

Elementos para el diseño de un experimento de enseñanza para profesores de matemáticas en carreras de ingeniería

Patricia Vásquez Saldías^a 

Jaime Mena Lorca^a 

Elisabeth Ramos-Rodríguez^a 

^a Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Recibido para publicación 30 abr. 2022. Aceptado tras revisión 23 mayo 2022

Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Una de las tareas más relevantes de la Educación Matemática es el desarrollo profesional docente, DPD, de los profesores de matemáticas. En educación superior se evidencia que el tipo de docencia en cursos de matemática para ingeniería no se ha transformado a pesar de los cambios que ha tenido el currículo. **Objetivo:** mostrar la etapa de diseño de un experimento de enseñanza en relación con programas de desarrollo profesional para profesores de matemáticas de educación superior que imparten docencia en carreras de ingeniería, creado a la luz de principios que guían dichos perfeccionamientos efectivos. **Diseño:** Mediante un enfoque cualitativo, se escoge la Investigación Basada en el Diseño, con propósito de diseñar un programa DPD para profesores universitarios que realizan clases de matemáticas en una Facultad de Ingeniería, cuya capacitación apuntó a los docentes de Ciencias Básicas y Matemáticas para Ingeniería atendiendo a los cambios que requiere la enseñanza del Siglo XXI. **Entorno y participantes:** Con los ocho principios de programas de DPD efectivos y el proceso ALACT se planifican ciclos de reflexión para la capacitación de docentes universitarios. **Recopilación y análisis de datos:** Se diseña un experimento de enseñanza para DPD efectivos, este diseño considera situaciones creadas por los expertos, así como las que presentan los profesores participantes. **Resultados:** Las situaciones que los participantes enfrenten, les permitirá disponer para su docencia de una serie de problemas, con sus justificaciones en el campo de la didáctica de la matemática. **Conclusiones:** Las diferentes etapas del ciclo de reflexión ALACT permite a los expertos instalar la reflexión en los docentes participantes del experimento, una de las principales dificultades fue contar con problemáticas del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal que provengan de los participantes.

Palabras clave: desarrollo profesional docente, programas efectivos,

Autor para correspondencia: Patricia Inés Vásquez. Email: patricia.vasquez@pucv.cl

modelación en la enseñanza, reflexión de la práctica, profundización en los conocimientos.

Elements for the design of a teaching experiment for mathematics teachers in engineering careers

ABSTRACT

Context: One of the most relevant tasks of Mathematics Education is the teaching professional development, DPD, of mathematics teachers. In higher education, it is evident that the type of teaching in mathematics courses for engineering has not been transformed despite the changes that the curriculum has undergone. **Objective:** to show the design stage of a teaching experiment in relation to professional development programs for higher education mathematics teachers who teach engineering careers, created in light of the principles that guide such effective improvements. **Design:** Through a qualitative approach, Research Based on Design is chosen, with the purpose of designing a DPD program for university professors who teach mathematics in a Faculty of Engineering, whose training aimed at teachers of Basic Sciences and Mathematics for Engineering. attending to the changes required by the teaching of the 21st century. **Environment and participants:** With the eight principles of effective PD programs and the ALaCT process, cycles of reflection are planned for the training of university teachers. **Data collection and analysis:** A teaching experiment for effective DPD is designed, this design considers situations created by the experts, as well as those presented by the participating teachers. **Results:** The situations that the participants face will allow them to have a series of problems for their teaching, with their justifications in the field of mathematics didactics. **Conclusions:** The different stages of the ALaCT reflection cycle allow the experts to install the reflection in the teachers participating in the experiment, one of the main difficulties was having problems of the linear algebra teaching-learning process that come from the participants.

Keywords: professional development, effective program, modeling in teaching, reflection on teaching practice, deepening of knowledge.

Experiência de ensino para professores de matemática em carreiras de engenharia com base em evidências de didática de matemática e desenvolvimento profissional

RESUMO

Contexto: Uma das tarefas mais relevantes da Educação Matemática é o desenvolvimento profissional docente, DPD, de professores de matemática. No ensino superior, fica evidente que o tipo de ensino nos cursos de matemática para engenharia não se transformou apesar das mudanças que o currículo passou. **Objetivo:** mostrar a etapa de projeto de um experimento de ensino em relação a programas de desenvolvimento profissional para professores de matemática do ensino superior que lecionam carreiras de engenharia, criado à luz dos princípios que orientam tais melhorias efetivas. **Design:** Através de uma abordagem qualitativa, a Pesquisa Baseada em Design é escolhida, com o objetivo de projetar um programa de DPD para professores universitários que lecionam matemática em uma Faculdade de Engenharia, cuja formação é voltada para professores de Ciências Básicas e Matemática para Engenharia. mudanças exigidas pelo ensino do século XXI. **Ambiente e participantes:** Com os oito princípios de programas de DP eficazes e o processo ALaCT, estão previstos ciclos de reflexão para a formação de professores universitários. **Coleta e análise de dados:** É projetado um experimento de ensino para DPD eficaz, este projeto considera situações criadas pelos especialistas, bem como aquelas apresentadas pelos professores participantes. **Resultados:** As situações que os participantes enfrentam permitirão que eles tenham uma série de problemas para o seu ensino, com suas justificativas no campo da didática da matemática. **Conclusões:** As diferentes etapas do ciclo de reflexão ALaCT permitem que os especialistas instalem a reflexão nos professores participantes do experimento, uma das principais dificuldades foi ter problemas do processo de ensino-aprendizagem de álgebra linear que vêm dos participantes.

Palavras-chave: desenvolvimento profissional docente, programas eficazes, modelagem no ensino, reflexão sobre a prática, aprofundamento do conhecimento.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo profesional docente (DPD) se concibe como un proceso de aprendizaje y crecimiento continuo y personal, en el que participa el docente por propia voluntad, adquiriendo gradualmente confianza, habilidades y autonomía para mejorar su práctica de manera de abordar los desafíos de aprendizaje de los estudiantes y profundización en sus conocimientos — disciplinares o en la didáctica de la disciplina— (Avalos 2011; Bautista y Ortega-Ruíz, 2015; Mizwell, 2010). Esto naturalmente se logra en un trabajo

colaborativo entre pares, en procesos de reflexión, individual o colectiva, de participación voluntaria (Korthagen y Vasalos, 2009). Este parte en la formación inicial para avanzar y culminar en la formación continua.

En el DPD, el profesor está inserto en procesos de revisión de su propia práctica (Ponte y Chapman, 2008) en donde los programas de formación en los que se involucra, juegan un rol relevante a la hora de evolucionar, de definir el momento y nivel en el que se encuentra (Ramos-Rodriguez, 2014). Estas propuestas formativas “deben ofrecer oportunidades de desarrollo profesional a los profesores y motivarlos a desarrollar los conocimientos, habilidades y disposiciones que necesitan para enseñar bien las matemáticas” (Swoder, 2007, p. 160-161). Los cambios en las prácticas de los docentes, que derivan de los programas de DPD en los que se involucran, dependen, en gran medida, de las oportunidades que estos ofrecen para construir (o reconstruir) el conocimiento que poseen en relación a los contenidos disciplinarios, didácticos y pedagógicos, en un contexto que apoya y fomenta salir de la zona de confort (toma de riesgos) y el acto de reflexionar (Swoder, 2007), más aún si los nuevos conocimientos son valorados.

Esto incita contar con programas efectivos de DPD, aquellos que se definen según la mejora de la práctica del docente involucrado en este y del aprendizaje de los estudiantes de dichos profesores (Desimane y Pak, 2017; Montecinos, 2003; Timperley, Wilson, Barrar y Fung, 2007). Las características que subyacen a dichos programas ofrecen oportunidades para enfrentar de mejor forma la formación continua de profesores.

Hay una vasta gama de investigaciones que se han centrado en identificar principios o elementos constitutivos de programas efectivos de DPD (Bautista y Ortega-Ruíz, 2015; Blank y de las Alas, 2009; Cockcroft, 1982; Guskey 2003; Desimone y Pak, 2017; González-Weil et al., 2014; McNeill y Krajcik, 2008, entre otros), en estos estudios se repite el trabajo colaborativo y la reflexión entre pares (Korthagen y Vasalos, 2009).

Concebir un programa efectivo de DPD es un ejercicio de creatividad que necesita tener en cuenta una diversidad de información sobre el contexto y los participantes, como el grado de interés, la cultura del país, las necesidades locales (Martínez, 2009). Contar con capacitaciones efectivas para docentes universitarios de matemáticas, es una necesidad país que nosotros abordaremos con mayor propiedad al estar insertos y apoyados por un centro de investigación universitaria que desarrolla tanto la disciplina como la didáctica de ella.

En relación a cursos DPD en la formación continua de profesores de

educación superior en matemáticas, se evidencia que estos son escasos y los que existen no abordan contenidos específicos del currículo de matemáticas. Los cursos DPD deben promover procesos de instrumentalización (Trouche, 2018) para que el docente los integre en sus aulas de matemáticas, con el propósito de abordar cálculos matemáticos en procesos de modelación o simulaciones que son requeridos en la formación de ingenieros (Borromeo-Ferri, 2006), y en su desarrollo profesional futuro (Villa-Ochoa y Jaramillo, 2011).

Trejo et al. (2013) establecen una estrategia metodológica para la enseñanza de la matemática en ingeniería denominada fase Didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias, estrategia que necesita que los profesores se involucren en la carrera de ingeniería y que cuenten con conocimientos para resolver o modelar un problema, como los modelos que están insertos en el curso de álgebra lineal. Al respecto, destacamos el papel del álgebra lineal, asignatura cuyos contenidos permean las diferentes ramas de la matemática: cálculo diferencial e integral, cálculo en varias variables, análisis numérico o ecuaciones diferenciales y por lo tanto tienen un carácter unificador, en la formación de matemáticas en ingeniería (Dorier, 2000) a través, por ejemplo, de la aproximación lineal. En esta asignatura, los conceptos se suelen presentar de manera abstracta, lo que trae consigo dificultades tanto conceptuales —debido a la naturaleza de los temas que se abordan— como cognitivas —por el tipo de pensamiento que los estudiantes deben desarrollar para comprenderlas—. Estas se atribuyen a que estos conceptos se presentan en diferentes lenguajes: abstracto, algebraico y geométrico sin estar estos articulados (Dorier y Sierpinski, 2001).

El objetivo de este trabajo es mostrar la etapa de diseño de un experimento de enseñanza en relación a programas de desarrollo profesional para profesores de matemáticas de educación superior que imparten docencia en carreras de ingeniería, creado a la luz de principios que apuntan a la efectividad de dicho perfeccionamiento. En este trabajo usamos estas ideas centrales (los principios) para el diseño de un programa de DPD con uso de tecnología orientado a la formación continua de docentes universitarios de matemáticas que atienden carreras de Ingeniería, considerando para una implementación piloto, un grupo de profesores con al menos 7 años de experiencia de docencia universitaria. Este estudio no está focalizado en acrecentar los conocimientos matemáticos de los docentes, sino que su foco está en la creación y estudio de tareas apropiadas para el desarrollo de competencias en la enseñanza del contenido y comprensión de modelos matemáticos de la ingeniería, trastocando así la forma tradicional de la

enseñanza de la matemática en nuestra universidad, dado que se hará énfasis del uso de tecnología.

Nos parece relevante mostrar la etapa de creación, considerando el detalle de los aspectos teóricos (principios) que sustentan los programas de DPD en la enseñanza superior y las especificaciones del programa creado a la luz de ellos.

Thurm y Bazel (2020), nos informan de un programa de Desarrollo Profesional, en términos de los que llaman Orientaciones para un Programa Efectivo, DPE, con uso de tecnología. Los autores atienden a la crítica frecuente a las publicaciones de desarrollo profesional efectivo, DPE, ya que describen de manera insuficiente el diseño y el contenido de los programas de desarrollo profesional en cuestión (Driskell et al. 2015; Sztajn et al. 2017; Goldsmith et al. 2014). El diseño del programa de desarrollo profesional, que ellos proponen, es en torno a cuatro módulos de seis horas cada uno y con un desfase de 2 meses entre ellos. El DPE aborda la enseñanza de las funciones como contenido, tanto en la experimentación por parte de los profesores, como en la creación de tareas para ser desarrollada con sus alumnos. Los dos primeros módulos abordan con ejemplos la introducción al uso eficaz de la tecnología para enseñar funciones, desarrollando así el sentido de mostrar y reflexionar de como la tecnología apoya al desarrollo de imágenes conceptuales y confección de un modelo. En los módulos posteriores (3 y 4) los profesores reflexionan sobre el rol de las situaciones planteadas en los primeros módulos para lograr diseñar tareas con tecnología para que estudiantes entiendan y desarrollen habilidades de modelación con tecnología. En un proceso guiado, los profesores diseñan tareas que permiten que sus estudiantes puedan profundizar conceptos, procedimientos tecnológicos y así desarrollar habilidades que podrán ser movilizadas a otras situaciones de modelación y comprensión de la matemática. En el módulo 4, los profesores crean (apoyados en la experiencia personal) y analizan las situaciones que podrían ser abordadas por sus estudiantes y reflexionan sobre la relación entre la Evaluación y documentación que requiere una enseñanza con tecnología.

En los cursos que aborden la problemática del uso de recursos tecnológicos, uno de los productos es que los profesores acrecientan sus recursos bibliográficos, estos ya no se reducen a los que se encuentran en la clásica biblioteca, si no que abre la biblioteca universal que incluye software específicos para las distintos contenidos matemáticos, así como ejemplos y temas ligados a las distintas disciplinas propias de la línea de formación en ingeniería, arquitectura, economía entre otras (Kayali y Biza, 2021).

Para el desarrollo efectivo de un DPD, es primordial tener información sobre las creencias de los participantes y de los líderes identificados. Por ejemplo, los coordinadores de grupos de cursos (que en general son asignados por sus características de liderazgo entre sus pares).

En el trabajo de Thurm y Barzel (2020) se identifican tres tipos de creencias relacionadas con el uso de tecnologías: creencias epistemológicas, creencias de autoeficacia y creencias sobre la enseñanza con tecnología. El DPD debería acrecentar las creencias de que los cálculos matemáticos deberían ser ejecutados con tecnología, de que la tecnología apoya el aprendizaje por descubrimiento y de que admite múltiples representaciones. De esta forma, si bien es cierto, se requiere tiempo para promover y potenciar el uso de tecnología en los estudiantes, esta inversión se proyecta en el tiempo y en el uso apropiado por parte de ellos, especialmente en cursos de álgebra lineal, de cálculo en una o más variables y en los de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, en donde muchos procesos se logran complejizar y entender con el uso de software apropiados. De esta forma, en clases se pueden abordar situaciones de modelización o problemas propios de la carrera que están estudiando que utilizan la matemática y que los docentes han conocido en estas instancias de perfeccionamiento continuo.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El marco conceptual de este estudio se centra en el concepto de programas efectivos de DPD y los principios que lo sustentan. El estudio de propuestas formativas de DPD se puede realizar mirando los resultados de los alumnos de estos profesores o mirando la docencia que el profesor imparte (Ávalos, 2011). Es decir, un programa de DPD efectivo es aquel donde se cuenta con una relación entre este y la mejora de la práctica del docente y el aprendizaje de sus alumnos (Desimone y Pak, 2017; Montecinos, 2003; Timperley et al., 2007). Aquellos que son efectivos consideran que los profesores experimenten cumpliendo el rol de estudiantes como de docentes, de manera que puedan enfrentar las dificultades que cada uno de estos roles conlleva. En este sentido, es un proceso focalizado en el aprendizaje (Borko, 2004; Martínez, 2009).

Acercándose a la línea de la educación matemática, destaca un marco conceptual que permite abordar programas efectivos de DPD para profesores de Matemática y Ciencias propuesto por Desimone y Pak (2017). Este considera cinco características claves: enfoque en el contenido, aprendizaje

activo, coherencia, duración sostenida y participación colectiva. Bulger-Tamez (2017) al estudiar un proceso de DPD de profesores de matemática durante los años 2012 y 2017 en México, concluye que es posible integrar a la práctica el programa de DPD diseñado a gran escala. El autor menciona que aquellos programas integrados al contexto de trabajo del docente de matemática son más efectivos que aquellos tradicionales que se realizan en lugares distintos al lugar de trabajo. McCrary (2011) afirma que existe una relación entre la efectividad de un programa de DPD de profesores de matemáticas con las expectativas del formador frente a la capacitación misma. Por su parte, Akiba y Liang (2016) evidencian que las actividades colaborativas de DPD centradas en el profesor para aprender sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (colaboración docente y comunicación informal) parecen ser más efectivas para mejorar el rendimiento en matemáticas de los estudiantes que las actividades de aprendizaje que no necesariamente involucran tales oportunidades colaborativas centradas en el profesor.

Enfocándonos en la realidad chilena, tenemos que a nivel universitario y técnico profesional en general, la docencia de matemáticas la desarrollan licenciados en matemáticas, magister en matemáticas y en reducidos casos doctores, pues estos se centran su docencia en licenciatura, magísteres o doctorados en matemáticas. Este tipo de realidad está impulsada por procesos de acreditación de las universidades chilenas —hace casi dos décadas— que exigen los más altos estándares a los profesionales en la formación en matemática en las diferentes carreras. Las clases se dictan de manera tradicional, esto es, se exponen los contenidos y no se reflexiona sobre ellos o no se incluye su utilización (Santos y Tirado, 2019). Mas aún, en general no se usa tecnología en la enseñanza, en el sentido de ser un medio para generar conocimiento como se puede visualizar en profundidad en los trabajos de Barzel y Biehler (2020) y de Thurm y Barzel (2020).

Una de las razones que limitan los DPD con uso de tecnologías, son las creencias previas de los profesores, ya que, en general, no ven que el uso de tecnología requiere de mucho tiempo que se puede restar al proceso de desarrollo y manejo de operatoria que usualmente promueven los profesores, situación que fue abordada en el proyecto de Thurm y Barzel (2020).

Un trabajo cercano a este, centrado en el desarrollo de competencias relacionadas con los procesos de modelación, del uso de representaciones y la resolución de problemas a nivel de secundaria es el de Barzel y Biehler (2020). En este nos dan seis principios de diseño para proporcionar criterios de instancias de desarrollo profesional eficientes: la orientación a la competencia,

la orientación al participante, la cooperación estimulante, la relación con casos, el uso de varios formatos de instrucción y el fomento de la reflexión.

En estos estudios, el uso de tecnología es fundamental y su rol gira del típico uso para representar a uno que desarrolla competencia de uso y comprensión de contenidos matemáticos, inserto en procesos de modelación y resolución de problemas. Estos trabajos dan cuenta de la manera en que abordan el desarrollo de competencias de profesores del Centro Alemán para la formación de profesores de matemáticas, que dentro de sus objetivos está el de establecer nuevos estándares y prototipos para la profesionalización de los profesores de matemáticas.

Tal como los mencionan Barzel y Biehler (2020), una manera de abordar la calidad del proceso de DPD es a través de identificar principios que los guíen. Un principio permite fundamentar la acción en un contexto dado, en este caso, permite fundamentar acciones en torno al DPD del profesor de matemática. Como ya se mencionó, existe una variedad de estudios enfocados en identificar principios de programas de DPD efectivos. Este trabajo considera los principios de programas efectivos de DPD para profesores de matemáticas definidos por Ramos-Rodriguez, Fernández-Ahumada y Morales-Soto (2022), los que se detallan a continuación:

Principio 1: *Enseñanza para el aprendizaje*, debe centrarse en la mejora de las prácticas educativas en pro del aprendizaje de la matemática de los estudiantes.

Principio 2: *Foco en el conocimiento*, deben centrarse en el conocimiento especializado del profesor de matemática y una visión de para qué enseñar matemática y cuál es la enseñanza efectiva de ella.

Principio 3: *Indagación - reflexión*, requiere la presencia de la indagación continua de la propia práctica, promoviendo la reflexión sobre ella, sobre lo que aprenden y de cómo llevarlo a su aula.

Principio 4: *Vínculos externos*, debe proporcionar un equilibrio entre la matemática y el currículum, proveyendo de vínculos entre otros estamentos del sistema educativo, escuela, universidades y estudiantes/docentes, donde los líderes directivos ofrecen apoyo proactivo para el DPD.

Principio 5: *Tiempo*, involucra un tiempo suficiente para lograr

apropiación y cambio (en las creencias, por ejemplo) de los docentes.

Principio 6: *Comunidades de práctica*, debe centrarse en las comunidades de práctica a través del intercambio de opiniones y el trabajo colaborativo, en lugar de maestros individuales.

Principio 7: *Recogida de datos del aula*, debe contar con instancia de recogida de datos del aula, tener experimentación en el aula, investigación acción por ejemplo.

Principio 8: *Facilitación de expertos*, considera la participación de expertos (en lo posible sean parte de los formadores) que ayudan a modelar la enseñanza efectiva de la matemática, valorando la autoridad de la experiencia como fuente de aprendizaje profesional.

En la literatura relacionada al DPD, de una u otra forma, se refieren de manera parcial o directamente, a los ocho principios mencionados. Así, por ejemplo, en el estudio de Barzel y Biehler (2020), notamos que la metodología se centra en el contenido matemático, vía una experiencia personal y compartida con los participantes, lo que naturalmente se hace en un trabajo de indagación y reflexión colaborativa, este tipo de actividades, según la metodología planteada, permite compartir experiencias anteriores entre los profesores, lo que es muy importante para tener una base de situación de enseñanza apropiada, pero sin duda este proceso se potencia superlativamente con la acción colaborativa de expertos ¹ en el área de la didáctica de la matemática, los que permiten guiar la discusión sobre las distintas formas de abordar el problema de enseñanza en términos de representación (Duval, 2004; Radford, 2014), del trabajo matemático (Kuzniak y Richard, 2014), cognitivos (Arnon et al, 2014; Sierpinska, 2000), las diferentes perspectivas de modelación (Frejd y Bergsten, 2016), ideas basales de los diferentes marcos teóricos (o teorías), que permiten analizar las tareas exitosas y el desarrollo de génesis instrumental (Trouche et al., 2020), lo que proporciona en el proceso reflexivo una dinámica de trabajo para perfeccionar y acrecentar la gama de ejercicios o problemas y el uso adecuado de software que, por sus continuos cambios, podrían alterar el elemento didáctico clave de la situación original, produciendo así un proceso de documentación errado.

¹ En este estudio se cuenta con el compromiso de participación de expertos en diferentes áreas, que sustentan el doctorado y magister en didáctica de la misma institución.

METODOLOGÍA

El paradigma del estudio es cualitativo, donde es necesario escoger una metodología de investigación que permita sistematizar la creación, implementación y análisis de programas de DPD, resaltando la importancia de mostrar la realidad lo más fielmente posible, con la complejidad que la práctica formativa de profesores de matemática implica (Plomp, 2010) y que permita avanzar hacia principios para programas efectivos de DPD para profesores universitarios. Se escoge la Investigación basada en el Diseño o Investigación de Diseño (Nieveen, 2010), pues supone un estudio durante la práctica (el programa de DPD) que corresponde a nuestro caso, respetando las condiciones reales en que se realiza la enseñanza, los programas de DPD, plantear una sistematicidad que facilita estudiar los principios de propuestas formativas efectivas de DPD, mirando cómo se articula la teoría con la práctica en los mecanismos de formación, y, sin intención de realzar el programa, si no que examinar qué cualidades aporta a la finalidad del mismo, en este caso, diseñar un curso bajo el alero de principios para programas efectivos de DPD. Este estudio es una Investigación de Diseño de tipo educativa aplicada, pues se busca una solución alternativa, una posibilidad de resolución de un problema educativo (sobre programas efectivos de DPD para profesores de matemática de enseñanza superior) en el campo de la práctica pedagógica.

Plomp (2010) la describe como un proceso que conlleva tres etapas:

Fase preliminar: estudio desde fuentes mixtas (primarias y secundarias) indagando las necesidades y análisis del contexto, revisión de literatura, dando lugar a establecer principios teóricos para diseñar un programa de DPD efectivo para docentes de matemática.

Fase de prototipos (estudio piloto): se optimizan prototipos de intervención a través de un estudio piloto, el que incluye ciclos de diseño, evaluación formativa y revisión, siendo cada uno un micro ciclo de investigación.

Fase de evaluación: se concluye si la intervención cumple con las especificaciones predeterminadas (análisis retrospectivo). En esta fase se plasmarán recomendaciones para la mejora de la intervención en términos de los principios de programas de DPD efectivos, seguido del análisis de cómo se ponen en juego estos principios teóricos en el programa para establecer

coherencia y complementariedad entre la propuesta teórica y empírica. Además se analiza la relación entre el programa y la práctica de dos profesores y el aprendizaje de sus alumnos.

En la figura 1 se ilustra los elementos claves de las fases de la Investigación de Diseño resaltando aquellas que se materializan para este estudio (fase de prototipo).

Figura 1

Esquema metodológico del estudio.



Se debe tener presente que este estudio es parte de uno de mayor alcance en donde se continuará con las etapas siguientes del experimento de enseñanza.

RESULTADOS

Los resultados se plasman a partir de la descripción del curso para profesores de matemática universitarios en términos de los ocho principios que lo sustentan.

El programa formativo tiene como propósito “Fortalecer la formación de profesores de matemáticas universitarias en la adquisición de metodologías de enseñanza-aprendizaje activas con uso de tecnologías para la formación de ingenieros”.

El tiempo estimado para realizar el perfeccionamiento es de un semestre.

Los docentes que participarán del perfeccionamiento satisfacen las condiciones de selección:

1. Magísteres en matemáticas, han realizado docencia en ingeniería con al menos 7 años de experiencia, han dictado todos los cursos de las matemáticas en ingeniería que van desde Fundamentos de la matemática hasta Ecuaciones Diferenciales.
2. Los docentes participaron en reuniones donde se les informó y se discutió sobre la instancia de desarrollo profesional, aceptando su participación.
3. Durante los dos años de pandemia, donde solo se realizaron clases virtuales, estos docentes promovieron en sus estudiantes recursos tecnológicos y han hecho uso de software y aplicaciones en Álgebra Lineal.
4. Han utilizado el material de álgebra lineal que están alojadas en el Aula Virtual de la asignatura, a la que tienen acceso los docentes y alumnos del curso.

Lo anterior permitió identificar el liderazgo de uno de los participantes, el cual fue además estudiado y entrevistado especialmente para comprobar que sus creencias sobre el uso de tecnologías en la enseñanza eran las apropiadas según Thurm y Barzel (2020).

Se seleccionan cuatro expertos en matemáticas (investigadores en matemática de Chile, 2 de la institución y 2 externos), selección que tenía dos objetivos: analizar las evaluaciones efectuadas por los profesores en estudio durante un semestre de la pandemia y, determinar las creencias de estos mismos evaluadores siguiendo la metodología de Thurm y Barzel (2020), para identificar creencias sobre el uso de tecnología, las que fueron analizadas por tres expertos en didáctica de la matemática.

Lo anterior nos permite tener claridad sobre elementos gravitantes para el desarrollo regular del curso de desarrollo profesional que hemos planteado.

Por su parte, el curso se diseña bajo una metodología que incluye ciclos de reflexión, en particular se utilizará el ciclo ALaCT (Korthagen y Vasalos, 2009; Korthagen y Verkuy, 1987). La descripción de estas fases corresponden a:

1. **Acción:** es el punto de partida, la acción, que se caracteriza por estar sometido a procesos con un alto componente intuitivo o inconsciente. En el curso implica abordar situaciones de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal en su amplio espectro lo que hace que reflexione sobre la relevancia del contenido en el programa.
2. **Revisar la Acción:** enfatiza el análisis que se realiza sobre la acción desarrollada, se mira hacia atrás, se dedica la atención a la actuación que se ha realizado para iniciar un lento proceso de concienciación. En el curso significa que se hará el análisis de situación desarrollada, contrastando la visión de él con la de sus colegas en relación a las dificultades o aprendizajes de sus estudiantes, compartiendo experiencias.
3. **Tomar Conciencia de Aspectos Esenciales:** a tomar conciencia de manera verbalizada de aquellos aspectos concretos de su actuación que son más susceptibles de ser cambiados para la mejora. En la reflexión colectiva surgen ideas para perfeccionar la situación y/o ajustar los objetivos de esta, de acuerdo a sus alumnos y a los procesos de evaluación futura de la asignatura.
4. **Crear Métodos de Acción Alternativos:** el docente indaga de manera consciente, se buscan alternativas, se crean y se programan métodos de acción que mejoren lo anteriormente analizado sobre nuevas formas de acción dando solución a aquellos aspectos que problematizan la enseñanza. Planifica una nueva situación considerando las debilidades que emergen en el paso 3, propendiendo a conectar con los siguientes contenidos.
5. **Comprobar en una situación:** corresponde a la ejecución de los nuevos métodos desarrollados en el punto 4, se ensayarán y se evaluarán los resultados de manera tal que se complete un ciclo, que parta de la práctica y retorne a la práctica, habiendo pasado por las bases teóricas que fundamentan las decisiones, a partir de allí, se empieza un nuevo ciclo. Al plantear la siguiente situación el docente tiene la posibilidad de ejecutar la situación planificada en la etapa anterior y avanzar con los contenidos de una manera más sólida dado que tiene más información a partir del ciclo de reflexión.

El ciclo de reflexión considerado permitirá el desarrollo de los principios 1, 5, 6 y 7 de manera natural, pues la puesta en escena de esto ciclos tiene por objetivo que los docentes se centren en los aprendizajes de los estudiantes. La recogida de datos permite el estudio de las clases a partir de los videos de clases donde están las prácticas docentes, esto involucra tiempo en la constitución de una unidad de práctica en donde los docentes son observados y observantes en la práctica de sus pares, en este sentido ellos disponen de tiempo para mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

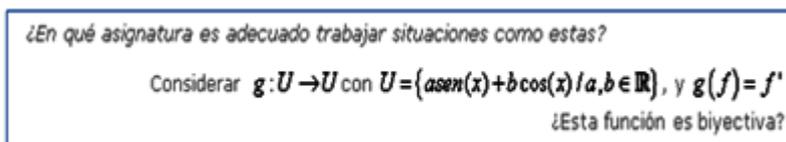
De manera natural los docentes parten de su conocimiento en la disciplina y de una práctica sin reflexión, desde el ciclo de reflexión que se pretende promover surgirán aspectos didácticos del contenido y propuestas para la modificación de sus prácticas para lograr mejores aprendizajes, abordando los principios 2 y 3. El proceso de reflexión se mediará por los expertos, quienes participarán en las distintas etapas, del ciclo ALaCT. Las tareas iniciales para la transposición son creadas por los expertos, a partir de su experiencia y lo que la literatura en didáctica de la matemática y de modelación indican, cubriendo de esta manera, como ya se dijo, la necesidad del nuevo currículo de matemáticas en ingeniería, logrando de esta manera el principio 4.

El programa del curso DPD se desarrolla con base en problemáticas que los docentes plantean o que son presentadas por los investigadores.

Uno de los ejemplos seleccionados para el curso, que ha sido confeccionado con el fin de experimentarlos con los participantes en el ciclo de reflexión, se encuentra en la figura 2 que analizamos más abajo.

Figura 2

Situación a experimentar con el ciclo de reflexión.



Nos parece necesario, indicar que lo interesante de este problema (Figura 2), es que el contenido puede ser de cálculo diferencial, álgebra lineal o de ecuaciones diferenciales, lo que permite mirar, en un amplio espectro, la

transposición didáctica, ver el rol del álgebra lineal en los otros contenidos y la manera en que se puede utilizar la tecnología.

Cabe mencionar, que esta situación puede ser abordada por los profesores independientemente de la asignatura que están dictando, y dado que el DPD se centra en tópicos del álgebra lineal obliga a que el problema sea abordado con esos contenidos y con su respectiva transposición. Es aquí donde los docentes reflexionarán en relación a los principios de *Concretización, Necesidad y Generalización*² de Harel (2000), que en general los docentes no los abordan muchas veces por desconocimiento de estos, ya que su preocupación no está en la enseñanza para el aprendizaje (principio 3), esto permite vincular el contenido con su transposición (Chevallard, 1997).

Para abordar el principio 4, *vínculos externos*, este curso DPD para profesores de matemáticas que hacen clases en ingeniería, ha considerado la reciente modificación curricular en las carreras de ingeniería de la universidad donde imparten docencia, situación que demanda que los docentes no tan solo entreguen el contenido matemático, si no que usen modelos lineales de la ingeniería en sus asignaturas: analizando sus características, propiedades y ámbito de uso en la ingeniería. El cambio en los programas de matemáticas de la facultad de ingeniería, nos permitió abordar el principio 4, *vínculos externos* y, por otra parte, al considerar cursos DPD como el que presentamos, diseñados específicamente para profesores de matemáticas en un tiempo de duración acorde a que los docentes involucrados se apropien de los conocimientos y logren realizar el cambio en la presentación de los contenidos, los que deben estar centrados en los estudiantes.

Los docentes, tienen conocimientos de la disciplina, pero la mayoría de ellos no cuentan con una formación explícita como docentes de matemáticas y tampoco se observa que se esté incentivando una política de desarrollo profesional de este tenor. Sin embargo, los procesos de acreditación requieren de una permanente innovación en la docencia, es por ello que las universidades chilenas por lo general, tienen una oferta de cursos de perfeccionamiento genérico, o diplomados de pocas horas de clases, dirigidos a todos los docentes, de las diferentes carreras y especialidades. En esta oportunidad, este curso DPD está dirigido exclusivamente a profesores de matemáticas, que se proyecte en el tiempo considerando otros tópicos. El principio 2 será considerado en cuanto

² Harel (2000), a partir de la abstracción reflexiva de Piaget, indica que estos principios son cruciales en la enseñanza del álgebra lineal y que el docente generalmente los trasgrede en la práctica.

a que el contenido matemático (que ellos conocen) es transversal a las asignaturas de matemáticas en el currículo de ingeniería, como son los conceptos insertos en el álgebra lineal, y que este DPD se enfocará en el desarrollo del principio 3, que tiene relación con la transposición de estos temas como objeto de enseñanza.

Los problemas que los docentes enfrenten (como el de la Figura 2), les permitirá disponer de una gama de situaciones de álgebra lineal, con sus respectivas justificaciones en el ámbito de la didáctica de la matemática y que deben coleccionar como parte de la evaluación del curso DPD, fomentando de esta forma la génesis documental (Gueudet y Trouche, 2008), fortaleciendo los principios 6 y 7 de un DPD efectivo e impactando el uso de este material en las otras asignaturas, resultando ser un método económico de un desarrollo profesional docente, especialmente en el uso de tecnologías en el aula como medio de simulación de modelos lineales (Trouche, 2018).

CONCLUSIONES

Nos hemos planteado como propósito de estudio mostrar la etapa de diseño de un experimento de enseñanza en relación a programas de desarrollo profesional para profesores de matemáticas de educación superior que imparten docencia en carreras de ingeniería, creado a la luz de principios que guían dichos perfeccionamientos.

En relación a ello, se ha podido crear un dispositivo formativo que visualizó y concretó en sus cimientos los ocho principios de programas efectivos. Cada uno de ellos permite darle forma y fondo a la formación que se pretende entregar.

Uno de los primeros elementos a considerar, antes de iniciar un proceso de formación docente en un grupo de académicos, es saber las condiciones de los asistentes al curso, en particular, determinar sus creencias y condiciones en general. Como los participantes, si bien es cierto tienen sus creencias específicas, en general han sido proactivos para evolucionar desde una docencia centrada en clases en el sentido tradicional a aquellas donde el estudiante es el centro, apoyándose en el uso de tecnología, por lo tanto, el DPD da una oportunidad para afinar sus sistemas de evaluación ante el uso de tecnología por parte de los estudiantes, dado que es una actividad de aprendizaje que adiciona actualmente en todos los programas de los cursos de matemática en ingeniería, resultado similar al que da cuenta Quéré (2019).

Otro elemento importante para los docentes, es que cuentan con un curso que los provee de recursos que son la base para la evolución de estos y ser desarrollados y evaluados con uso de tecnología.

El uso de la tecnología es un elemento relevante en la construcción de este programa de DPD, pues permite poner en práctica elementos del conocimiento disciplinario de los docentes. Por ejemplo, al usar una aplicación como, matrixcalc.org, los cálculos se simplifican y se acortan los tiempos para dar la descomposición de una matriz, ya sea de manera diagonal o triangular, donde los estudiantes de manera muy precisa pueden ver el rol de los valores propios (Wawro, Zandieh y Watson, 2018) y el docente dar a conocer situaciones que resultan ser modeladas por la matriz, que aparecen en literatura actualizada y que utilizan tecnología (Lay et al., 2015, González-Martin et al, 2021)

Sostenemos que, a partir de la consideración de los ocho principios de programas efectivos, el DPD fomentará y hará visible a los participantes, los que se entiende por un proceso de génesis documental, ya que a partir del DPD contarán con una gama más amplia de recursos, que podrán modificar y compartir con otros docentes (Grenier-Boley et al., 2021).

El ciclo de reflexión ALaCT ayudará a los expertos a llevar a cabo ciclos de reflexión con los docentes, la dificultad está en disponer de problemáticas del álgebra lineal que provengan de ellos, para esto se disponen de las evaluaciones que se han usado por años y que deben ser potenciadas con fundamentos didácticos como elementos para levantar las problemáticas iniciales. En este sentido, los docentes reflexionarán sobre los contenidos de las evaluaciones, las preguntas que ellas contemplan y que dimensiones, en relación a los aprendizajes de los estudiantes de acuerdo a Harel (2000) son atendidos en las preguntas. También se contempla la creación de nuevas preguntas o situaciones para cubrir las deficiencias evidenciadas. Hay que considerar que es una tradición en la universidad, que las evaluaciones son preparadas en equipo, en donde todos participan en la formulación de las preguntas. Sin embargo las entrevistas previas a los seleccionados, tenemos que sus comentarios giran en torno a la evaluación clásica, sin considerar el uso de tecnología, los comentarios son en torno al objeto matemático, preocupándose principalmente si se desarrollaron los algoritmos requeridos. En general, no se realiza un análisis a priori de cada uno de los problemas, solo se considera la respuesta experta. El grupo seleccionado claramente tiene sensibilidad al uso de tecnología.

Esto nos lleva de manera natural, a que una vez finalizado el DPD, a indicar que se espera que cuando los docentes desarrollan un contenido van a reflexionar en el análisis de la evaluación, tomarán en cuenta las situaciones de modelación que serán otra fuente de problemáticas para reflexionar dado el nuevo currículo, formándose de manera natural una comunidad de docentes que trabajan y aprenden colaborativamente. Estos elementos ponen en acción los principios de programas efectivos.

Por otra parte, en este DPD para profesores universitarios, la génesis documental (Trouche et al., 2020) juega un rol preponderante, a partir de la adquisición de recursos para implementar en sus clases, dado que los docentes de matemáticas universitarios solo cuentan con el programa de estudio y el texto guía, a diferencia de los recursos con que cuentan los docentes en los niveles escolares de nuestro país a saber: programa y planes de estudio, texto del profesor, texto del estudiante, cuadernillo de ejercicios, guías docentes, materiales didácticos para trabajar cada objetivo de aprendizaje

A su vez, la aplicación de la matemática en ingeniería requiere que los docentes de matemáticas interactúen con los docentes de las diferentes especialidades, pero, en general, parece ser que no tienen instancias para ello, principalmente por el tiempo con los que deben contar, sin embargo, los recursos que este DPD entrega dan solución a esta situación (Camarena et al, 2013).

En el caso que presentamos, al tratarse de un DPD en Educación Superior este viene a solucionar la permanente tensión que hay entre la unidad prestadora de Servicio (Instituto de Matemáticas) con las diferentes unidades académicas que son receptoras de este servicio, como lo son las carreras de la Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias del Mar y Geografía, Facultad de Ciencias Agronómicas y de los Alimentos, Facultad de Arquitectura y Urbanismo, Facultad de Filosofía y Educación y de la Facultad de Ciencias; situación que se replica, en mayor o menor grado, en las diferentes universidades chilenas con máximos años de acreditación (7 años) y reconocidas internacionalmente.

Por último, no podemos dejar de mencionar lo importante que es contar con los principios de DPD efectivos, pues estos validan la creación y el diseño del curso de forma más coherente y de mayor calidad, ya que se requiere de su impacto para provocar un cambio en los docentes de matemáticas universitarios (Winslow et al., 2021).

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación está financiada por la Agencia Nacional de Investigaciones y Desarrollo de Chile, ANID, mediante el proyecto FONDECYT N 11190553, “Principios de programas de desarrollo profesional efectivos para profesores de matemática” y por la Beca exención de arancel otorgada por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios Avanzados de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

Los tres autores concibieron la idea presentada. PV y JM adaptaron la metodología a este contexto ER desarrolló parte de la teoría. PV propuso las actividades, así como en el análisis de los datos. Todos los autores participaron en el análisis de los resultados y conclusiones.

REFERENCIAS

- Akiba, M. & Liang, G. (2016). Effects of teacher professional learning activities on student achievement growth. *The Journal of Educational Research, 109*(1), 99–110.
- Ávalos, B. (2011). Teacher professional development in teaching and teacher education over ten years. *Teaching and teacher education, 27*(1), 10–20.
- Barzel, B. & Biehler, R. (2020). Theory-based design of professional development for upper secondary teachers—focusing on the content specific use of digital tools. In S. Zehetmeier, D. Potari, & M. Ribeiro (Eds.), *Professional development and knowledge of mathematics teachers* (pp. 16–35). Routledge.
- Bautista, A. & Ortega-Ruiz, R. (2015). Teacher professional development: International perspectives and approaches. *Psychology, Society and Education, 7*(3), 240–251.
- Blank, R. K. & de las Alas, N. (2009). *Effects of teacher professional development on gains in student achievement: How meta-analysis provides scientific evidence useful to education leaders*. Council of Chief State School Officers.

- Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95.
- Bulger-Tamez, W. (2017). *A descriptive case study of the mathematically connected communities professional learning model. Theory into Practice*. New México State University.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aiqué.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. HM Stationery Office.
- Desimone, L. M. & Pak, K. (2017). Instructional coaching as highquality professional development. *Theory into Practice*, 56(1), 3-12.
- Dorier, J-L. (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer.
- Dorier, J.-L. & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, J. C.e Silva (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (Vol. 7, pp. 255–273). Springer.
- Driskell, S. O., Bush, S., Ronau, R. N., Niess, M. L., Pugalee, D. K., & Rakes, C. R. (2015). Research in mathematics educational technology: Trends in professional development over 40 years of research. In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 656–662). East Lansing.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Vale, Instituto de Educación y Pedagogía.
- Frejd, P. & Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 11–35.
- Goldsmith, L. T., Doerr, H. M., & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(1), 5–36.

- González-Martín, A., Gueudet, G., Barquero, B., & Romo-Vásquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi, & C. Winslow (eds), *Research and Development in University Mathematics Education*. (pp.169-189). Routledge.
- González-Weil, C., Gómez-Waring, M., Ahumada-Albayay, G., Bravo-González, P., Salinas-Tapia, E., Avilés-Cisternas, D., ..., & Santana-Valenzuela, J. (2014). Principios de desarrollo profesional docente contruidos por y para profesores de ciencia: una propuesta sustentable que emerge desde la indagación de las propias prácticas. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 40(ESPECIAL), 105-126.
- Grenier-Boley, N., Nicolás, P., Strombaskag, H., & Tabchi, T. (2021) Mathematics teaching practices at university level. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi, & C. Winslow (eds), *Research and Development in University Mathematics Education*. (pp.238-261). Routledge.
- Gueudet, G. & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-33.
- Guskey, T. (2003). Analysing lists of the characteristics of effective professional development to promote visionary leadership. *NASSP Bulletin*, 87(637), 4–19.
- Harel, G. (2000). Three Principles of Learning and Teaching Mathematics. In J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177–190). Kluwer.
- Kayali, L. & Biza, I. (2021). Scheming and Re-scheming: Secondary Mathematics Teachers' Use and Re- use of Resources. *Digital Experiences in Mathematics Education*. Online First <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00091-x> .
- Korthagen, F.A.J. & Verkuyl, H.S. (1987). *Oferta y demanda: hacia la diferenciación en la formación del profesorado, basada en las diferencias en las orientaciones de aprendizaje*. Trabajo presentado en la reunión de la AERA, Washington, abril.
- Korthagen, F. & Vásalos, A. (2009). From Reflection to Presence and Mindfulness: 30 years of developments concerning the concept of reflection in teacher education. In N. Lyons (Ed.), *13th Biennial*

Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI). Pays-Bas.

- Lay, D. C., Lay, S., & McDonald, J. (2015). *Linear Algebra and its applications* (5th ed.). Pearson.
- Martínez, A. (2009). El desarrollo profesional docente y la mejora de la escuela. En C. Marcelo & D. Vaillant (coord.), *Aprendizaje y desarrollo profesional docente* (pp. 79-88). Narcea.
- McCrary, M. (2011). *Mapping the road to instructional coach effectiveness: exploring the relationship between instructional coaching efficacy, practices, and outcomes* (Doctoral Dissertation). Georgia State University.
- McNeill, K. L. & Krajcik, J. (2008). Teacher instructional practices to support students writing scientific explanations. In J. Luft, J. Gess-Newsome, & R. Bell (Eds.), *Science as inquiry in the secondary setting*. National Science Foundation.
- Mizwell, H. (2010). *Why professional development matters. Learning forward*. Learning Forward.
- Montecinos, C. (2003). Desarrollo profesional docente y aprendizaje colectivo. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad*, 2(1), 105-128.
- Nieveen, N. (2010). Formative evaluation in educational design research. In Plomp T. & Nieveen, N. (Ed.). *An Introduction to Educational*. Slo.
- Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Routledge.
- Plomp, T. (2010). Investigación en diseño educativo: una introducción. En T. Plomp y N. Nieveen (Ed). *Introducción a la investigación en diseño educativo* (pp. 9-35). SLO.
- Quéré, P.-V. (2019). Les mathématiques dans la formation des ingénieurs et sur leur lieu de travail: études et propositions (cas de la France). (Unpublished doctoral dissertation). Université de Brest, France.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02281937> .
- Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 405-422.

- Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- Ramos-Rodríguez, E., Fernández-Ahumada, E. y Morales-Soto, A. (2022). Effective Teacher Professional Development Programs. A Case Study Focusing on the Development of Mathematical Modeling Skills. *Education Sciences*, 12, 2. <https://doi.org/10.3390/educsci12010002>
- Santos, G. & Tirado, F. (2019). Transformando la educación: análisis de diseños para la construcción de conocimiento por colaboración. *Revista de la Educación Superior*, 48(189), 21-53.
- Sztajn, P., Borko, H., & Smith, T. (2017). Research on mathematics professional development. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 793–823). NCTM.
- Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.157-223). National Council of Teachers of Mathematics.
- Timperley, H. Wilson, A. Barrar, H., & Fung, I. (2007). *Teacher Professional Learning and Development: Best Evidence Synthesis Iteration Wellington*. Ministry of Education.
- Trejo, E., Camarena, P., & Trejo-Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista Delaware Docencia Universitaria*, 11(1), 397-424.
- Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza - una historia de trayectorias. *Educación Matemática*, 30(3), 9-40.
- Trouche, L., Rocha, K., Gueudet, G., & Pepin. B. (2020). Transition to digital resources as a critical process in teachers' trajectories: the case of Anna's documentation work. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1243-1257. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01164-8>
- Thurm, D. & Barzel, B. (2020) Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM Mathematics Education*, 52, 1411–1422. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01158-6>

- Villa-Ochoa, J. A. & Jaramillo-López, C. M. (2011). Sense of Reality through Mathematical Modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (eds.), *Trends in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA 14* (pp.701-711). Springer.
- Wawro, M., Zandieh, M., & Watson, K. (2018). Delineating Aspects of Understanding Eigentheory through Assessment Development. In *INDRUM 2018 Proceedings* (pp. 275–284).
- Winslow, C., Biehler, R., Jaworski, B., Running F. & Wawro, M. (2021). Education and professional development of university mathematics teachers. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi, & C. Winslow (eds), *Research and Development in University Mathematics Education*. (pp.59-79). Routledge.