ACTA SCIENTIAE
ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7135

Articulación entre el Ciclo de Modelización de Blomhøj y Espacios de Trabajo Matemático. Análisis de una Tarea en Educación Superior

Paula Verdugo-Hernández [a]
Jaime Huincahue [b]
Patricio Cumsille’ [c,d]
Assia Nechache [e]

[a] Universidad de Talca, Escuela de Pedagogía en Ciencias Naturales y Exactas, Facultad de Ciencias de la Educación, Linares, Chile
[b] Universidad Católica del Maule, Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Maule, Talca, Chile
[c] Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Chillán, Chile
[e] Universidad de Chile, Centro de Biotecnología y Bioingeniería (CeBiB), Santiago, Chile
[e] CY Cergy Paris Université, LDAR, Paris, France

Recibido para publicación 28 abr. 2022. Aceptado después de la revisión 8 sep. 2022
Editor designado: Gabriel Loureiro de Lima

RESUMEN

Antecedentes: El marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) ha desarrollado un creciente interés en cómo se reconoce, analiza y articula la modelación matemática desde sus alcances teóricos y empíricos. Dadas las articulaciones identificadas en la literatura, es interesante determinar si nuevas redes con el ETM brindan estrategias poderosas para analizar la resolución de tareas de modelación matemática. **Objetivo:** caracterizar la actividad de modelación a partir de la red formada por el ciclo de modelación de Blomhøj y el ETM en estudiantes de ingeniería. **Diseño:** Se planteó un estudio de caso desde un enfoque cualitativo para analizar la resolución de una tarea de modelación a través de la red propuesta. **Entorno y participantes:** La experimentación se realizó en el curso de cálculo integral de la carrera de Ingeniería Civil Informática de una universidad chilena. En esta asignatura de segundo año no son habituales las prácticas de modelación, aunque es necesario potenciar su uso en la formación profesional. **Recolección y análisis de datos:** Se recolectaron los expedientes escritos de los estudiantes, seleccionando uno de ellos para realizar el análisis en profundidad debido a su alta representatividad y claridad, como se evidencia en los documentos. Además, se siguieron tres etapas para caracterizar la actividad de modelación en el registro escrito: descripción, análisis e interpretación. **Resultados:** El ciclo de modelación de Blomhøj presentaría conexiones con el ETM desde la formulación del problema y no sólo desde la sistematización, lo cual es una novedad en este campo de investigación. **Conclusiones:** Se evidencia un enfoque

Autor correspondiente: Paula Verdugo Hernández. Email: paulasinttia@gmail.com

novedoso para desarrollar la red entre el ETM y la modelación, enfatizando la investigación de problemas matemáticos usando la realidad del estudiante en educación superior.

Palabras clave: Espacios de Trabajo Matemático (ETM); ciclo de modelización de Blomhøj; complementariedad ETM-modelización; tareas de modelización.

Articulating the Blomhøj Modelling Cycle and the Mathematical Working Spaces. Analysis of a Task in Higher Education

ABSTRACT

The Mathematical Working Spaces (MWS) theoretical framework has developed an increasing interest in how mathematical modeling is recognized, analyzed, and articulated from its theoretical and empirical reaches. Given articulations identified in the literature, it is interesting to determine whether new networkings with the MWS provide powerful strategies for analyzing the resolution of mathematical modeling tasks. **Objective:** to characterize the modeling activity from the networking formed by Blomhøj's modeling cycle and the MWS in engineering students. **Design:** A case study was proposed from a qualitative approach to analyze the resolution of a modeling task through the proposed networking. **Environment and participants:** The experimentation was carried out in the integral calculus course of a Chilean university's Computer Civil Engineering career. In this second-year course, modeling practices are not usual, although promoting its use in professional training is necessary. **Data collection and analysis:** The written records of students were collected, selecting one of them to carry out the in-depth analysis due to its high representativeness and clarity, as evidenced in documents. In addition, three stages to characterize modeling activity in the written record were followed: description, analysis, and interpretation. **Results:** Blomhøj's modeling cycle would present connections with the MWS from the problem formulation and not only from the systematization, which is a novelty in this field of research. **Conclusions:** A novel approach to developing the networking between the MWS and modeling is evidenced, emphasizing the investigation of mathematical problems using the student's reality in higher education.

Keywords: Mathematical Working Spaces (MWS); Blomhøj modeling cycle; MWS-modeling complementarity; modeling tasks.

INTRODUCTION

El trabajo investigativo sobre modelización matemática tiene más de 40 años de desarrollo en distintas latitudes del mundo. En la actualidad, múltiples comunidades e investigaciones científicas han posicionado el modelizar en los currículos del mundo (Kaiser, 2020). Esto no necesariamente significa que exista un consenso global sobre lo que entendemos por modelizar, existiendo múltiples aproximaciones, tanto a nivel latinoamericano (Arrieta y Díaz, 2015) como europeo (Doerr *et al*., 2017), promovidas por una amplia diversidad de propósitos educativos y una variedad de fuentes tanto para la construcción del conocimiento matemático, como para la tipología de tareas de modelización (Kaiser y Sriraman, 2006). Sin embargo, existe una concepción genérica de tales aproximaciones, del hecho que la actividad de modelización cruza los límites entre la realidad y las matemáticas, cuando son reconocidos como conocimientos (Blomhøj y Jensen, 2003).

Para el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak *et al*., 2016; Kuzniak *et al*., 2022), existe un interés en comprender cómo la realidad incide en el desarrollo de una tarea matemática (Lagrange, 2018), o bien sobre tipos de tareas matemáticas situadas en la realidad, con el fin de favorecer aproximaciones didácticas para la enseñanza y aprendizaje. Este tópico ha sido considerado en los últimos simposios internacionales sobre el Trabajo Matemático (Nechache, 2018; Guerrero-Ortiz y Henríquez-Rivas, 2018), generando complementariedad entre la modelización y ETM, promoviendo el diseño de tareas de modelización basadas en contextos reales. En particular, los estudios de complementariedad entre ambos marcos han enfatizado el ciclo de Blum-Borromeo (Borromeo, 2006), obteniendo buenos resultados en relacionar las etapas de modelización con las circulaciones en el ETM (Cosmes y Montoya-Delgadillo, 2021).

El presente estudio propone ampliar la investigación sobre la relación existente entre el ETM y otros modelos afines de modelización matemática, en este caso, con el ciclo de Blomhøj. El objetivo es reconocer articulaciones que muestren una complementariedad (Castela, 2021; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2009; Maier y Beck, 2001; Prediger *et al*., 2008; Radford, 2008) entre las etapas de modelización con las circulaciones (Montoya-Delgadillo *et al*., 2014), no sólo desde la dimensión cognitiva, sino también epistemológica del ETM. Para ello, vamos a describir los distintos alcances de esta complementariedad, tanto desde un punto de vista teórico como empírico. Específicamente, a partir de evidencia recogida desde un contexto específico de interés para la investigación en educación superior, a saber, modelización matemática de problemas de investigación reales en cursos de cálculo para ingeniería, aspecto que no ha sido tan abordado en la literatura, debido a que la mayoría de las propuestas están dirigidas a la matemática escolar (e.g. Borromeo-Ferri, 2007; Blum y Borromeo-Ferri, 2009). La elección del ciclo de Blomhøj se debe a que toma en cuenta aspectos epistemológicos de la teoría subyacente a la modelización, lo que adquiere mayor importancia cuando los problemas corresponden a investigaciones reales, solicitando un trabajo de resolución de tareas con alta demanda cognitiva (e.g. Blomhøj, 2020; 2021).

La estructura del presente artículo consta de dos partes. La primera provee una descripción del estado del arte de la modelización en ETM; para ello, se describe brevemente el marco ETM, los enfoques de modelización que han sido utilizados para el análisis mediante el ETM y luego discutimos algunos trabajos de interés sobre modelización en ETM. Posteriormente, se presenta el ciclo de modelización de Blomhøj y una posible complementariedad teórica entre ambos marcos, lo que constituye la principal novedad del presente trabajo. Con el fin de someter a prueba nuestra propuesta de complementariedad, la segunda parte se ocupa del análisis de los datos recogidos en una experimentación sobre la resolución de una tarea considerada de modelización. En particular, describimos los aspectos metodológicos y el proceso de experimentación implementada en un curso de cálculo en una carrera de ingeniería civil. Enseguida, analizamos los datos para caracterizar el trabajo matemático de estudiantes de ingeniería en la resolución de una tarea de modelización de un problema de investigación real, basado en la propuesta de complementariedad entre el enfoque de modelización de Blomhøj y el ETM. Finalmente, exponemos las conclusiones que permiten continuar con el desarrollo de la complementación ETM-modelización, con énfasis en problemas de investigación reales en educación superior.

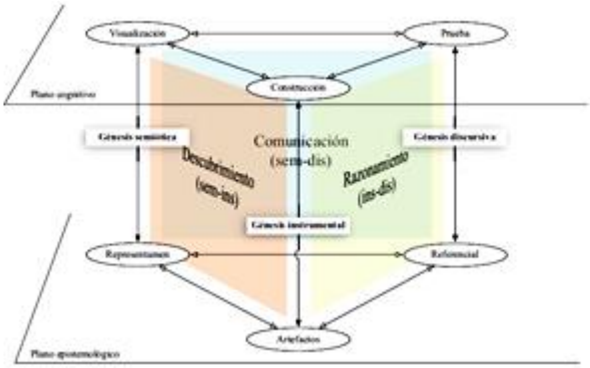
ANTECEDENTES TEÓRICOS

Espacios de Trabajo Matemático

El objetivo principal del enfoque analítico ETM (Kuzniak *et al*., 2022) es caracterizar el trabajo matemático en un contexto educativo, con el fin de favorecer y mejorar las condiciones en las cuales se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para ello, la teoría ETM considera dos dimensiones: epistemológica y cognitiva, representadas como planos horizontales en la Fig. 1; la primera se centra en la investigación orientada a partir de los paradigmas de trabajo, los cuales dependen de los dominios de las matemáticas que la estructuran y tienen en cuenta la diversidad de la actividad del matemático, que se relaciona con la naturaleza de los objetos estudiados, lo que implica conocer los fundamentos epistemológicos de esas diferencias. El ETM, como actividad humana, requiere de la dimensión cognitiva, la cual está asociada con el plano epistemológico a través de la resolución de problemas. El espacio abstracto concebido de esta manera se entiende como una estructura organizada que permite describir las actividades de los individuos al resolver problemas.

Figura 1

Esquema del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak & Richard, 2014)



El plano epistemológico está constituido de tres componentes en interacción: el referencial (formado por las propiedades, teoremas y definiciones, entre otros), el representamen (signos), y artefactos (materiales o simbólicos); de la misma forma, el plano cognitivo se compone por la visualización, construcción y prueba. La teoría ETM considera entre sus principios algunos autores que le proveen fundamento, entre los cuales se destaca Peirce (1990), debido a su definición del mundo real mediante los signos. Para Peirce, el signo no representa necesariamente a un objeto empírico; puede representar una ley convencional, la propiedad de una cosa, de una acción o de un acontecimiento. Los objetos que los signos representan pueden ser perceptibles, imaginables y aún inimaginables, pero siempre conocidos (Peirce, 1990; p.94). Los signos permiten comprender y conocer la realidad tomando como fundamento la propia realidad, lo cual permitiría relacionar ETM con modelización partiendo de ésta última, pudiendo ser el plano epistemológico, mediante la génesis semiótica, una posible intersección de ambas teorías.

El análisis del trabajo matemático, a través de la teoría ETM, permite estudiar cómo se construye progresivamente, conectando los componentes de los planos epistemológicos y cognitivos mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. De acuerdo con el esquema representado en la Fig. 1, la génesis semiótica, considerada como un proceso de decodificación e interpretación de signos, se refiere a la percepción de un signo (representamen) por medio de la comprensión cognitiva. La relación inversa, codificación o instanciación, ocurre en la comprensión del sujeto al construir o especificar un signo. La génesis instrumental permite hacer que los artefactos sean operativos en los procesos de construcción de conceptos u objetos que contribuyen al logro del trabajo matemático. La génesis discursiva de la prueba es el proceso mediante el cual las propiedades y los resultados organizados en el referencial se desarrollan para estar disponibles para el razonamiento matemático y las validaciones discursivas, *i.e.*, aquellos que van más allá de las pruebas gráficas, empíricas o instrumentadas.

Los planos epistemológicos y cognitivos estructuran la teoría ETM que proporciona un modelo para comprender la circulación dentro del trabajo matemático. Estos dos niveles están articulados por las tres génesis, cuyas interacciones se describen mediante el uso de tres planos verticales, denotados por Sem-Dis, Sem-Ins e Ins-Dis, que surgen naturalmente en la Fig. 1, involucrando la génesis semiótica y discursiva, semiótica e instrumental, e instrumental y discursiva, respectivamente.

Finalmente, consideramos los paradigmas del análisis real (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016), los cuales guían el trabajo matemático en este campo. Particularmente, el paradigma Análisis Aritmético/Geométrico (AG) involucra un trabajo de tipo perceptivo basado en interpretaciones a partir de gráficos o números, teniendo en cuenta el rol de las figuras o diferentes visualizaciones que activen dicho trabajo. Todo lo cual, apoya la enseñanza de un determinado objeto tales como, por ejemplo, ecuaciones o funciones, en sus primeras etapas. Este paradigma propicia interpretaciones con hipótesis implícitas basadas en la geometría, el cálculo aritmético, o el mundo real.

El ciclo de modelización de Blomhøj

La actividad de modelizar es interpretada como un proceso cíclico y no lineal, caracterizando de forma continua las relaciones entre las ideas que viven en la realidad y las matemáticas, y ubicando en relieve los subprocesos que relacionan a ambas, desde una base epistemológica definida por el sujeto con distintos alcances. Inicia con un problema de la vida real, planteando un objetivo que demanda una tarea de modelización desde la realidad situada en un dominio de investigación, en muchas ocasiones con un carácter interdisciplinario, prevaleciendo un proceso de investigación dinámico que considera como base las relaciones entre los conceptos matemáticos e ideas, y las experiencias de la vida real (Artigue y Blomhøj, 2013).

Para Blomhøj (2004), el proceso de modelización inicia desde una situación del mundo real, que, en ocasiones, no necesariamente posee un carácter explícito; por ejemplo, si se plantea el problema de ahorro de agua en las mañanas (Blomhøj, 2004), una tarea sería cómo optimizar las variables a considerar en la ducha, o alguna otra que sea pertinente al problema, guiada por la caracterización epistemológica del sujeto (Artigue y Blomhøj, 2013). A partir de una caracterización analítica, representada en la Fig. 2, el proceso de modelización matemática posee 6 sub-procesos Blomhøj (2004; 2013):

a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.

b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc., del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

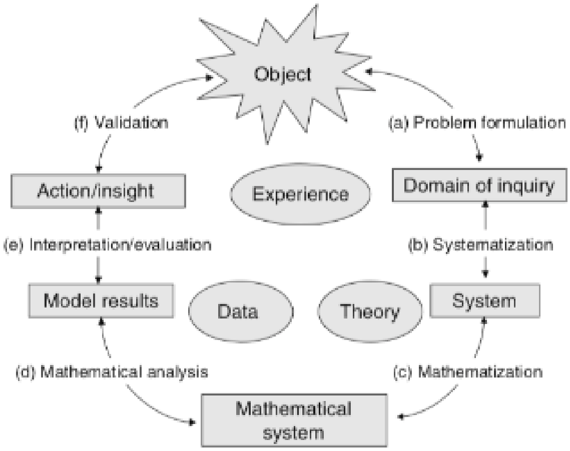
e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El ciclo de Blomhøj considera tres islas centrales (ver Fig. 2.): la experiencia, los datos y la teoría como la base para su dinámica. En muchas ocasiones, la resolución del problema o una determinada tarea conlleva a la recopilación de datos, los cuales pueden ser parte de un modelo presupuesto, o bien la experiencia puede llevar a una idea constructiva del modelo, cuyo abordaje es generalmente de naturaleza inductiva. Sin embargo, el uso de modelos matemáticos que existen en la teoría enfatiza su uso en la resolución de una tarea de modelización, destacando una naturaleza deductiva. Asimismo, la isla teoría (ver Fig. 2) significa también el conocimiento puesto en uso según el dominio de investigación a utilizar en la tarea de modelización, lo que afecta significativamente los procesos de validación del modelo y sus aplicaciones.

Figura 2

Ciclo de modelización (Blomhøj and Kjeldsen, 2006)



Los subprocesos puestos en práctica para resolver una tarea de modelización, caracterizados en la Fig. 2, naturalmente conllevan a ideas matemáticas trazadas según la elección de los dominios de investigación, que dan sentido a la sistematización, y en general, a todo el proceso de resolución desde una perspectiva epistemológica y cognitiva. Esto propone un sistema de trabajo complejo, destacando aspectos centrales del proceso (las islas datos, experiencia y teoría en la Fig. 2), los que vinculan conocimientos propios de la realidad y la matemática, permitiendo proveer -desde el punto de vista de la investigación- variadas formas analíticas de idealización y, por lo tanto, diversas posibilidades de construcción de modelos matemáticos. Este proceso, en conjunto con el propósito de la tarea, permitirá establecer formas de delimitar y caracterizar el trabajo matemático, particularmente las circulaciones a través del ciclo a medida que se desarrolle el ETM personal del estudiante.

Espacios de Trabajo Matemático y Modelización

Actualmente es posible estudiar múltiples trabajos en torno a la modelización desde el punto de vista del ETM (Nechache, 2016, Rauscher y Adjiage, 2014, entre otros), encontrando una diversidad de puntos de interés en las investigaciones: algunos tratan a las tareas como un entorno contextualizado para desarrollar el ETM (Rauscher y Adjiage, 2014; Cosmes, 2018); otros analizan los efectos de reconocer a la realidad como un entorno singular para el desarrollo del ETM (Parzycs, 2014); o también, problematizan los marcos teóricos de modelización para otorgar resultados conceptuales y eventuales articulaciones con el ETM (Nechache, 2016; Derouet, 2016). Este último grupo de trabajo es de interés para el presente estudio, dado que pretende facilitar el análisis de las tareas de modelización, considerando un enfoque particular como el de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2006). En este sentido, el aporte de este trabajo es proveer el desarrollo de una articulación conceptual entre ETM y el ciclo de modelización de Blomhøj, promoviendo otras formas de análisis de tareas y ampliando la discusión en la comunidad científica. No se trata de reconocer algún marco de modelización adecuado para el ETM, sino incentivar estudios sobre este tema, despojándose de la unicidad conceptual, planteando una articulación frente a otras perspectivas con el fin de robustecer la discusión sobre el modelizar desde el ETM.

En general, las investigaciones de modelización que se han reportado desde el ETM son de naturaleza cualitativa y empírica, centradas en la interacción del mundo real u otras ciencias con los modelos matemáticos. Además, varias investigaciones son impulsadas por el contexto escolar de enseñanza secundaria francesa, destacando el ciclo de modelización como un aspecto común de aprendizaje, específicamente en los dominios de geometría y probabilidades (Nechache, 2016, p. 52). Al respecto, Nechache aborda este aspecto curricular utilizando softwares para el trabajo geométrico y probabilista, caracterizando la práctica de modelización para estudiantes de enseñanza secundaria. Asimismo, Lagrange (2015, p. 317) usa el ciclo de modelización del equipo "Casyopée" para la geometría dinámica, estudiando extensiones de investigación hacia la modelización de problemas físicos, de modo que cierto tipo de funciones matemáticas adquieran el sentido de resolver tales problemas.

Rauscher y Adjiage, (2014), analizan por medio del ETM el trabajo de resolución del problema del gigante -una tarea similar al clásico zapato de Blum y Borromeo-Ferri (2009), mediante una experimentación conducida en estudiantes de 10-11 años. Los autores afirman la necesidad de experimentar un proceso de modelización con el fin de resolver el problema, pero que éste no es un problema de investigación real para un experto. A pesar de ello, para los estudiantes, quienes no tienen un referencial bien establecido, el problema es adecuado para desarrollar el pensamiento matemático a partir de la investigación.

El trabajo doctoral de Derouet (2016, p.228-231) propone una discusión respecto a los ciclos de modelización, específicamente se refiere a los ciclos propuestos por Kaiser (1995), Blum (1996), Blum y Leiß (2007), Coulange (1998) y Henry (2001). La autora destaca que los últimos dos trabajos utilizan el dominio *pseudo-concreto* como parte de un dominio matemático, pero situado en otro paradigma, y la idea de no distinguir solamente entre la realidad y las matemáticas, sino que además considerar las elecciones hechas respecto al modelo en la realidad. Asimismo, la autora afirma que, contrariamente al ciclo de Blum (Blum y Leiß, 2007), todas las etapas propuestas por Henry (2001) no tienen el mismo estatus, puesto que son caracterizadas como acciones o estados, razón por la cual la autora decide trabajar con el ciclo de Blum (Blum y Leiß, 2007).

Un trabajo propio del ETM, que aborda distintos enfoques de modelización, es el de Nechache (2018), quien afirma que la resolución de tareas probabilistas, en el contexto de enseñanza secundaria francesa, requiere de la construcción de modelos, implicando la puesta en marcha de diferentes etapas del proceso, induciendo usos o cambios de paradigmas probabilistas (Parzysz, 2011) y de dominios (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014). En términos conceptuales, la autora describe un ciclo de modelización adaptado al dominio probabilístico (Nechache, 2016), basado en los enfoques de Kaiser (1995), Blum y Leiß (2007) y Borromeo-Ferri (2006), y adaptando a partir de Henry (1999) tres etapas fundamentales del ciclo: descripción de la realidad, matematización, y validación externa. Además, para la primera etapa del ciclo, se observa que es necesario realizar hipótesis basadas en el dominio probabilista y, por lo tanto, la autora hace intervenir el ETM de referencia de dicho dominio previo a la construcción del modelo matemático. En ese sentido, el ETM puede estar presente en las diversas etapas de la modelización, y no solamente a partir del momento en que existe el modelo, razón por la cual creemos necesario considerar otros enfoques teóricos de modelización.

Complementariedad entre el ETM y el ciclo de modelización de Blomhøj

En esta sección trataremos de acercarnos hacia una complementariedad de ambos constructos teóricos, ETM y el ciclo de Blomhøj, sin pretender dar una discusión definitiva, sino más bien con la idea de ampliarla, incluyendo otros alcances de modelizar en el ETM. Para ello, partimos de la base que existen similitudes asociadas al conocimiento teórico, la experiencia y la valoración de los datos (ver Fig. 2), dado que, partiendo de la conceptualización de signos, es posible comenzar a caracterizar las relaciones con el ETM. A continuación, describimos una manera de relacionar cada subproceso, mostrado en la Fig. 2, con las componentes del ETM, mostradas en la Fig. 1.

En el subproceso (a), de formulación del problema, intervendrían las islas teoría, experiencia o datos (ver Fig. 2), lo cual no necesariamente implica un trabajo matemático. En el subproceso (b), de sistematización, entra en juego directamente la teoría relativa al dominio del problema, con el fin de formular supuestos e identificar variables y sus posibles relaciones; lo anterior produciría explícita o implícitamente una circulación o desarrollo de razonamiento, en el plano vertical Sem-Ins (ver Fig. 1). El proceso (c) de matematización, corresponde al desarrollo de un modelo matemático mediante el cual se construyen fórmulas que relacionan las variables identificadas, cuya construcción utiliza los supuestos y relaciones del paso anterior, activándose varias componentes y génesis del ETM. Específicamente, la circulación en el plano vertical Sem-Ins (ver Fig.1), para la interpretación y construcción de los signos y sus relaciones, junto a las correspondientes componentes del plano epistemológico, activándose explícitamente un referencial matemático. En el proceso (d), análisis del sistema matemático, se determinan los resultados, utilizando posiblemente la simulación y la prueba (por ejemplo, de existencia y unicidad de soluciones analíticas y aproximadas del modelo), activándose la circulación en el plano vertical Ins-Dis, para la construcción de los resultados y las posibles demostraciones, instrumentadas o no. En el proceso (e), interpretación y evaluación, nuevamente se posiciona una circulación en el plano vertical Sem-Ins, por ejemplo, visualización y construcción a partir de representamen, tal como un gráfico o tabla de resultados, lo cual podría llevar a un cuestionamiento del proceso (b) de sistematización. La evaluación de los resultados se hace comparándolos con datos o la experiencia, lo cual podría estar relacionado con la génesis discursiva o con procesos algorítmicos activando la génesis instrumental. Por último, el proceso (f) de validación, que tiene estrecha relación con el proceso anterior, tendría la misma conexión con el ETM.

En vista de los antecedentes, y del estudio teórico previo sobre la complementariedad del ciclo de Blomhøj con el ETM, pensamos que este podría permitir ampliar los análisis de tareas de modelización. Por lo anterior, consideramos el estudio previo para investigar la actividad de resolución de una tarea de modelización, que será presentada en la metodología, con el fin de tratar de responder a la pregunta ¿cómo se caracteriza la actividad de modelización desde el ETM cuando se interpreta a través del ciclo de Blomhøj en estudiantes de ingeniería?

METODOLOGÍA

Esta investigación consideró dos aspectos metodológicos; primero, el diseño de una tarea basada en un problema de modelización con un nivel progresivo de complejidad, por el hecho de provenir del mundo real, demandando una alta capacidad cognitiva para su formulación matemática. Se trata de un problema de investigación real, cuestión que fue mencionada como deseable para las tareas de modelización en el simposio ETM6 (Montoya-Delgadillo *et al*., 2018) y que es destacado en la propuesta teórica de Blomhøj (2004). Con el fin de caracterizar el trabajo matemático de los estudiantes, profundizando en las ideas y significados del conocimiento (Denzin y Lincoln, 2012), el segundo aspecto metodológico consistió en un enfoque cualitativo. En este sentido, la tarea adquiere una singularidad y complejidad propia, dada la intención de comprender cómo ocurren las circulaciones en el ETM durante el proceso de modelización, definiendo la parte experimental de la investigación como un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). Además, se utilizó la *triangulación entre investigadores*, de tal manera de realizar análisis individualizado de los datos por cada uno, para después corroborar grados de similitud y búsqueda de concordancia en los análisis disímiles, esto, con el fin de aumentar la confiabilidad interna de la investigación. Tal diseño metodológico fue viable dada la experiencia y formación con al menos dos de los autores que realizaron tal triangulación, ya que ambos perfiles se asocian a ser especialistas en didáctica de la matemática con publicaciones en el área y experiencia en análisis cualitativo.

La tarea propuesta ha sido catalogada como una tarea de modelización por tres académicos (docentes e investigadores), los cuales cuentan con una vasta experiencia en docencia universitaria y que han dictado cursos cálculo por más de tres años. Dichos académicos señalan que el tipo de tarea "guiada" es una práctica comúnmente utilizada en la enseñanza universitaria, dada la gran complejidad cognitiva que demanda su resolución por parte de los estudiantes. En este sentido, cabe señalar que, a lo largo del libro de texto de Stewart (2008), vigente en los programas de cálculo, se fomenta este tipo de tareas de modelización como problemas reales, solicitando una resolución computacional mediante software, suponiendo que el estudiante tiene acceso a alguno. Cabe destacar que este clásico libro de cálculo les atribuye gran importancia a los modelos, vistos como aplicaciones de las funciones, en particular, a la dinámica de crecimiento de poblaciones (secciones 1.2, 1.4, 1.5-1.6, 2.8, 3.4, 3.7, 3.8, 4.3, 4.9, 9.1, 9.4, 9.6, 11.1), tema de la tarea propuesta en este trabajo.

La experimentación consistió en solicitar la resolución escrita e individual a un curso de 31 estudiantes de segundo año de la carrera de Ingeniería Civil Informática en una universidad pública del estado de Chile, recogidas al final de una sesión de 90 minutos. Para efectos de nuestro estudio hemos seleccionado un sujeto para nuestros análisis, al cual llamaremos Juan, cuya producción escrita es lo suficientemente completa y de interés para una correcta interpretación, tanto en la comprensión del trabajo matemático desarrollado como en la profundización de las ideas.

Con el fin de reducir, organizar y dar significado a datos cualitativos, hemos considerado, de acuerdo con Burns y Grove (2004), tres etapas de análisis de la producción escrita de Juan: descripción, análisis e interpretación.

La tarea propuesta a los estudiantes es la siguiente:

Tabla 1

Tarea de modelización.

Año	Población
1907	3231022
1920	3720235
1930	4287445
1940	5023539
1952	5932995
1960	7374115
1970	8884768
1982	11329736
1992	13348401
2002	15116435
2017	17574003

Tabla A. Datos de la población

Se sabe que en las últimas 3 décadas la población ha ido envejeciendo y que la tasa de natalidad ha ido disminuyendo progresivamente. La tabla siguiente muestra la evolución de la población entre los años 1907 y 2017, obtenida a partir de la información recopilada en los censos efectuados aproximadamente cada 10 años (Compendio Estadístico, 2018).

El objetivo de este problema es predecir el crecimiento de la población a partir del año 2017, o estimarlo entre medio de los valores medidos en los censos. Para lo anterior, trataremos de establecer una fórmula general que modele el crecimiento de la población como función del tiempo. Comenzaremos analizando el modelo más simple de crecimiento de una población. Supondremos que:

(H1) La tasa de crecimiento relativo de la población permanece constante (es independiente del tamaño de la población).

(H2) Los individuos se reproducen sólo una vez cada cierto periodo de tiempo (por ejemplo, cada década para tomar en cuenta la disponibilidad de datos).

Mediremos el tiempo k en unidades de generación (periodo de tiempo entre una generación y la siguiente, por ejemplo, una década). Denotemos por x_k el número de individuos de la población en la generación k, de modo que x_{k+1} designará el número de individuos de la población en la generación siguiente, k+1. De acuerdo con el supuesto (H2), no existe reproducción de la población entre los periodos k y $k + 1$. En consecuencia, la fórmula más general para describir el crecimiento de la población entre k y $k + 1$ es del tipo siguiente:

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (1)$$

donde f es alguna función que determina la cantidad de individuos en el periodo $k + 1$ (x_{k+1}) a partir del número de individuos que había en el periodo k (x_k). Típicamente, para encontrar una expresión apropiada para f se usa la tasa de crecimiento relativo de la población, es decir, la diferencia entre la cantidad de individuos en el periodo k+1 y la cantidad en el periodo k dividido por la cantidad en el periodo k (o el cociente de la cantidad de individuos en el periodo $k + 1$ y la cantidad en el periodo k menos 1), o sea:

$$r_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = \frac{x_{k+1}}{x_k} - 1 \quad (2)$$

$r_k > 0$ significa que la población crece entre el periodo k y el $k + 1$; $r_k < 0$ significa que la población decrece entre k y $k + 1$; mientras que $r_k = 0$ significa que la población se mantuvo constante entre k y $k + 1$.

Encontrando una relación apropiada entre r_k y x_k se puede obtener f despejando x_{k+1} en función de x_k a partir de la ecuación (2). Se pide:

1 Calcule la tasa de crecimiento relativo de la población entre dos periodos consecutivos, es decir, calcule r_k definida por (2).
2 Calcule la tasa de crecimiento relativo promedio r a partir de las r_k.
3 De acuerdo con el supuesto (H1), el modelo matemático discreto más simple, dado por la ecuación (1), se obtiene suponiendo que la tasa de crecimiento relativo permanece constante. Suponiendo que esta constante es igual a su promedio r, establezca una fórmula para la función f despejando x_{k+1} en función de x_k a partir de la ecuación (2).
4 En base al modelo encontrado, determine el crecimiento de la población en los periodos tabulados en la Tabla 1. Para ello, el modelo empieza con la población inicial, x_0=3231022, que corresponde a la población en el año 1907. Calcule sucesivamente x_1, x_2, ... partiendo de x_0 mediante la fórmula encontrada en el ítem anterior.
5 Con el fin de determinar la calidad del modelo encontrado, calcule los errores relativos cometidos al aproximar el tamaño de la población real por el valor obtenido mediante el modelo. O sea:

$$\frac{|y_{k+1} - x_{k+1}|}{y_{k+1}} \quad (3)$$

	donde y_{k+1} corresponde al tamaño real de la población en el periodo k+1 y x_{k+1} es el tamaño de la población predicho por el modelo en el periodo k+1. Calcule además el error relativo promedio. ¿qué tan buenas son las aproximaciones del modelo?
6	En base al modelo propuesto, predecir el tamaño de la población que será determinado en los censos futuros, suponiendo que estos se realizaran cada 10 años. ¿En aproximadamente cuántas décadas más se duplicará el tamaño de la población con respecto al tamaño en el año 2017?

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Los análisis se dividieron en dos apartados: el primero consiste en el diseño de la tarea; y el segundo en las respuestas del estudiante mediante el ETM en las distintas fases de la modelización.

Análisis del diseño de la tarea

El diseño de la tarea (ver tabla 1) se hizo con el fin de que el estudiante lograra comprender la formulación general del modelo propuesto, junto con dar respuestas a las preguntas solicitadas. En este sentido, pensamos que el estudiante tendría que hacer una lectura repetida del enunciado, ya que usualmente los cursos de cálculo consideran de forma muy débil las tareas de modelización, por el hecho de centrar sus esfuerzos en constructos matemáticos, presentes en los planes y programas, lo que implicaría estar frente a una tarea con un alto nivel de complejidad (Cabassut y Ferrando, 2017).

Asimismo, dado que la aplicación de este tipo de tareas requiere una cuidadosa guía del profesor, el diseño del enunciado incluyó la formulación del problema, la sistematización y parte de la matematización. En efecto, se formularon dos supuestos de trabajo (H1 y H2, tabla 1), se predefinieron las variables (tasa de crecimiento relativo de la población) y relaciones de interés para el dominio de investigación del problema (relación entre la tasa de crecimiento relativa y la cantidad de individuos de la población, tabla 1), *i.e., la sistematización* y se proveyeron fórmulas (ecuaciones (1) y (2), tabla 1), *i.e., parte de la matematización*, lo que permitiría acercarse al modelo propuesto.

Descripción de la tarea

El área de investigación propuesta corresponde a dinámica de poblaciones, uno de los principales objetos de estudio de la biología matemática. Como el problema se formula matemáticamente a partir de un modelo discreto para una sola variable (ecuación (1), tabla 1), en este caso, el dominio se enmarca en el campo del análisis real. Queda a cargo del estudiante establecer el sistema o modelo matemático, *i.e.*, la parte final de la matematización, la cual es guiada a lo largo del enunciado hasta llegar a la pregunta 3. En este caso, la fórmula para el modelo se obtiene haciendo uso de ambos supuestos, principalmente guiado del primero (H1, tabla 1), solicitando al estudiante estimar previamente la tasa de crecimiento relativo promedio (pregunta 2, tabla 1), constituyendo un cálculo preliminar para establecer el modelo, teniendo en cuenta que esta variable es constante e igual a su media (pregunta 3, tabla 1). A continuación, la tarea propone el cálculo de estimaciones de la población (pregunta 4, tabla 1), etapa de análisis matemático que conduce a los resultados del modelo, para luego interpretar/evaluar los resultados por medio del error relativo promedio con el fin de asesorar la validez del modelo en forma cuantitativa, estableciendo márgenes de precisión en los cálculos predictivos que demanda la tarea (pregunta 5, tabla 1). Para lo anterior, el enunciado provee una tabla de datos de la población chilena medida en los censos a lo largo del periodo 1907-2017, extraído del sitio web del Instituto Nacional de Estadística. Cabe señalar que los datos, como una de las islas centrales del ciclo de Blomhøj (ver Fig. 2), pueden provenir de la tarea de modelización o no, pudiendo ser utilizados en las etapas de sistematización y matematización, tanto para la construcción como para la validación del modelo. En este sentido, una eventual tarea cuyo objetivo sería la formulación del mismo problema, con un dominio de investigación a precisar, debería guiar las características de la realidad percibida para ser modelizada, sistematizada, y matematizada. Esto podría lograrse, por ejemplo, a través de un gráfico (semilogarítmico) de los datos, lo cual permitiría visualizar el crecimiento de la población y obtener a partir de ahí el modelo.

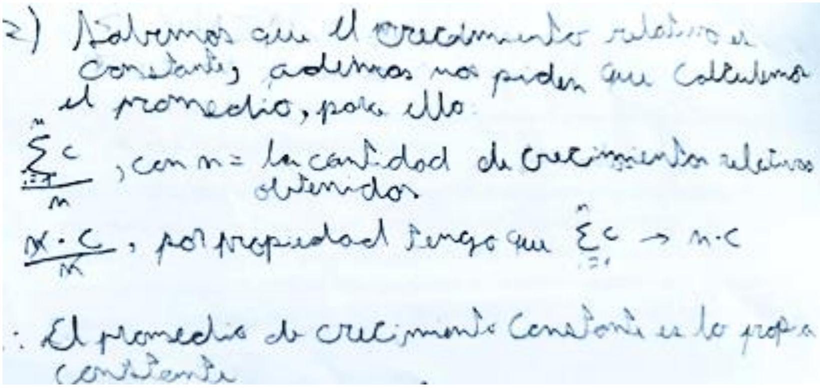
Análisis de la resolución de la tarea

Los estudiantes respondieron correctamente a las preguntas 1 y 2, pero notamos dificultad para concretar una fórmula para el modelo en la pregunta 3 (ecuaciones (1)-(2) combinadas con el supuesto H1 y con el enunciado de la pregunta 3, ver tabla 1). Lo anterior, podría deberse a una confusión con el supuesto H1 con la realidad, *i.e.*, en lugar de calcular las tasas de crecimiento relativo en cada periodo (pregunta 1), sólo la calcularon en el primero o en alguno posterior y se limitaron a decir que, dado que permanecía constante, el valor de esta era igual a la que calcularon, ya sea en el periodo $k=1$ o $k=k_0$

, para algún k_0 fijo, a partir de lo cual los resultados del modelo no concuerdan con los datos reales. De hecho, la mayoría de los estudiantes (23 de 31) supusieron erróneamente que $r_k = r_{k_0}$ en lugar de $r_k = r$, denotando explícitamente que $r_k = c$, donde c es el valor de la tasa de crecimiento relativo en algún periodo fijo, k_0, elegido arbitrariamente. Un caso particular que presenta este error se muestra en la figura 3.

Figura 3

Confusión del supuesto H1 con valores reales de tasa de crecimiento



Este tipo de errores era previsible, dada la inexperiencia de los estudiantes en este tipo de tareas y, sobre todo, por la alta demanda cognitiva de la tarea, la cual constituye un problema real de investigación.

Como anunciamos en la metodología, centramos los análisis en las respuestas de Juan, las cuales representan a la parte de los estudiantes que respondieron adecuadamente; ver Figuras 4-5.

Análisis e interpretación

Las preguntas 1 y 2 (Figura 5) exigen un gran margen de maniobra, pues se deben calcular las tasas de crecimiento relativo r_k, junto a su promedio r. Esto se debería a una participación semiótica latente, en el sentido de tener que comprender los conceptos involucrados en estas notaciones, lo cual podría considerarse un conector entre las teorías de Blomhøj y ETM, ya que la realidad es idealizada mediante variables o signos en la etapa de sistematización. A partir de las respuestas a las preguntas 1 y 2, inferimos una activación de la génesis semiótica, dado que es necesario interpretar el significado de los signos algebraicos r y r_k. Además, se activa la génesis instrumental con el fin de construir y visualizar los conceptos que representan (tasas de crecimiento relativo y su promedio). Es decir, hubo una de circulación en el plano vertical Sem-Ins, con el fin de configurar la conceptualización y comprensión de las nociones involucradas a través de la tabulación numérica de sus valores, sin necesariamente un objetivo de validación, así como también explicar e identificar las componentes a través de la mencionada representación semiótica. Las respuestas se posicionan en el paradigma AG, ya que involucran un trabajo de tipo perceptivo basado en la tabulación numérica, lo cual apoya la comprensión de los conceptos y permite interpretaciones basadas en el mundo real, conectando así el modelo con la realidad del problema estudiado. El análisis anterior evidencia una conexión entre la circulación, a través del plano vertical Sem-Ins en el ETM, con las etapas de sistematización y matematización del ciclo de Blomhøj.

Figura 4

Respuesta de Juan a la pregunta 1.

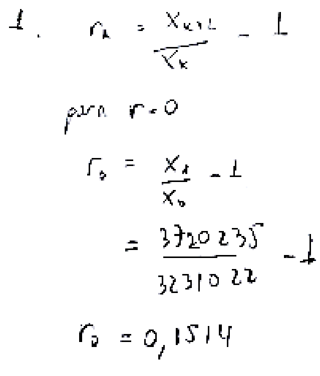
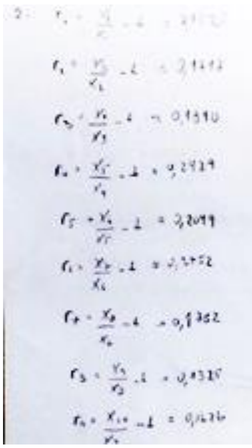


Figura 5

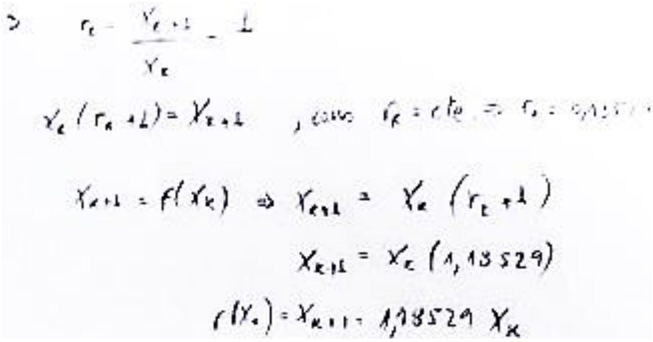
Respuesta de Juan a las preguntas 1 y 2.



A pesar de la dificultad de la tarea y de que la mayoría de los estudiantes no llegó a la respuesta correcta, el grupo que representa Juan logró responder a lo solicitado; ver Figura 6.

Figura 6

Respuesta de Juan en el ítem 3

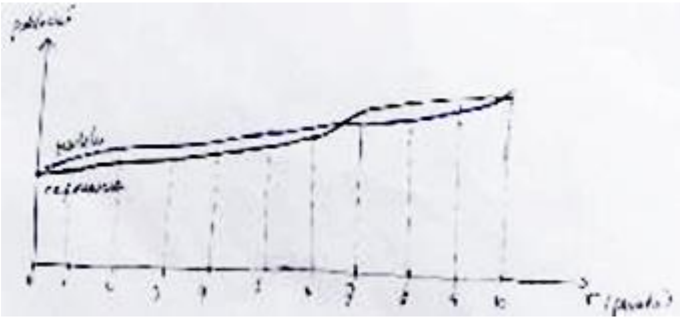


Pensamos que el hecho de que la tarea fuera guiada, a lo largo del enunciado hasta la pregunta 3, permitió una mejor comprensión de este grupo de estudiantes que logró obtener el modelo. Particularmente, la pregunta 3 invita al estudiante a realizar un supuesto adicional, a saber, que la tasa de crecimiento relativa es constante e igual al promedio de dichas cantidades, previamente calculadas en base a los datos, lo cual conduce al modelo (ver Fig. 6). Esto se podría interpretar como una posible conexión entre el conocimiento teórico o referencial, que es una componente del plano epistemológico del ETM (Fig. 1), con los datos y teoría concernientes al dominio de investigación, que están en el centro del ciclo de modelización de Blomhøj (Fig. 2). En efecto, en la pregunta 3, el estudiante tendría que descifrar un supuesto teórico del dominio de investigación del problema real y traducirlo en términos de trabajo matemático, posicionado en el paradigma AG, activando circulaciones en el plano vertical Sem-Ins, con el fin de lograr la interpretación y construcción del supuesto mencionado para lograr matematizarlo.

Posteriormente, el estudiante calcula las estimaciones solicitadas en la pregunta 4, presentando una tabulación de los valores de los tamaños de la población calculados a partir del modelo. Adicionalmente, a pesar de que no se le pedía, esboza un gráfico a mano alzada, considerado como un artefacto instrumental, enfatizando nuevamente un razonamiento en el plano vertical Sem-Ins, con un trabajo localizado en el paradigma AG, ya que se propicia la construcción hacia la visualización e interpretación de los resultados. Si bien es cierto el gráfico no proporciona una visualización ideal, esta es una buena aproximación, ya que se logra apreciar que las curvas de crecimiento real y simulado están relativamente cercanas la una de la otra (ver Figura 7), dando sentido y utilidad a la aplicación del modelo.

Figura 7

Estimaciones de la población en base al modelo

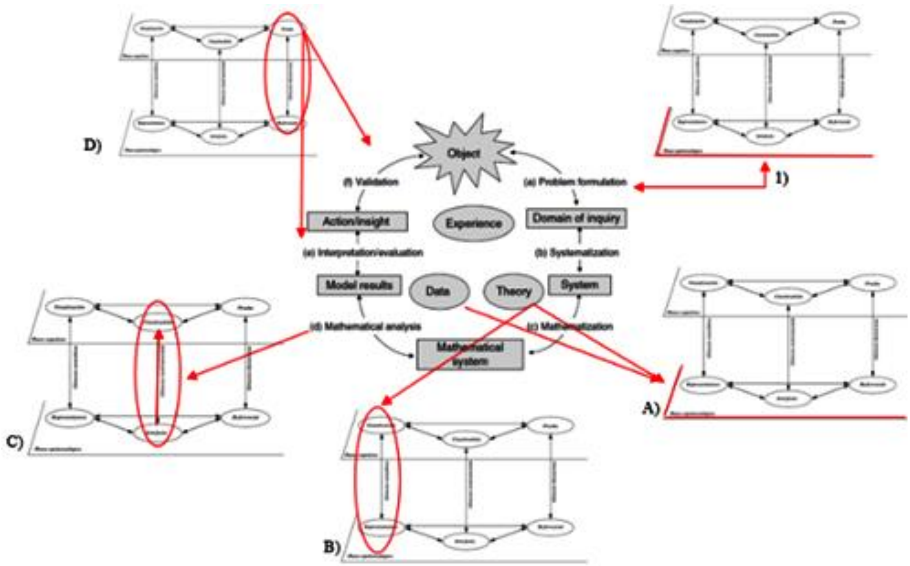


Los cálculos de la pregunta 4 constituyen parte importante del análisis matemático del ciclo de Blomhøj, aspecto que consideramos fundamental para conectar el mundo real con el trabajo matemático del estudiante, *i.e.*, con su ETM personal. Esta conexión permite, a su vez, establecer que la población se duplicará en cuatro décadas más aproximadamente, lo que constituye una inferencia en base a los resultados, otro aspecto importante del ciclo.

En relación al plano epistemológico, se utilizan diversos representámenes o registros de representación semiótica (tabla de datos, formulación de los supuestos, variables y fórmula general del modelo); se utiliza además calculadora (artefacto); el ETM de referencia se enmarca dentro del análisis real, a través de un trabajo matemático basado en cálculos de tipo aritmético (ver Figuras 3-7) para la obtención de los resultados, junto a posibles validaciones exploratorias basadas en registros gráficos-aritméticos, dado que se graficarían y tabularían los valores del modelo. Por otro lado, se calculan los errores relativos de aproximación del modelo con respecto a los datos, también a modo de validación exploratoria (etapa de interpretación/evaluación y validación del modelo) y se determinan predicciones en base al modelo (acción-visión). En resumen, a lo largo de las respuestas del estudiante, se identifica un trabajo posicionado en el paradigma AG, con un razonamiento en el plano vertical Sem-Ins, dado que se favorecen interpretaciones a través de un trabajo instrumentado a partir de registros gráficos-numéricos.

Figura 8

Conexión entre el ciclo de Blomhøj y el ETM.



En relación al plano cognitivo, el estudiante debió desarrollar la visualización y construcción para interpretar y descifrar los signos, y así lograr estructurar internamente la información proveída, particularmente la representación de los objetos (fórmula de recurrencia del modelo, tasa de crecimiento relativo, tamaño de la población) y relaciones involucradas (fórmula general del modelo y de la tasa de crecimiento relativo), con el fin de lograr la obtención de una fórmula para el modelo discreto exponencial (matematización y obtención del sistema matemático). Adicionalmente, el estudiante debió desarrollar la construcción para calcular las estimaciones/resultados en base en el modelo (análisis matemático), *i.e.*, el estudiante activa un razonamiento en el plano vertical Sem-Ins, como se mencionó anteriormente. Finalmente, el desarrollo teórico es ineludible, dada la teoría existente detrás del modelo, ya que a pesar de que no se aplica un razonamiento deductivo para la obtención de su solución analítica ni de su comportamiento asintótico a largo plazo (convergencia/divergencia de la solución del modelo), al dar respuesta a la predicción del tiempo de duplicación del tamaño de la población, se podría considerar como una prueba experimental del comportamiento a largo plazo, lo cual aporta a la comprensión de la dinámica de la población. En este sentido, se puede observar la interacción que posee lo anterior en el tránsito por ciclo, particularmente a través de la interpretación/evaluación y validación.

Para resumir, en base a la figura 8, tenemos que:

1 La formulación del problema podría desarrollar el trabajo matemático, pues considera los datos y la teoría, ubicados al centro del ciclo de Blomhøj.

A Los datos (centro del ciclo) y referencial tienen una conexión con el plano epistemológico del ETM. Por medio de la matematización, se puede conectar con el plano cognitivo.

B La noción involucrada es un posible conector con el representamen y visualización.

C Del análisis de datos (centro del ciclo de Blomhøj), se activa la génesis instrumental.

D Desde la prueba (pragmática) en el sentido de Balacheff, realizada por el estudiante, se daría paso a la interpretación y validación, pudiendo conectar al ciclo de Blomhøj por esta vía.

Consideramos a A) y 1) (ver figura 1), dos posibles conexiones entre el ciclo de Blomhøj y el ETM, en donde se puede desarrollar el trabajo matemático de un estudiante, para luego volver a conectarse al ciclo de Blomhøj en D).

Se observa que C) posee posibles similitudes con d) del ciclo de Blomhøj, puesto que, al activarse la génesis instrumental, se está desarrollando un análisis matemático, como se puede observar en la tabla realizada por Juan, la cual es utilizada como artefacto instrumental (ver Figura 7), para luego apoyarse de esta en la construcción del gráfico.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos planteado la posibilidad de complementar la teoría ETM con el ciclo de modelización de Blomhøj, lo que fue realizado con la identificación de las conexiones de ambos marcos teóricos, investigación que apunta en la dirección de ampliar la discusión de modelizar desde el ETM. Con el fin de someter a prueba esta intersección, diseñamos una tarea de modelización basada en un problema real, aspecto deseable en el último simposio sobre el trabajo matemático ETM6. Dada la alta demanda cognitiva en su resolución, el diseño de la tarea consideró un enunciado por medio de distintas preguntas que abarcó la formulación, sistematización, y parte de la matematización del problema.

El análisis de la resolución de la tarea evidenció que algunos estudiantes presentaron dificultad. Preliminarmente, esto se debería a que ellos no están habituados a trabajar con modelos en la universidad y dada la dificultad intrínseca del problema. De hecho, la dificultad más importante es que confundieron la realidad con la matemática, lo cual induciría a pensar que es necesario distinguir adecuadamente entre los datos y la matematización. Sin embargo, el análisis muestra también que una parte de los estudiantes fueron capaces de desarrollar el modelo matemático, lo cual es concordante con el diseño de la tarea, que fue guiada considerando los aspectos antes mencionados.

En relación a la intersección del ciclo de Blomhøj con el ETM, se ha podido observar que se favorecen ciertas circulaciones a través del trabajo matemático entre diversos componentes del plano epistemológico y cognitivo (representamen-visualización, artefactos-construcción), desarrollando fundamentalmente un razonamiento en el plano vertical Sem-Ins, proporcionado por el enfoque exploratorio mediante la interpretación, construcción y validación de los supuestos y resultados del modelo, propiciando un trabajo posicionado en el paradigma AG, o sea, un trabajo de tipo perceptivo basado en los enfoques mencionados. Lo anterior se podría deber al diseño de la tarea, que no consideró realizar demostraciones ni usar reglas de cálculo analíticas, lo que habría conducido a un trabajo ubicado en los otros paradigmas del análisis real y al desarrollo de razonamiento en los otros planos verticales del ETM.

Uno de los principales aportes de la presente investigación, es que los resultados sugieren que el ciclo de Blomhøj presentaría conexiones teóricas con el ETM. La primera sería desde la formulación del problema real, ya que este proceso conduce a tener que escoger el campo dentro de las matemáticas donde se va a enmarcar el problema, visualizando inicios de una eventual matematización que no sólo es remitida en un entorno puramente matemático, sino que afecta a la realidad. Esto podría ser una primera entrada al ETM mediante el referencial, que debe ser escogido a través de este proceso. La sistematización produciría una conexión directa con el ETM, dado que conduce a la selección de objetos relevantes, relaciones, e idealización para hacer la representación matemática, la cual se haría explícita en esta etapa. Todo el resto de los procesos del ciclo están directamente relacionados al ETM (matematización, análisis matemático, interpretación/evaluación y validación). Por otro lado, creemos que las islas centrales en el ciclo de Blomhøj (datos, experiencia y teoría) tienen estrecha relación con el ETM, ya que estos aspectos podrían contribuir al trabajo matemático para establecer o validar el modelo.

Finalmente, consideramos que los paradigmas de trabajo en este caso, relativos al campo matemático subyacente, comienzan a evidenciarse a partir del proceso de matematización, ya que es donde se hace más explícito el referencial, aunque no podemos descartar que, dependiendo el problema, éstos pudieran manifestarse desde antes, específicamente cuando se formula el problema, mediante supuestos y variables matemáticas. En este sentido, para abordar el problema propuesto, ha sido necesario tomar algunas decisiones sobre las variables a considerar. En términos de Blomhøj (2003), esto se relaciona con la selección de los objetos relevantes e idealización de las variables para hacer posible una representación matemática. Precisamente, en la elección e idealización de las variables, creemos que se produciría la relación con el ETM, específicamente, desde la sistematización, y posiblemente desde la formulación, ya que, como mencionado, estaríamos escogiendo el campo matemático donde se formula el modelo.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo de J. Huincahue fue apoyado por Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, FONDECYT Iniciación 2020, número 11201103 de ANID, Chile. El trabajo de P. Verdugo-Hernández fue apoyado por Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, FONDECYT Iniciación 2023, número 11230240 de ANID, Chile. El trabajo de P. Cumsille fue apoyado por el Centro de Biotecnología y Bioingeniería (CeBiB), fondo número FB-01 del PIA-ANID, Chile.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

PVH y JHA han contribuido como expertos en los marcos teóricos ETM y modelización. PCA ha contribuido a la toma de datos y es creador de la tarea de modelación. PVH conceptualizó los análisis, la escritura, revisión y edición del manuscrito original y coordinó el grupo de investigación. Todos los autores han participado activamente en la discusión de los resultados y en las conclusiones, aprobando conjuntamente la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respalden los resultados de este estudio serán proporcionados por la autora correspondiente, PVH, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelización. Matemática Educativa*. Gedisa.

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 797–810.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2009). Networking of theories – an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers, first volume of the monograph series of the journal ZDM-The International Journal on Mathematics Education*.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. In B. Clarke, D. Clark, D. Lambdin, F. Lester, G Emanuelsson, B. Johansson, A. Walbym y K. Walby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145–160). Gothenburg University.

Blomhøj, M. (2020). Characterising modelling competency in students' projects: Experiences from a natural science bachelor program. In G. A. Stillman, G. Kaiser, & C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical modelling education and sense-making* (pp. 395–406). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_34

Blomhøj, M. (2013). The use of theory in the practice of teaching mathematical modelling – experiences from a developmental project. En A. Mendoza, A. Vázquez (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp.125–152). Lectorum.

Blomhøj, M. (2021). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista De Educación Matemática*, *23*(2), 20–35.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling – A Theory for Practice. In B. Clarke *et al*. (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145–159). National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M. y Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, *22*(3), 123–139.

Blomhøj, M., y Kjeldsen, T.H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM –The International Journal on Mathematics Education*, *38*, 163–177. https://doi.org/10.1007/BF02655887

Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. En G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz & E. Schneider (Ed.), *Trends und Perspektiven* (pp. 15–38). HölderPichler-Tempsky.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. *et al*. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (pp. 222–231). Horwood.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95.

Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95

Borromeo-Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantzi y Philippou (Eds.), *CERME 5-Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2080-2089). University of Cyprus.

Burns, N. Grove S. (2004). *Investigación en enfermería*. (3ª Ed). Elsevier.

Cabassut R., Ferrando I. (2017). Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration. En Stillman G., Blum W., Kaiser G. (eds), *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 618–647). Springer.

Castela, C. (2021). *Reflexiones sobre la multiplicidad de las teorías en didáctica de las matemáticas*. hal-03199465. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03199465/document

Compendio Estadístico. (2018). *Compendio Estadístico INE*. Instituto Nacional de Estadísticas.

Cosmes, S. (2018). *La modelización en el espacio de trabajo matemático del estudiante de ingeniería*. En Serna, Luis Arturo; Páges, Daniela (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 431–437). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cosmes, S. y Montoya-Delgadillo, E. (2021). Understanding Links Between Mathematics and Engineering Through Mathematical Modelling—The Case of Training Civil Engineers in a Course of Structural Analysis. En Leung, F.K.S., Stillman, G.A., Kaiser, G., Wong, K.L. (eds), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (527–538). Springer.

Coulange, L. (1998). Les problèmes « concrets » à « mettre en équation » dans l'enseignement. *Petit x*, *47*, 33–58.

Derouet, CH. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S.* Tesis Doctoral. Universidad de Paris Diderot (Paris 7), Francia. http://theses.md.univ-paris-diderot.fr/DEROUET_charlotte_2_va_20161125.pdf

Denzin, N. y Lincoln, Y., 2012, *Manual de investigación cualitativa*, Gedisa.

Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Method* (2.ª ed.). McGraw-Hill.

Doerr, H., Ärlebäck, J., y Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. In G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 71–82). Springer.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 1–22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Guerrero-Ortiz, C. y Henríquez-Rivas, C. (2018). El rol de las tareas y diferentes heurísticas de solución: una discusión entre modelización y ETM. En Montoya, E., Richard, P., Vivier, L., *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique*. (p. 545–560). Ediciones PUCV.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repère-Irem*, (36), 15–34.

Henry, M. (2001). *Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement, Autour de la modélisation en probabilités*. Commission inter-IREM Statistique et Probabilités.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: G. Graumann (Ed.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 66–84). Franzbecker.

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 553–561). Springer.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4.1), 17–26.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 861–874. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P. (2022). *Mathematical Work in Educational Context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.

Lagrange, J.-B. (2015). Functions in technological environments: from multi-representations to connected functional workspaces. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard. *Espacio de Trabajo Matemático: Actas Cuarto Simposio Internacional ETM* (p. 317–336). Universidad Complutense de Madrid.

Lagrange, J.-B. (2018). Connected working spaces: designing and evaluating modelling-based teaching situations. *PME*, pp. 1–25. http://jb.lagrange.free.fr/file/PME42jbl.pdf

Maier, H., y Beck, C. (2001). Zur Theoriebildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *22*(1), 29–50.

Montoya-Delgadillo, E. Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*, *17*(4-I), 181–197.

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *19*, 73-101.

Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces as an analyzing tool for the teaching and learning of calculus. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, (5), 1689–1699. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Montoya-Delgadillo, Richard, P., Vivier, L., Gómez-Chacón, M.I., Kuzniak, A., Maschietto, M., Tanguay, D. (2018). *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique*. (p.5–671). Ediciones PUCV.

Nechache, A. (2016). Comparaison de la demarche de la validation dans les spaces de travail idoines en geometrie et en probabilite. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard. *Espacio de Trabajo Matemático: Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*, (pp. 51–67). Universidad Complutense de Madrid.

Nechache, A. (2018). Le rôle des dimensions de l'ETM dans l'élaboration du travail mathématique dans de cadre de la résolution des tâches probabilistes. *Menon. Journal of Educational Research*, 4° thematic issue, 40–53.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 127–147.

Parzysz, B. (2014). Évolution du travail mathématique dans l'enseignement des probabilités en france depuis 1980. In I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, P. Richard (Eds.), *Actas Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp. 39–50). Universidad Complutense de Madrid.

Peirce, CH. (1990). Aproximación a la semiótica de Charles S. Peirce. *Acciones – Revista de la teoría del análisis*.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 165-178.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 317–327.

Rauscher, J-C.; Adjiage, R. (2014). Espaces de travail et resolution d'un problème de modélisation. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 41-64.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* Cengage. Sexta edición revisada y traducida.

Yin, R.K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6e ed.). Sage.