria. Para Jeannotte e Kieran (2017), classificar consiste em identificar pontos comuns e distintos em objetos diferentes procurando semelhanças e diferenças, levando a juntá-los ou a separá-los em classes de objetos com base em propriedades ou definições matemáticas. Este processo envolve comparar e, ao afirmar que todos os elementos da classe obedecem a certas características, estabelece uma generalização (Brunheira, 2019). Para Mason (2001), "ao classificar não se trata apenas de fazer distinções e descrever propriedades, mas de justificar conjeturas que todos os objetos possíveis com essas propriedades foram descritos ou capturados de outra forma" (p.7). Os autores citados anteriormente (exceto Brunheira (2019)) estão principalmente relacionados com o pensamento algébrico, Mariotti e Fischbein (1997) referem da seguinte forma o que significa classificar em geometria:

> Uma tarefa de classificação consiste em estabelecer uma equivalência entre objetos semelhantes mas figurativamente diferentes, no sentido de uma generalização. Isso significa superar o caso particular e considerá-lo como um exemplo de uma classe geral. Por outras palavras, o processo de classificar consiste em identificar propriedades comuns pertinentes, que determinam uma categoria. (p. 244)

Assim, para além de identificar os diferentes processos de raciocínio, é fundamental uma compreensão profunda do significado de cada um deles de modo a conseguir estabelecer relações entre eles, alcançando assim um elevado nível de conhecimentos (Rodrigues et al., 2021).

Raciocínio na formação de professores

Vários estudos (Lannin et al., 2011; Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2009) referem que os futuros professores do ensino elementar devem ter oportunidades de desenvolver o seu raciocínio matemático se se pretende que o venham a trabalhar com os seus alunos.

No campo da geometria, Battista (2007) afirma que o raciocínio é fortemente baseado na estruturação espacial dos objetos ou situações, isto é, nos modelos mentais que são ativados para interpretar e raciocinar acerca desses objetos ou situações. Estes modelos formam a base do raciocínio espacial, uma forma de raciocínio que é particularmente importante em geometria, mas também, como referem Clements e Sarama (2011), transversal a várias áreas da matemática e outras ciências. Estes autores referem a sua importância na abordagem à resolução de problemas e lamentam a sua desvalorização que deixa os professores mal preparados para ensinarem geometria.

No contexto da formação inicial de professores em geometria, Brunheira (2019) afirma que processos como classificar e justificar generalizações sobre figuras geométricas são influenciados pela qualidade do raciocínio espacial, mas são também promotoras do seu desenvolvimento. Para Lehrer et al. (2013), conceitos geométricos como figuras planas e relações entre elas, por exemplo congruência, constituem oportunidades para construir relações entre os seus elementos.

Além do desenvolvimento do seu próprio raciocínio, Francisco e Maher (2011) referem a necessidade de criar oportunidades para que os professores aprendam sobre como desenvolver o raciocínio matemático nos estudantes. No mesmo sentido, Stylianides e Ball (2008) defendem a necessidade de desenvolver nos professores a capacidade de planear e implementar tarefas promotoras do desenvolvimento do raciocínio nos seus estudantes. A exploração de tarefas focadas em (i) episódios de sala de aula, e (ii) na implementação na prática de tarefas promotoras do raciocínio matemático dos estudantes, quer na formação inicial quer na formação em serviço, podem contribuir para aprofundar o conhecimento dos professores sobre processos de raciocínio e sobre as características das tarefas que os podem promover (Oliveira & Henriques, 2021, Santos et al., 2022).

Melhuish et al. (2019) afirmam que se queremos professores que promovam nos seus estudantes a capacidade de generalizar, devemos proporcionar-lhes oportunidades para analisar evidências desses processos durante a formação, a fim de desenvolverem as suas capacidades para compreenderem quando os estudantes estão envolvidos nesses processos. Quando os professores selecionam tarefas promotoras de processos de raciocínio, implementam-nas na sala de aula e posteriormente refletem sobre as produções dos estudantes com outros professores aumentam o seu conhecimento didático sobre como desenvolver o raciocínio matemático dos seus estudantes (Herbert & Bragg, 2021). No mesmo sentido, Santos et al. (2022) afirmam que se os professores têm oportunidade para refletir sobre episódios de sala de aula, analisando-os, tendo por base ideias teóricas discutidas em contextos de formação, aprofundam os seus processos de raciocínio. Este aprofundamento consiste em identificar e caracterizar "os processos de generalizar e justificar através da análise, partilha e discussão de ideias e também da análise das resoluções das tarefas realizadas pelos estudantes, intencionalmente desenhadas para promover o raciocínio matemático" (p. 13). Afirmam ainda que, se os professores planificam colaborativamente com outros professores, implementam na prática esse plano, selecionam episódios da prática e refletem sobre as produções dos estudantes com outros professores, é provável que se desenvolvam profissionalmente.

METODOLOGIA

O estudo aqui reportado seguiu uma abordagem qualitativa-interpretativa (Erickson, 1986) uma vez que visou compreender o modo como futuros professores e professores atribuem significado e relacionam diversos processos de raciocínio. Adotou uma modalidade de *investigação baseada em design* (IBD) (Gravemeijer & Cobb, 2013) com o fim de desenvolver uma teoria local de formação focada no conhecimento matemático e didático que os professores necessitam para promover o raciocínio matemático dos alunos. Foram desenvolvidas duas experiências de formação em: (1) 2019/20 com 31 futuros professores, que frequentavam o Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico; e (2) 2020/21 com 19 professoras dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. IBD é conduzida através de três fases: a preparação da experiência de formação, a sua implementação e a análise retrospetiva. A experiência com futuros professores, implementada em 2019/20 (ciclo 1 da IBD) numa instituição pública foi conduzida em outra instituição pública em 2020/21 (ciclo 2 da IBD), beneficiando das melhorias decorrentes da análise retrospetiva. O mesmo aconteceu com a experiência com as professoras em exercício. Assim, nós reportamos aqui ambas as experiências da IBD, ciclo 1 (futuros professores) e ciclo 2 (professoras em exercício) desenvolvidas em Portugal, na mesma instituição, onde os participantes constituíram as únicas turmas de formação inicial e contínua para os níveis de ensino referidos.

A experiência com os futuros professores, conduzida pela última autora, decorreu em seis aulas, uma por semana, com a duração de duas horas e 30 minutos cada uma. Todas as tarefas foram exploradas inicialmente autonomamente pelos futuros professores, organizados em oito grupos, sendo discutidas no final pelo plenário da turma. A experiência com as professoras em exercício foi conduzida por todas as autoras deste artigo, em oito sessões por meio da plataforma Zoom, ao longo de quatro meses, com a duração de duas horas e 30 minutos cada uma. As tarefas foram exploradas inicialmente, de forma autónoma, pelas professoras, organizadas em quatro grupos, sendo igualmente discutidas, no final da sessão, por todo o grupo. As professoras também implementaram duas tarefas nas suas salas de aula e analisaram os processos de raciocínio dos seus alunos e as suas próprias práticas. Ambas as experiências de formação estavam focadas no raciocínio matemático, no que se refere ao conhecimento matemático especializado para ensinar.

Os dados foram recolhidos através de recolha documental (todas as resoluções das tarefas pelos futuros professores) e de observação participante das aulas ou das sessões, realizada pela equipa do projeto, com recurso a gravação áudio e vídeo (i) do trabalho autónomo de dois grupos de futuros professores e de todos os grupos das professoras em exercício, e (ii) das discussões em grande grupo realizadas em ambas as experiências. Os dados aqui reportados são de um grupo de futuros professores e de um outro grupo de professoras em exercício. Estes grupos foram selecionados devido à interação no seio de cada um deles que nos deu maior informação acerca do modo como compreenderam os processos de raciocínio. De acordo com o princípio ético de confidencialidade, todos os participantes assinaram um consentimento livre e informado, em relação aos métodos de recolha de dados, e foram-lhes atribuídos nomes fictícios[1].

Este artigo refere-se a uma tarefa didática acerca do raciocínio em geometria (Apêndice 1) que se baseia na análise da exploração de uma tarefa em geometria realizada por alunos do 3.º ano (Apêndice 2). Foi proposta na quinta aula da experiência com os futuros professores e na terceira sessão da experiência com as professoras em exercício. O processo de classificar foi apresentado apenas depois da exploração da tarefa.

[1] O projeto de investigação não possui comité de ética. No entanto, esta investigação obedece aos princípios e orientações do Código de Conduta Ética na Investigação do CIED (Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais) e da Carta de Ética da Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Assim, este trabalho expressamente assume e isenta a Acta Scientiae de quaisquer consequências decorrentes da ausência de avaliação ética, inclusive assistência integral e eventual indeminização por qualquer dano decorrente de qualquer um dos participantes da pesquisa, conforme Resolução nº 510, de 7 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Conselho de Saúde do Brasil.

Realizámos análise de conteúdo (Bardin, 2010) dos dados utilizando o quadro de análise elaborado antes (Rodrigues et al., 2021) relativo ao conhecimento dos processos de raciocínio (Tabela 1).

Tabela 1

Quadro de análise do conhecimento dos processos de raciocínio. (Rodrigues at al., 2021)

Categoria	Subcategorias
Conhecimento do processo de raciocínio	5. Conhecimento sobre o processo respeita a definição apresentada, e contempla a sua relação com outros processos de raciocínio
	4. Conhecimento sobre o processo respeita a definição apresentada, e é explicitado pela enunciação das propriedades do processo
	3. Conhecimento sobre o processo respeita a definição apresentada, e é explicitado através de exemplo(s) ilustrativo(s)
	2. Reconhecimento de um processo de raciocínio embora considerando apenas processos 'corretos'
	1. Conhecimento sobre o processo remete para o termo usado na linguagem corrente
	0. O processo é confundido com outros processos

As categorias foram identificadas indutivamente assim que surgiam no discurso e no trabalho dos futuros professores e professoras em exercício, reportando-se ao conhecimento dos processos abordados nas experiências de formação: generalizar, justificar, exemplificar, comparar, e classificar. Cada uma das categorias foi dividida em subcategorias, correspondendo a seis níveis de conhecimento matemático especializado do conteúdo, apresentados de modo hierárquico.

RESULTADOS

Selecionámos quatro episódios (dois da experiência de formação com futuros professores e dois da experiência com professores) que nos parecem ser representativos do trabalho desenvolvido.

Episódio 1

Neste episódio, analisamos os processos de raciocínio que o grupo de futuros professores identificou terem sido mobilizados pelos alunos de 3º ano durante a resolução da tarefa em que tinham de descobrir qual era o intruso no conjunto dos cinco sólidos (Apêndice 1). Esta discussão deveria apoiar a introdução do processo de classificação que, no nosso entender, é o principal processo em causa. De facto, para encontrar o intruso, os alunos deverão identificar as propriedades comuns e relevantes que fazem com que as pirâmides constituam uma classe (por exemplo, todas têm faces triangulares que convergem num vértice) da qual não faz parte o prisma. Para isso, deverão ignorar ainda as suas particularidades (por exemplo, bases distintas) e considerá-las como representantes de uma classe mais geral (Mariotti & Fischbein, 1997).

Nuno: *"Identifique eventuais processos de raciocínio envolvidos". Eu, eu aqui penso que . . . o mais óbvio de todos é generalização. Eles identificam uma propriedade que serve para todas as pirâmides.*

Lara: *Sim.*

Daniela: *Sim, sim.*

Nuno: *Portanto, uma delas é o generalizar. O comparar…*

Daniela: *O comparar também. Achas que não?*

Nuno: *Entre várias...*

Daniela: *Entre figuras, sim.*

Lara: *Para generalizar eles comparam, não é?*

Nuno: *Sim, sim. O exemplificar, aqui não…*

Lara: *Não.*

Daniela: *Não.*

Daniela: *Comparar entre quê?*

Lara: *Entre as diferentes figuras para poderes generalizar*.

Helena: *Por exemplo, aqui eles fizeram uma comparação. Quando foi para selecionarem qual é que era [o intruso].*

Nuno: *Sim, é um facto. Entre as que são e as que não são [prismas].*

Helena: *Exato.*

Como esperávamos, os futuros professores não referiram o processo de classificar, mas a sua análise identifica claramente o processo de generalizar que se relaciona fortemente com aquele processo (Jeannotte & Kieran, 2017; Mariotti & Fischbein, 1997). Mais ainda, Nuno concretiza em que se substancia essa generalização ao dizer que corresponde à propriedade que "serve para todas as pirâmides", uma ideia que reúne consenso. Associado ao processo de generalizar, o grupo refere também o processo de comparar que o suporta pois, como refere Lara, é necessário comparar as diferentes figuras "para poderes generalizar", o que é também consistente com a literatura.

O grupo estava em sintonia e seguro dos dois processos identificados, quando um dos elementos levanta a hipótese de o processo de justificar estar também envolvido:

Lara: *Justificar não sei se faz sentido. OK, encontras propriedades que podes justificar, mas as propriedades são generalizações.*

Nuno: *Sim, sim. Portanto, generalizar…*

Helena: *Eu acho que basta generalizar e o comparar.*

Nuno: *Se bem que eles para generalizar vão ter também que justificar primeiro, o generalizar é o mais abrangente de todos. Eles vão dizer primeiro que a pirâmide é uma pirâmide…*

Helena: *Porque tal, tal, tal. Exato.*

Nuno: *É uma pirâmide quadrangular, porque a base é um quadrado e, porque as faces laterais são triângulos tem x vértices…*

Daniela: *Eu acho que eles para chegarem à generalização partem da justificação.*

O que começou por ser uma hipótese hesitante de um dos elementos, acabou por se tornar numa possibilidade com sentido para todos. A ideia de que o processo de justificar pode estar presente resulta de pensar que, neste caso, quando generalizamos já temos a justificação em mente ou, dizendo de outra forma, generalizamos porque conhecemos o porquê. Esta ideia é consistente com a sugestão de Mason (2001) quando afirma que o processo de classificar envolve também justificar conjeturas de que todos os objetos possíveis com certas propriedades são os descritos. Mais ainda, no caso particular da geometria, como afirma Brunheira (2019), a justificação de generalizações sobre classes de figuras geométricas tem por base um modelo mental da classe de objetos, ou seja, a sua estruturação espacial, frequentemente, preside à formulação de generalizações e assim promove a articulação entre a visualização espacial e o raciocínio espacial analítico baseado em propriedades (Fujita et al., 2020).

Desta forma, nós consideramos que os diálogos do grupo são bastante pertinentes na medida em que identificam interações entre os processos de generalizar e justificar, evidenciando ainda compreensão sobre todos os processos já tratados, o que corresponde ao nível 5.

Episódio 2

Neste episódio, o mesmo grupo de futuros professores analisa a forma como o raciocínio da aluna evoluiu a partir da sua interação com a professora (Questão 4.1.).

Lara: *Ela começou, ela percebeu primeiro que o 13 que iria sobrar um [palito], certo? Isso foi a primeira coisa que ela percebeu . . . logo com 15…*

Daniela: *Sim, mas aqui …*

Lara: *Ia faltar um.*

Lara: *Ela só percebeu que no 15… só deu a resposta para o 15 tão rapidamente, porque já tinha feito a do 13.*

Helena: *Porque já tinha feito a do 13.*

Lara: *Porque ela até disse que faltava um. Estás a perceber?*

Daniela: *Sim…*

Nuno: *Depois temos de fazer a comparação com o que a professora foi dizendo e logo aqui ao início a professora remete para outro exemplo, para ela conseguir...*

Lara: *Para ela conseguir fazer uma generalização.*

Nuno: *Uma generalização, exato.*

Daniela: *Então, a aluna começou por compreender que com 13 pauzinhos faltaria um para completar a pirâmide.*

Nuno: *De seguida a professora … incita a, o aluno a ir mais além…*

Lara: *Dando outro exemplo.*

Nuno: *…e apresenta um novo exemplo, neste caso com 15 pauzinhos. De seguida a professora incentiva o aluno a ir mais além apresentando um novo exemplo. Apresenta um novo exemplo, fazendo com que a aluna pudesse utilizar o processo de raciocínio, generalizar. Ela deu este exemplo para que ela pudesse depois chegar à ideia de que não podia ser um número ímpar.*

No registo escrito com as respostas à tarefa, o grupo resume as ideias anteriores e acrescenta ainda:

> *De modo a levar a aluna a uma generalização, a professora orientou-a, levando a que ela conseguisse compreender que o número de pauzinhos não poderia ser ímpar. A professora ainda pergunta porque é que isso acontece, incitando a justificação. Numa primeira fase a aluna não justifica, apresentando apenas o que aconteceu. Após a insistência da professora, a aluna aponta para o material manipulável e justifica o porquê da sua generalização. (Registo do grupo sobre a questão 4)*

Neste episódio, os futuros professores elegem três processos que são mobilizados: generalizar (que não existem pirâmides com um número ímpar de arestas), exemplificar (para 13 e 15 arestas) e justificar (porque é que um número ímpar de arestas é impossível). No que diz respeito ao primeiro processo, o grupo identifica corretamente que se trata de uma generalização quando a aluna estende a sua conclusão (sobre 13 e 15) para o domínio dos números ímpares, correspondendo à definição de generalizar que foi trabalhada. No que respeita ao processo de justificar, salienta-se que o grupo consegue distinguir a simples descrição de um acontecimento (quando a aluna afirma "Porque falta um ou sobra um") com a justificação da generalização, associando à identificação do porquê (Lannin et al., 2011). Finalmente, sobre o processo de exemplificar, na verdade os exemplos usados (com 13 e 15 arestas) são sugeridos na tarefa. Contudo, o grupo reconhece o suporte que estes exemplos fornecem, tanto ao processo de generalizar, como de justificar (Jeannotte & Kieran, 2017). No caso do primeiro, considera que é com base na tentativa de construção de uma pirâmide com 13 arestas que a aluna conclui rapidamente que não pode fazer a pirâmide com 15 arestas. Além disso, percebe ainda que estes dois exemplos são fundamentais para generalizar e justificar, pois identificam que a compreensão da situação que eles geram permite a aluna perceber porque é que o número de arestas não pode ser ímpar.

Episódio 3

No episódio seguinte, um grupo de professores discute os eventuais processos de raciocínio que os alunos poderão mobilizar ao longo da tarefa.

Antónia: ... Mas a 4 principalmente, em que a professora pergunta se pode ser o 13 e aquele responde que não e depois "achas que o Pedro tem razão? e porquê?". Aqui é claro que eles podem ficar pelo justificar, mas este justificar também pode ser o ir mais além. Pode haver alunos que vão para a generalização, não é?

Gina: Eu acho que a diferença entre o justificar e o generalizar, às vezes depende mesmo ali duma palavrinha ou outra.

Manuela: Exatamente.

Gina: Eu às vezes tenho imensa dificuldade em perceber quando é que eles estão a justificar ou quando…

Antónia: Depende ao nível que vocês trabalham, porque eles ainda têm algumas dificuldades até de comunicar aquilo que estão a pensar.

Gina: Pois, eles não conseguem é explicar o raciocínio e a forma como justificam. Agora, quem está a ouvir muitas vezes percebe que aquilo de facto é uma generalização, não conseguem…

Antónia: Não conseguem ir mais além para poderem clarificar, mas está lá a base…

A discussão entre estes professores destaca vários aspetos sobre a forma como eles veem os processos de generalização e justificação. Em primeiro lugar, destaca-se a dificuldade em distinguir os dois processos, evidente na análise de Antónia e conscientemente expressa por Gina, o que pode resultar da interação entre o processo de generalização e justificação (Brunheira, 2019). Em segundo lugar, é claro que Antónia concebe uma ordem sequencial entre os dois processos, em que vem primeiro a justificação e depois a generalização. Além disso, sua expressão "Aqui é claro que eles podem ficar pelo justificar, mas este justificar também pode ser o ir mais além. Pode haver alunos que vão para a generalização" parece indicar que ela considera o processo de generalizar como um processo cognitivamente mais complexo do que justificar. Por fim, para Antónia e Gina a identificação do processo de generalizar ou justificar para depender, sobretudo, das dificuldades que os alunos experienciam na sua comunicação das suas ideias e não tanto da natureza dos processos. Assim, no que respeita aos processos de generalizar e justificar, as intervenções mostram que os professores confundem os processos, colocando-os no nível zero.

O grupo continua a sua discussão analisando a possibilidade da tarefa mobilizar outros processos de raciocínio:

Antónia: Tirando justificar e generalizar temos mais processos?

Amélia: Exemplificar.

Manuela: Isso são as situações que justifica quando é que é uma generalização ou quando é que é justificação.

Antónia A pergunta 3 está dentro do exemplificar. Ele está a fazer uma com nove precisa de mais ou não? Traz dez. À partida também é do justificar, não é? Ou *então dentro da pergunta 2, por exemplo a questão do António, que pede para guardar oito "como é que será a base?", ele pode ir experimentar, não é? E aí está a exemplificar.*

Gina: *Pois, ele aí pode exemplificar.*

Antónia: *Esse processo também é possível de existir, não é? Mas, lá está, sem ter o que os alunos disseram…*

Amélia: *Sim, mas como está com material está a tentar, está a exemplificar.*

Este episódio também mostra como os professores encaram o processo de exemplificar. Por um lado, este processo está intimamente associado à análise de casos concretos, mesmo quando estes são sugeridos pela própria tarefa. Especificamente, na questão 3 da tarefa matemática, os alunos são solicitados a responder quantas arestas tem uma pirâmide com 9 arestas na base, repetindo a pergunta com 10 arestas na base. Não são os alunos que geram esses exemplos e, embora sua análise possa suportar a produção de inferências, esse aspeto não é mencionado pelos professores. Por outro lado, Amélia parece muito determinada a considerar o processo de exemplificar associado ao facto de os alunos utilizarem o material, o que favorece a experimentação. Dessa forma, a conceção dos professores sobre o processo parece mais próxima da acessão corrente do termo "exemplificar" do que da definição proposta na literatura e discutida na experiência de formação, o que sugere o nível 1.

Episódio 4

O último episódio que apresentamos ocorre no contexto da formação de professores em serviço e diz respeito a um momento de discussão coletiva, que ocorre após a resolução da tarefa didática. Neste episódio, incidente na análise da interação entre aluno e professor (Questão 4), surge a intervenção de outra professora (Fernanda) que vem corroborar as dificuldades expressas pelo grupo do episódio 3, ao tentar esclarecer suas dúvidas:

Fernanda: Afinal, onde é que está a generalização?
Formadora: Então a generalização, está aqui "com números ímpares não dá".
Fernanda: Sim e o resto são justificações...
Formadora: O resto são justificações, exatamente. Mas concordas Fernanda? Faz-te sentido?

Fernanda: Eu tenho dificuldade nisto.
Fernanda: Para mim, a última justificação é uma generalização.
…
Fernanda: Eu estou agora a ser confrontada com generalizações e depois justificações, porque toda a vida se justificava os porquês e depois se generalizava. Hoje aqui estou a ser confrontada com situações que não é o que eu pensava, pronto. E é por isso que custa a entrar.
Antónia: Ótimo, eu disse, eu disse isso exatamente quando ela entrou na nossa sala, que nós estávamos numa discussão interessante, que para mim uma das coisas da formação, para mim está a ser exatamente a clarificação de conceitos.
Fernanda: É verdade, é isso mesmo! Mas e isto era uma coisa que pertencia ao meu raciocínio. Primeiro, justifica-se, depois é que se generaliza.

Neste episódio, Fernanda confirma as dificuldades já relatadas pelo grupo protagonista do episódio 3, tanto quanto à distinção entre os processos de generalização e justificação, quanto ao seu sequenciamento. No entanto, há uma afirmação de Fernanda que merece uma análise mais aprofundada: "Para mim, a última justificação é uma generalização". A formanda refere-se a "Hum… Aqui (aponta para a base) e aqui (aponta para o lugar onde estariam as arestas laterais) têm de ter o mesmo número" decorrente da insistência da professora em perguntar à aluna porque não seria possível obter pirâmides com um número ímpar de arestas. De facto, quando a aluna afirma que as arestas laterais e as arestas da base correspondem ao mesmo número, essa afirmação é uma generalização mas, no contexto em que acontece, constitui um argumento que justifica a inferência já feita, com base em modelos mentais que integram propriedades geométricas na sua estrutura (Battista, 2007). Essa construção está de acordo com a definição do processo de justificar apresentada na literatura, bem como a interação entre esse processo e o processo de generalizar mencionado acima. No caso desta tarefa, o uso de modelos físicos favorece a estruturação espacial que o aluno mobiliza para produzir os seus argumentos e desenvolver seu raciocínio, como sugerido por Battista et al. (2018).

CONCLUSÃO

A tarefa didática levou os professores e futuros professores a discutirem sobre os processos de raciocínio envolvidos na tarefa com foco nas propriedades das pirâmides. Relativamente ao grupo de futuros professores, a discussão mostra que o grupo conseguiu reconhecer facilmente, no contexto, as características do processo de generalizar, bem como a sua relação com os processos de comparar e exemplificar. No entanto, a riqueza do contexto envolvido – o estabelecimento da classe das pirâmides – favoreceu a emergência de diversos processos de raciocínio que ocorreram de forma não linear, gerando uma discussão sobre a distinção entre generalizar e justificar. Apesar de alguma hesitação, os participantes utilizaram a associação entre o processo de justificar e a compreensão do porquê de uma relação funcionar (Lannin et al., 2011) como critério de seleção para esse processo, o que se mostrou adequado. Além disso, os futuros professores também foram capazes de compreender a função de suporte que o processo de exemplificar assume na construção de uma justificação, sem confundir o papel dos exemplos empíricos no estabelecimento de uma afirmação, o que é muito comum (Stylianides & Stylianides, 2009). Ao contrário, o grupo parece reconhecer que, em geometria, uma justificação deve estar associada à estrutura espacial dos objetos (Brunheira, 2019) valorizando a articulação entre a visualização espacial e o raciocínio analítico espacial baseado em propriedades (Fujita et al., 2020), o que contribui para uma melhor compreensão do raciocínio geométrico (Battista et al., 2018).

A distinção entre justificar e generalizar pareceu ser muito mais difícil para o grupo de professores em exercício que teve dificuldade em escolher qual o processo que poderia ser desenvolvido em cada questão da tarefa matemática. De realçar que os professores mostraram-se conscientes das suas dificuldades e valorizaram as oportunidades que a experiência de formação de professores lhes proporcionou para compreenderem melhor os processos de raciocínio.

Embora este artigo mostre que o grupo de futuros professores apresentou níveis de conhecimento mais elevados do que os professores em serviço, não pretendemos generalizar essa relação. O facto de os professores em exercício serem bastante experientes e terem feito a sua formação inicial há muito tempo, levanta a questão da influência da formação matemática que tiveram (possivelmente seguindo práticas muito diferentes das que são realizadas atualmente) possa ter sobre as suas conceções sobre o raciocínio matemático. Deve também ser tido em conta que, à data em que foram recolhidos os dados, os futuros professores tinham mais duas aulas sobre o tema do que os professores em exercício. Assim, os futuros professores tiveram mais oportunidades de esclarecer e amadurecer os conceitos envolvidos, o que possivelmente teve um efeito positivo na compreensão dos processos de raciocínio por eles apresentados.

Quer consideremos o grupo de professores em serviço e as suas dificuldades, quer consideremos o grupo de futuros professores que apresenta um nível máximo de conhecimento sobre os processos de raciocínio e suas relações, os episódios destacam a importância e o potencial das tarefas didáticas que promovem esse conhecimento, incluindo a ideia de que diferentes tipos de tarefas matemáticas podem oferecer diferentes oportunidades de raciocínio (Stylianides & Stylianides, 2006), e que esse conhecimento didático pode ser promovido através da reflexão aprofundada sobre episódios reais de sala de aula (Santos et al, 2022).

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi apoiado por FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, Portugal (Projeto de IC&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017).

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Todos os autores são membros da equipa do projeto Reason e estiveram envolvidos na conceção das experiências de formação de professores desde o início, portanto todos eles conceberam a ideia expressa neste artigo. LS desenvolveu a teoria em conjunto com LB, MR descreveu a metodologia, LB concebeu a tarefa didática, fez uma primeira seleção de dados para incluir e analisou os dados. Todas as autoras participaram ativamente na discussão dos resultados e conclusão, reviram e aprovaram a versão final do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os autores concordam em disponibilizar seus dados mediante solicitação razoável de um leitor. Cabe aos autores determinar se uma solicitação é razoável ou não.

REFERÊNCIAS

Bardin, L. (2010). *Análise de conteúdo* (4.ª ed). Edições70.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Information Age.

Battista, M. T., Frazze, L. M., & Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. In K. S. S. Mix and M. K. Battista (Eds.). *Visualizing Mathematics The Role of Spatial Reasoning in Mathematical Thought* (pp. 195-229). Springer.

Brunheira, L. (2019). *O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/38922 .

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of mathematics teacher education, 14*(2), 133-148. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9173-0

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 119-161). Macmillan.

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 49-66.

Fujita, T, Kondo, Y, Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Herbert, S. & Bragg, L. A. (2021). Elementary teachers' planning for mathematical reasoning through peer learning teams. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 22(1), 34-43.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8 .

Lannin, J. K., Elliott, R., & Ellis, A. B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.

Leighton, J. P. (2004). Defining and describing reason. In J. P. Leighton, & R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning* (pp. 3–11). Cambridge University Press.

Lehrer, R, Kobiela, M., & Weinberg, P.J. (2013). Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 385-376. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0479-x

Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219–248.

Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. Opening address. QCA Conference, UK. http://xtec.cat/centres/a8005072/articles/proof_and_reasoning.pdf

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, *32*(62), 781–801. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02 .

MES – Ministry of Education Singapore. (2012). *Mathematics syllabus: Primary one to six*. https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf .

Ministério da Educação. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica .

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Melhuish, K., Thanheiser, E., & Fagan, J. (2019). The student discourse observation tool: Supporting teachers in noticing justifying and generalizing. *Mathematics Teacher Educator*, *7*(2), 57-74.

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: A case study. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 377–390. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0679-2

Oliveira, H. & Henriques, A., (2021). Preservice mathematics teachers‟ knowledge about the potential of tasks to promote students‟ mathematical reasoning. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, *7*(4), 1300-1319. https://doi.org/10.46328/ijres.2472

Rodrigues, M., Brunheira, L., & Serrazina, L. (2021). A framework for prospective primary teachers' knowledge of mathematical reasoning processes. *International Journal of Educational Research*, *107*, 101750-101761. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2021.101750

Santos, L., Mata-Pereira, J., da Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2022). Teachers' Understanding of Generalizing and Justifying in a Professional Development Course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(1), em2067. https://doi.org/10.29333/ejmste/11488

Stylianides, A. J. & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307-332.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: The case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201–208). PME.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*, 314–352. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0314

APÊNDICE 1

A tarefa didática

Considere a tarefa *Vamos conhecer as pirâmides,* proposta a alunos do 3.º ano. No ano anterior, a turma já tinha contactado com pirâmides e prismas, numa primeira abordagem às suas características. Desta forma, a professora introduziu a tarefa projetando a imagem em baixo e perguntando *Qual é o intruso?*

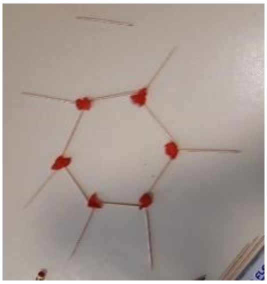
Depois da discussão inicial, os alunos iniciaram a resolução da tarefa a pares, usando como material alguns modelos de pirâmides em cartolina e madeira, paus de fósforo, palitos e bolinhas de plasticina.

1. Analise a tarefa e explicite quais são as propriedades das pirâmides que poderão emergir a partir da sua resolução.

2. Identifique, no currículo nacional, quais são os objetivos de aprendizagem para os quais esta tarefa pode contribuir.

3. Identifique eventuais processos de raciocínio envolvidos.

4. Leia o seguinte diálogo.



Os alunos já tinham analisado a possibilidade de construir uma pirâmide com 13 arestas usando o material, como mostra a imagem. Estavam no momento a analisar a mesma questão com 15 arestas.

Professora — Então vá, com 15 pauzinhos, 15 arestas, o que é que acontecia?
Aluna — Sobrav… faltava 1.
Professora — Então e puseste quantos palitos na base?
Aluna — Oito.
Professora — Oito. E agora quantos tens para pôr nas arestas laterais?
Aluna — Ai meu Deus…

Professora — Então, podes olhar para o que tu fizeste!
Aluna — Sete.
Professora — E então, podemos construir com 15?
Aluna — Não… faltava um pauzinho… com números ímpares não dava.
Professora — Ah! Então diz lá porque é que será que com números ímpares não dá.
Aluna — Porque falta um ou sobra um.
Professora — E isso acontece porquê? O que é que acontece às arestas nas pirâmides?
Aluna — Hum… Aqui (aponta para a base) e aqui (aponta para o lugar onde estariam as arestas laterais) têm de ter o mesmo número.

4.1. Discuta como foi evoluindo o raciocínio da aluna, relacionando com a interação que estabeleceu com a professora.

4.2. Explicite o papel do material manipulável nesta situação e ao longo da tarefa.

5. Analise a seguinte resposta:

5. Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.

Nós descobrimos que as pirâmides tenhem de ter sempre 5 ou mais vertices e elas tenhem sempre um vertice em cima.

Imagine que esta resposta surge numa aula sua. O que diria ou perguntaria ao seu autor? Fundamente a sua proposta.

APÊNDICE 2

A tarefa Vamos aprender sobre pirâmides

1. Começa por estudar as pirâmides que o teu grupo tem e preenche os espaços:

Número de faces ______	Número de faces ______
Número de vértices ____	Número de vértices ____
Número de arestas _____	Número de arestas _____

Base da pirâmide ____________________	Base da pirâmide ____________________

2. O grupo da Marisa, da Ana, do Pedro e do António está a construir pirâmides com pauzinhos e bolinhas de plasticina, mas têm pouco material.

a. A pirâmide da Ana tem na base uma figura com 8 pauzinhos. No topo já colocou 5 pauzinhos, como mostra a imagem.

Quantos pauzinhos lhe faltam?

Quantos pauzinhos precisa ao todo?

E quantas bolinhas de plasticina precisa ao todo?

b. O António diz aos colegas: "Guardem 8 bolinhas de plasticina para mim!". Como será a base da pirâmide que o António quer fazer?

3. A Marisa está a fazer uma pirâmide com 9 palitos na base. Quantos palitos precisará mais? E se forem 10 palitos na base? Explica como pensaste.

4. No fim do trabalho, todos os grupos mostram as pirâmides que construíram. A professora pergunta:

— Alguém me pode mostrar uma pirâmide com 13 arestas?".

Como ninguém responde, a professora pede outra pirâmide com 15 arestas. Então o Pedro responde:

— Não dá para construir pirâmides com esses números.

Achas que o Pedro tem razão? Porquê?

5. Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.