



Competencia de análisis y reflexión sobre la gestión de lecciones de libros de texto por maestros en formación

María Burgos Navarro ^a
Maria Jose Castillo Cespedes ^b

^a Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática Cartuja, Granada, España.

^b Universidad de Costa Rica, Facultad de Matemática, Departamento de Educación Matemática, San Pedro, San José, Costa Rica.

Recibido para publicación 22 jun. 2022. Aceptado después de la revisión 1 abr. 2023
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: Poder valorar lo que ocurre en un proceso de enseñanza-aprendizaje es una de las competencias esenciales del profesor. Este debe analizar y seleccionar los recursos educativos que considera pertinentes para sus alumnos. Dado que los libros de texto constituyen un importante recurso para el diseño instruccional, el docente debe ser capaz de analizar su idoneidad, identificar limitaciones y realizar adaptaciones que las solventen considerando las necesidades de sus estudiantes. **Objetivos:** Describimos el diseño, implementación y resultados de una acción formativa con maestros en formación, orientada al desarrollo de la competencia para el análisis, identificación de conflictos y propuestas de gestión de lecciones de libros de texto, particularizadas al contenido de la proporcionalidad. **Diseño:** La investigación es interpretativa de tipo exploratorio, se aplica el análisis de contenido para examinar los protocolos de respuesta de los participantes. **Lugar y participantes:** La experiencia se realizó en el marco del grado de Educación Primaria; la muestra fue de 48 estudiantes. **Recogida y análisis de los datos:** La información se recopiló a partir de las anotaciones del observador/investigador y las respuestas de los participantes a la tarea de evaluación propuesta. **Resultados:** Los resultados muestran que los maestros en formación progresan en la identificación de conflictos y que plantean sugerencias de mejora para incrementar la idoneidad didáctica en las distintas facetas, pero que no son suficientemente específicos cuando describen propuestas efectivas de solución a conflictos, especialmente en las facetas epistémica y cognitiva. **Conclusiones:** Para que los futuros maestros adquieran mayor competencia en el modo de uso, es necesario en reforzar sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad.

Palabras claves: formación de profesores; análisis e intervención didáctica; análisis de libros de texto; proporcionalidad.

Autora correspondiente: María Burgos Navarro. Email: mariaburgos@ugr.es

ABSTRACT

Background: Being able to assess what is happening in a teaching-learning process is one of the essential teacher competences. Teachers often have to analyse and select the educational resources they consider relevant for their students. Since textbooks are an important tool for instructional design, the teacher must be able to analyse their suitability, identify limitations and make adaptations to meet the needs of his or her students. **Objectives:** This paper describes the design, implementation, and results of a training action with prospective primary education teachers, aimed at the development of competence for the analysis, identification of conflicts and proposals for the management of textbook lessons, particularly the content of proportionality. **Design:** The research is interpretative and exploratory, using content analysis to examine the participants' response protocols. **Setting and Participants:** The experience was carried out in the framework of the Primary Education grade; the sample consisted of 48 students. **Results:** The results show that trainee teachers make progress in identifying conflicts and make suggestions for improvement to increase didactic suitability in the different facets, but that they are not specific enough when describing effective conflict resolution proposals, especially in the epistemic and cognitive facets. **Conclusions:** For future teachers to become more proficient in the mode of use, it is necessary to reinforce their didactical-mathematical knowledge of proportionality.

Keywords: teacher training; didactical analysis and intervention; textbook analysis; proportionality.

Competência de análise e reflexão sobre a gestão de aulas de livros didáticos por professores estagiários

RESUMO

Contexto: Ser capaz de avaliar o que acontece em um processo de ensino-aprendizagem é uma das competências essenciais do professor. Os professores devem analisar e selecionar os recursos educacionais que consideram relevantes para seus alunos. Como os livros didáticos são um recurso importante para o projeto instrucional, o professor deve ser capaz de analisar sua adequação, identificar limitações e fazer adaptações para atender às necessidades de seus alunos. **Objetivos:** Descrevemos a concepção, implementação e resultados de uma ação de treinamento com professores estagiários, orientada para o desenvolvimento da competência para a análise, identificação de conflitos e propostas para a gestão de lições em livros didáticos, particularmente no que diz respeito ao conteúdo da proporcionalidade. **Design:** A pesquisa é interpretativa e exploratória, utilizando análise de conteúdo para examinar os protocolos de resposta dos participantes. **Coleta e análise de dados:** As informações foram coletadas das notas do observador/pesquisador e das respostas dos participantes à tarefa de avaliação proposta. **Resultados:** Os resultados mostram que os professores

estagiários fazem progressos na identificação de conflitos e fazem sugestões de melhorias para aumentar a adequação didática nas diferentes facetas, mas não são suficientemente específicos ao descrever propostas eficazes de resolução de conflitos, especialmente nas facetas epistêmica e cognitiva. **Conclusões:** Para que os futuros professores adquiram maior competência no modo de uso, é necessário reforçar seus conhecimentos didático-matemáticos de proporcionalidade.

Palavras-chave: treinamento de professores; análise didática e intervenção; análise de livros didáticos; proporcionalidade.

INTRODUCCIÓN

Muchos docentes identifican los libros de textos como el saber institucional que se debe enseñar y aprender, por lo que en la planificación de los procesos de instrucción recurren a ellos como base para tomar decisiones sobre qué y cómo presentar los contenidos o qué metodología seguir (Rezat, 2012; Salcedo et al., 2018). La forma en que se presenta la información en los libros de texto puede suponer un obstáculo o una oportunidad en el aprendizaje de los contenidos que se desean enseñar a los estudiantes (Törnroos, 2005). Por este motivo, diversas investigaciones estudian los modos de uso de estos materiales curriculares por parte de los docentes (Remillard y Kim, 2017; Rezat, 2012; Shaver, 2017).

Autores como Choppin (2011), Godino et al. (2017) o Thompson (2014) defienden la necesidad de que los profesores adquieran una posición analítica y crítica que les permita, en primer lugar, identificar debilidades o carencias presentes en el proceso instruccional propuesto por el autor del libro, y en segundo, reflexionar sobre cómo solventar las mismas. No obstante, los resultados de diversas investigaciones muestran que los profesores tienen dificultades al llevar a cabo estas acciones (Grossman y Thompson, 2008; Yang y Liu, 2019) y que, sin herramientas que los guíen en esta tarea, el análisis de textos que realizan suele ser intuitivo o parcial y carente de un enfoque crítico, que les permita tomar decisiones razonadas sobre la gestión de uso de este (Beyer y Davis, 2012). En consecuencia, la formación de profesores debe tener en cuenta el desarrollo de competencias didácticas con relación al análisis y gestión de libros de texto, mediante el diseño e implementación de acciones formativas que incorporen instrumentos específicos.

En este trabajo planteamos la necesidad de que los maestros en formación sean capaces de analizar la adecuación de lecciones de libros de texto de matemáticas en un tema concreto y que, con base a tal análisis, identifiquen

potenciales conflictos en la lección y elaboren propuestas fundamentadas sobre la gestión de dicho recurso.

Como marco teórico empleamos el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino et al., 2007). En dicho marco se ha desarrollado un modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas (Godino et al., 2017) y se han elaborado herramientas teórico-metodológicas para apoyar la planificación y puesta en marcha de acciones formativas que promuevan, entre otras, la competencia de análisis e intervención didáctica. Esta se orienta al diseño, implementación y evaluación de secuencias de aprendizaje propias y de otros, que permitan tomar decisiones sobre qué cambios se deben realizar para mejorar el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes (Breda et al., 2017; Burgos & Godino, 2021; Burgos et al., 2020; Giacomone et al., 2018; Giacomone et al., 2019; Godino et al., 2017; Godino et al., 2018). Algunas de las intervenciones específicas desarrolladas en el campo de la formación de profesores con base en el modelo CCDM, han empleado la herramienta idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores (Godino, 2013) para organizar la reflexión sistemática del profesor sobre su propia práctica o la de otros, y desarrollar la competencia de evaluación de los procesos de instrucción planificados o implementados (Breda et al., 2018; Font et al., 2018; Giacomone et al., 2018; Hummes et al., 2019; Morales-López y Araya-Román, 2020; Pino-Fan et al., 2013).

Algunos de estos trabajos han tratado de manera específica el contenido matemático de la proporcionalidad (Burgos et al., 2018; Burgos et al., 2020; Castillo et al., 2021; Castillo & Burgos, 2022; Esqué & Breda, 2021). A pesar de la importancia longitudinal y transversal de dicho contenido en los currículos de Educación Primaria y Secundaria, así como de constituir el puente hacia el pensamiento matemático avanzado, la proporcionalidad no suele recibir un tratamiento adecuado en los textos de matemáticas escolares de ambas etapas (Ahl, 2016; Burgos, Castillo et al., 2020; Shield & Dole, 2013). Los manuales para el alumno destacan el aprendizaje memorístico de rutinas y evitan argumentar sobre las condiciones que caracterizan una situación de proporcionalidad directa, lo que obstaculiza el desarrollo de un adecuado razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007; Riley, 2010). Además, y no menos importante, tanto profesores en formación como en servicio tienen dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Buforn et al., 2018; Van Dooren et al., 2008). En este sentido, autores como Nicol y Crespo (2006) o Remillard y Kim (2017) sugieren que es posible diagnosticar y corregir estas

deficiencias por medio de la reflexión sobre los procesos instruccionales previstos en lecciones de libros de texto, generando aprendizaje significativo en los docentes.

Así, Burgos and Castillo (2022) describen los resultados de una acción formativa con maestros en formación destinada a desarrollar de manera específica su competencia para identificar conflictos semióticos en una lección de proporcionalidad de un libro de texto de educación primaria. Para orientar su análisis se proporcionó a los participantes una guía para el análisis de lecciones de proporcionalidad en libros de texto (GALT-proporcionalidad) (Castillo et al., 2022) basada en las facetas, componentes y criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2013). Como resultado de su aplicación, los maestros en formación identificaron conflictos relativos a la presentación del contenido, a los conocimientos previos requeridos y la progresión en el aprendizaje, así como a los modos de interacción prevista y el uso de recursos. Sin embargo, otros conflictos, relacionados con un conocimiento específico de la proporcionalidad pasaron inadvertidos por la mayoría de los futuros maestros. Dado que las críticas de los profesores a los libros de texto pueden estar relacionadas con sus creencias (Yang y Liu, 2019) y que dichas creencias dan forma al uso de los recursos (Lloyd, 2002), Burgos and Castillo (2022) plantean la necesidad de comparar las creencias inferidas a partir de valoraciones iniciales (sin haber recibido una formación específica) con el análisis, la identificación de conflictos en las lecciones de libros de texto y la toma de decisiones sobre la gestión del libro de texto posterior a una formación.

En este trabajo se describe el diseño, implementación y resultados de una experiencia formativa con la que se pretende promover en maestros en formación, su competencia para el análisis didáctico de una lección de libro de texto de proporcionalidad, la identificación de deficiencias en la misma y la toma de decisiones para su mejora y uso efectivo, empleando la GALT-proporcionalidad (Castillo et al., 2022a). El objetivo general que se plantea es analizar cómo evoluciona dicha competencia, con relación a la identificación de conflictos y reflexión sobre su modo de uso. Para lograr esto nos planteamos de modo específico:

1. Identificar y describir las carencias que indicaron los participantes en una tarea de diagnóstico inicial.
2. Analizar y valorar los conflictos que precisaron tras la formación y cuáles fueron sus propuestas para solventarlos.

MARCO TEÓRICO

La consideración de la lección de un libro de texto como un proceso instruccional (previsto o planificado) en el que el autor propone una secuencia de prácticas matemáticas para el estudio del tema en cuestión, permite aplicar a su análisis sistemático, las distintas herramientas teóricas del EOS (Godino et al., 2007). En dicho marco teórico los objetos matemáticos emergen de las prácticas que se movilizan al dar respuesta a cierta situación-problema y se considera toda una tipología de objetos (situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, y argumentos) según su naturaleza y finalidad (Godino et al., 2007). Estos objetos matemáticos no están aislados, sino que se relacionan entre sí formando *configuraciones* que pueden ser *epistémicas* (objetos y procesos matemáticos puestos en marcha desde una institución para la solución de un problema matemático) o *cognitivas* (red de objetos y procesos matemáticos utilizados por los estudiantes para resolver una situación-problema).

Cuando se planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático (por ejemplo, la proporcionalidad) para los estudiantes de un determinado nivel educativo (por ejemplo, sexto curso de educación primaria) el profesor debe delimitar en primer lugar lo que dicho objeto representa para las instituciones matemáticas y didácticas. Acudirá, a los textos matemáticos y didáctico-matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares y, en general, a lo que los expertos consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto cuya instrucción se persigue. Con todo ello, el profesor determinará el sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia del objeto* (por extensión, contenido matemático). Por otro lado, el significado institucional pretendido viene dado por el sistema de prácticas previsto sobre un objeto matemático para un cierto proceso de instrucción (como puede ser el planificado por el autor de un libro de texto en una lección de proporcionalidad dirigida a alumnos de sexto curso de primaria). Desde el EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generadas en la clase. Así, el sistema de prácticas que manifiesta el estudiante a propósito de la resolución de tareas matemáticas en las que aparece involucrado el objeto, determina el *significado personal logrado* por el estudiante.

Para explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas, el EOS introduce el término *conflicto semiótico*, entendido como “disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una

misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción comunicativa” (Godino et al., 2007, p.113). Cuando la discordancia se produce entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en una lección de libro de texto o por un profesor) se dice que se trata de un *conflicto epistémico*, mientras que si disparidad tiene lugar entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se dice que se trata de un *conflicto cognitivo*.

En este trabajo adoptamos el modelo CCDM de categorías de conocimientos del profesor de matemáticas desarrollado en el marco del EOS (Godino et al., 2017). Se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica* que, en esencia, consiste en “diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora” (Breda et al., 2017, p. 1897). Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, los conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, precisa conocimientos para elaborar juicios valorativos razonados de lo que ha sucedido y proponer decisiones críticas para futuras implementaciones. Esta competencia global de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas está articulada por medio de cinco subcompetencias, asociadas a herramientas conceptuales y metodológicas del EOS: *competencia de análisis de significados globales* (identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución); *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas* (reconocimiento de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas); *competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas* (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos); *competencia de análisis normativo* (reconocimiento de la red de normas y metanormas que condicionan y soportan el proceso instruccional); *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* (valoración del proceso instruccional e identificación de potenciales mejoras). La descripción detallada de todas estas subcompetencias se puede encontrar en Godino et al. (2017).

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se entiende como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza),

teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Breda et al., 2017). Supone la articulación coherente y sistémica de las facetas que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino et al., 2007): epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Para cada una de estas dimensiones, se identifica un sistema de componentes e indicadores empíricos generales, que constituyen una guía para el análisis y reflexión sistemática, persiguiendo la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estos indicadores de idoneidad deben enriquecerse y adaptarse de acuerdo con el contenido matemático específico que se pretende enseñar (Breda et al., 2017), pero también al tipo de medio instruccional, entendiendo que ambos condicionan aspectos de los distintos componentes en la idoneidad didáctica.

Así, Castillo et al. (2021), el sistema de componentes e indicadores de idoneidad didáctica de Godino (2013) se revisa y particulariza para desarrollar una Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de proporcionalidad (GALT-proporcionalidad) como herramienta para orientar la reflexión de los docentes en formación o en ejercicio sobre los procesos de instrucción planificados en lecciones de libros de texto sobre proporcionalidad. Dicha guía incluye indicadores específicos, fundamentados en una revisión exhaustiva de resultados de investigaciones y en juicios de expertos asumidos por la comunidad académica (Breda et al., 2017), que permiten identificar conocimientos didáctico-matemáticos que han de tenerse en cuenta en la evaluación, rediseño o gestión de los procesos de estudio de la proporcionalidad.

MÉTODO

Este trabajo se enmarca en un enfoque de investigación interpretativa de tipo exploratorio. Se aplica el método de las investigaciones de diseño (Cobb et al., 2003) en un contexto real de clase basado en la planificación, implementación y análisis retrospectivo de una intervención. Además, se aplica el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para examinar los protocolos de respuesta de los estudiantes para maestro de primaria (MF en adelante) que intervinieron en la experiencia formativa.¹

¹ El Formulario de Consentimiento Informado (TCLE) no fue firmado, porque no se revela la identidad de los participantes, en cualquier caso, eximimos a Acta Scientiae de las consecuencias derivadas del mismo, incluyendo la asistencia integral y la eventual indemnización por cualquier daño resultante de cualquiera de los

Contexto de la investigación y participantes

Como parte de la investigación, se habían planificado ciclos formativos que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de cada experiencia. Un primer ciclo se implementó como prueba piloto en el año 2020 con un grupo de estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria (Castillo et al., 2022b). Un segundo ciclo se implementó en el año 2021 con 48 estudiantes también de tercer curso del grado de Educación Primaria. En ambos casos, la experiencia formativa se desarrolló en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Primaria, en una universidad española. En esta asignatura, se imparten dos clases semanales: la primera (de dos horas de duración) teórica, en gran grupo, y la segunda (de una hora de duración) de carácter práctico, en grupos reducidos, y en la que los estudiantes trabajan de manera colaborativa (equipos de 4 o 5 integrantes).

Durante los estudios de grado, los estudiantes han recibido formación específica sobre aspectos epistémicos, cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), instruccionales (tareas y actividades, materiales y recursos) y curriculares, de tal forma que en el momento en que se desarrolla la experiencia, se espera que los participantes sean capaces de poner en práctica el conocimiento adquirido para resolver, diseñar y secuenciar tareas matemáticas de acuerdo a unos contenidos específicos, en nuestro caso la proporcionalidad. En la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum se contempla el uso y análisis del libro de texto como recurso en el aula de matemáticas, la planificación y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo analizamos la información recogida en dicho segundo ciclo a partir de las anotaciones del observador/investigador y las respuestas escritas de los MF a la tarea de evaluación propuesta al final del curso. Éstas fueron examinadas por el equipo investigador aplicando el análisis de contenido y considerando como categorías los componentes e indicadores asociados para las distintas facetas propuestos por el EOS.

participantes en la investigación, de acuerdo con la Resolución N ° 510, de 7 de abril de 2016, del Consejo Nacional de Salud de Brasil.

Diseño e implementación

Actividad de exploración inicial

Para involucrar a los MF en una reflexión sobre la necesidad de disponer de herramientas teórico-metodológicas que permitan orientar al profesorado en la valoración sistemática de la práctica docente, se les planteó como actividad voluntaria, de manera previa a la sesión formativa sobre análisis de libros de texto, que leyeran detenidamente la lección de “Proporcionalidad y porcentajes” de González et al. (2015) y respondieran a las siguientes cuestiones: ¿qué te ha parecido la lección que acabas de analizar?; ¿has identificado algún error o algún elemento que pueda suponer una limitación en el aprendizaje por parte de los alumnos?

Introducción al análisis didáctico de lecciones de libros de texto

La instrucción a los MF sobre el análisis didáctico de lecciones de libros de texto se desarrolló a lo largo de dos sesiones de clase (2 horas de duración cada una) impartidas de forma virtual a través de la plataforma Google Meet. La primera sesión se destinó a describir una metodología para el análisis de lecciones de libros de texto:

1. *Descripción* general de la lección y división en unidades elementales de análisis (configuraciones didácticas).
2. *Análisis ontosemiótico*. Para cada una de las unidades de análisis o configuraciones didácticas en que se divide la lección:
 - a) detallar las prácticas matemáticas que se proponen;
 - b) identificar los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y lenguajes) que intervienen en las mismas,
 - c) describir los principales procesos matemáticos.
3. *Valoración de la idoneidad didáctica de la lección*, identificando los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que se observan.

El análisis de una lección se ejemplificó usando el texto “Porcentajes y proporcionalidad” del libro de Ferrero et al. (2015) para sexto curso de primaria. Después de esta primera sesión formativa, se dedicó la correspondiente sesión de prácticas de la asignatura a la realización (trabajando en grupo) de la primera

parte del análisis de la lección (descripción general y análisis ontosemiótico de las distintas configuraciones en que se divide la lección) de proporcionalidad para sexto curso de educación primaria de González et al. (2015).

En la segunda sesión formativa se presentó la idoneidad didáctica como criterio global para valorar un proceso de instrucción (o una parte de este) previsto, planificado o implementado. La reflexión sobre la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre un tema específico requiere tener en cuenta tanto el análisis de prácticas, objetos y procesos previo, como los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho contenido (en nuestro caso, la proporcionalidad).

Evaluación de la competencia de análisis de idoneidad didáctica

Después de la segunda sesión formativa, los MF trabajaron de manera individual sobre el análisis de la idoneidad didáctica e identificación de conflictos en la lección de proporcionalidad de González et al. (2015). Es la misma lección considerada en la sesión de trabajo colaborativo para realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos. Para ello se les facilitó las tablas que componen la GALT-proporcionalidad, adaptada de (2022a). A continuación, debían responder a la siguiente consigna:

¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que has identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto? En base a los conflictos detectados, precisa de forma concreta y justificada cómo solucionarías al menos cuatro de estos.

RESULTADOS

Para analizar si la formación permite mejorar la competencia de los MF para identificar conflictos en la lección y les orienta en la toma de decisiones sobre la gestión del material, en esta sección, mostramos qué carencias indicaron los participantes en la tarea de diagnóstico, cuáles reconocieron de manera mayoritaria tras el análisis y cuáles fueron sus propuestas para solventarlos.

Identificación inicial de conflictos en la lección

Para mostrar el avance en la identificación de conflictos, es importante tener en cuenta qué aspectos precisaron los participantes en la tarea de exploración inicial. De los 48 participantes, 19 (es decir, un 39,58%) indicaron explícitamente que no observaban ningún error o elemento que pudiera suponer una limitación en el aprendizaje por parte de los alumnos. Los demás participantes identificaron conflictos que hemos clasificado según la dimensión a la que afecta:

Conflictos epistémico-ecológicos (22 observaciones)

- a) Los problemas no son adecuados o están descontextualizados (“la descontextualización de algunos de los ejercicios [...] algunos ejercicios se plantean de manera llosa”, MF14).
- b) Las representaciones son poco adecuadas o requieren explicación (“falta de analogías con representaciones pictóricas”, MF13).
- c) Faltan contenidos fundamentales con relación al tema de la proporcionalidad o no están suficientemente explicados. Aquí se detalla, por ejemplo, la “explicación inadecuada de las magnitudes proporcionales” (MF40) o “de relación de proporcionalidad por medio de las tablas” (MF35).
- d) No se explica “para qué sirve el porcentaje” (MF29), los porcentajes no aparecen conectados con las fracciones y “no se estudian aumentos y disminuciones porcentuales” (MF2).
- e) Algunos procedimientos fundamentales no están explicados: la regla de tres, cálculo de las distancias por medio de la aplicación de escala, “falta explicación de la reducción a la unidad” (MF43).

Conflictos cognitivo-afectivos (10 observaciones)

- a) Falta de atención a conocimientos previos de fracciones, número decimal, unidades de medida y la conversión entre ellas.
- b) Dificultad de los problemas. Se considera que incluye “ejemplos demasiado complejos” (MF32), “algunos problemas son difíciles y podrían frustrar a los alumnos por no poder resolverlos” (MF26).
- c) No se fomenta el razonamiento matemático (“se sigue una estrategia explicada como ejemplo a los diversos problemas que se plantean, se frena el razonamiento matemático induciendo a seguir unos

patrones”, MF11) ni la flexibilidad de estrategias para resolver los problemas (MF15).

- d) No se consigue motivar al alumnado (“se da todo “hecho”, no motiva que los alumnos aprendan por descubrimiento”, MF24).

Conflictos instruccionales (13 observaciones)

- a) Exposición mecanizada que no involucra al alumno (MF3) y limita su autonomía (“un único modo de explicar los contenidos impide el logro de aprendizaje de los alumnos”, MF48).
- b) La presentación del tema no es adecuada: algunos conceptos fundamentales no están explicados, o la explicación insuficiente podría generar dificultades en los estudiantes (“para obtener el cuarto término en la regla de tres, tener dificultades para comprender las magnitudes proporcionales, entender y utilizar la escala de un mapa”, MF27; “con los términos IVA, descuento”, MF30).
- c) Algunos enunciados de los problemas o sus condiciones son confusos.
- d) No se incluyen actividades manipulativas.
- e) La secuenciación de contenidos no es adecuada (“debería explicar porcentajes después de magnitudes proporcionales”, MF23).

A pesar de que fueron pocos los MF que lograron explicitar estas limitaciones, salvo aquellas que consideran excesiva la complejidad de las tareas, son adecuadas.

Identificación de conflictos tras el análisis didáctico de la lección

En la tarea de evaluación final, todos los participantes indicaron varios conflictos que habían sido previamente categorizados por el equipo investigador. Se registraron un total de 324 observaciones en el aspecto epistémico-ecológico, 181 en el cognitivo-afectivo y 178 en el instruccional. De los 48 participantes, 30 detallaron y justificaron los conflictos encontrados, mientras que 18 los indicaron como ausencia o parcialidad en el grado de cumplimiento del indicador asociado en la GALT-proporcionalidad. Para cada una de las dimensiones, destacamos en las tablas 1, 2 y 3, respectivamente los conflictos significativos detectados más representativos (por al menos 10 de los

48 MF). A continuación, mostramos ejemplos prototípicos de su identificación por parte de los participantes.

Los MF destacan fundamentalmente la falta de claridad en la definición del porcentaje (Figura 1) o de escala (“el autor no incluye una definición general de escala, sino que la particulariza al caso 1:50000”, MF24) y que ambas nociones no aparezcan conectadas con la relación de proporcionalidad de magnitudes, lo que impide justificar en base a ésta los procedimientos que involucran el cálculo o aplicación de escalas.

Tabla 1

Conflictos epistémico-ecológicos identificados por los MF y frecuencia (Frec.)

| Componente | Descriptor del conflicto | Frec |
|----------------------|--|-------------|
| Problemas | No se promueve que el alumno formule problemas sobre proporcionalidad y porcentajes | 30 |
| | No se presentan situaciones que permitan distinguir comparaciones multiplicativas de aditivas, ni otras en las que ambas relaciones se trabajen de manera simultánea | 12 |
| | No se proponen situaciones de cálculo mental que involucren el razonamiento proporcional | 17 |
| Lenguajes | No se emplean diferentes tipos de representación de la relación de proporcionalidad ni se fomenta que los alumnos interpreten o traduzcan entre ellos. | 18 |
| Conceptos | No se presentan de manera clara los conceptos fundamentales (constante de proporcionalidad, covarianza de cantidades, invarianza de la razón) | 28 |
| | No se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales | 18 |
| Proposiciones | No se define con claridad la naturaleza proporcional del porcentaje | 18 |
| | Las proposiciones fundamentales del tema no aparecen de forma clara ni correcta | 12 |

| | | |
|---|---|----|
| | No aparecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir cuando la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa | 12 |
| Procedimientos | Los problemas permiten a los alumnos decidir que procedimientos propios de la proporcionalidad son más adecuados | 15 |
| Argumentos | Las proposiciones y los procedimientos no aparecen justificados o el argumento es siempre del mismo tipo | 22 |
| Proceso de argumentación | No se proponen situaciones para que el alumno investigue, formule conjeturas y argumente sobre relaciones de proporcionalidad | 18 |
| Modelización/ Generalización | No se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para comprender relaciones entre magnitudes o generalizarlas | 23 |
| Conexión intras e interdisciplinar | El tema no aparece relacionado con otros contenidos transversales, historia de las matemáticas o de otras disciplinas | 18 |

Figura 1

Definición de porcentaje (González et al., 2015, p. 112).

Un **porcentaje** representa una parte de un total. Se expresa mediante un número seguido del símbolo %. También se representa con una fracción de denominador 100.

Por ejemplo, MF23 indica:

Es confusa la definición de porcentaje. No queda claro si es sinónimo o no de fracción. No se aclara por qué las fracciones obtenidas son equivalentes. No se explicita la relación entre la razón “a de cada b” y la fracción a/b . No se explica que sólo las fracciones decimales se pueden expresar como porcentajes y que no todas las fracciones lo son.

También señalan conflictivo que el texto no incluya una definición clara y general de magnitudes proporcionales, sino que la descripción se

particulariza a los ejemplos introductorios, vinculados con la representación por medio de una tabla de proporcionalidad. Por ejemplo, MF37 indica “no aparece una definición de lo que son las magnitudes proporcionales. Se usa la expresión tabla de proporcionalidad como sinónimo de serie de números proporcionales; se presentan como tales, tablas con 3 o 4 columnas, sin indicar que la serie es ilimitada”. Similarmente, otros participantes señalan como MF33 que “aparece un conflicto en cuanto a la explicación de por qué dos magnitudes son proporcionales. Únicamente, se justifica que no son proporcionales porque no pueden formar una tabla de proporcionalidad” (Figura 2).

Figura 2

Introducción a las magnitudes proporcionales. (González et al., 2015, p.116)

Fermin aparca su bicicleta durante 3 h. ¿Cuánto pagará?

Si aparcarse durante 1 h cuesta 2 €, el triple de tiempo cuesta 3 veces más:

1 h → 2 € $\times 3$ 3 h → 6 €

▶ Pagará 6 €.

El tiempo de aparcamiento y el precio son **magnitudes proporcionales**. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------|--|------------|---|-----|---|---|-----|------------|---|---|---|---|-----|----------|---|
| Al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo. | $\times 2$ | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">tiempo (h)</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">precio (€)</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">6</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> <td style="padding: 2px 5px;">...</td> </tr> </table> | tiempo (h) | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | precio (€) | 2 | 4 | 6 | 8 | ... | $\div 2$ | Al dividir los números de la fila de abajo, obtenemos los de la fila de arriba. |
| tiempo (h) | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | | | | | | | | | | | |
| precio (€) | 2 | 4 | 6 | 8 | ... | | | | | | | | | | | |

Al pasear en su bicicleta durante 1 h, Fermin encuentra 2 semáforos. Si pasea 3 h, ¿puede saber cuántos semáforos encontrará?

▶ No, porque el número de semáforos que encuentra no tiene por qué ser el mismo cada hora.

El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales. No se pueden relacionar con una tabla de proporcionalidad.

17 ¿Cuáles de estas magnitudes son proporcionales?

| | |
|---------------------------|-------------------------------|
| litros de leche comprados | precio total |
| edad de una persona | altura de la persona |
| número de espectadores | cantidad de entradas vendidas |
| velocidad de un tren | número de pasajeros |

Ten en cuenta

Magnitud es aquello que se puede medir.


El papel dado al registro tabular, y la carencia de explicación y justificación sobre su uso, puede llevar como indican varios MF a “pensar que la presencia de una tabla bidimensional supone la existencia de una relación de proporcionalidad” (MF23). Además, mencionan la ausencia de una definición explícita de constante de proporcionalidad (“no se hace explícito que la razón entre las cantidades que se corresponden debe ser siempre la misma: constante de proporcionalidad”, MF5) y que no se introduce ni emplea el modelo de la función lineal (“dejando también a un lado la relación de proporcionalidad con el modelo matemático de la función lineal”, MF45).

Aunque indican la carencia de las proposiciones fundamentales, no precisan cuales son éstas o qué proposiciones de las que incluye el autor son imprecisas o están incompletas. Únicamente MF33 aprecia que “no se especifica la constante de proporcionalidad ni tampoco las condiciones de regularidad que permiten considerar magnitudes directamente proporcionales”.

Figura 3

Reducción a la unidad y regla de tres. (González et al., 2015, p.118)

En un videojuego, Carmen obtiene 10 puntos por cada 2 monedas de oro que encuentra. Si en una partida encuentra 30 monedas, ¿cuántos puntos obtiene?



Para calcularlo tenemos que **reducir a la unidad**.

- 1.° Escribimos la tabla de equivalencias.
- 2.° Dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad.
- 3.° Calculamos el dato que buscamos.

| | | |
|----------------|----|----|
| n.º de monedas | 2 | 30 |
| n.º de puntos | 10 | ? |

| | | |
|----------------|----|---|
| n.º de monedas | 2 | 1 |
| n.º de puntos | 10 | 5 |

| | | |
|----------------|----|-----|
| n.º de monedas | 2 | 30 |
| n.º de puntos | 10 | 150 |

También podemos calcularlo mediante la **regla de tres**.

Si conocemos 3 términos, podemos calcular el cuarto así:

- 1.° Escribimos los datos de esta manera:
- 2.° Multiplicamos los datos conocidos que están en cruz.
- 3.° Dividimos el resultado entre el número que no hemos utilizado aún.

| | | | | | |
|----------------|------------------|----------------|------------------|----------------|------------------|
| n.º de monedas | n.º de puntos | n.º de monedas | n.º de puntos | n.º de monedas | n.º de puntos |
| $\frac{2}{30}$ | $= \frac{10}{?}$ | $\frac{2}{30}$ | $= \frac{10}{?}$ | $\frac{2}{30}$ | $= \frac{10}{?}$ |

¿? representa el dato que queremos calcular.

Por tanto, el valor del dato que queremos calcular es:

$$30 \times 10 = 300$$

$$300 : 2 = 150$$

► Carmen ha obtenido 150 puntos.

En cuanto a la ausencia de argumentación o justificación de los procedimientos en el libro de texto, los participantes indican como MF5 que “no se explica de forma adecuada el procedimiento de reducción a la unidad en el libro de texto. Sólo indica ‘dividimos entre dos, es decir, reducimos a la unidad’ (ver Figura 3).

Ciertamente, cuando el autor del texto presenta el procedimiento de regla de tres, no explica por qué se escriben en forma de fracción los pares de valores que se corresponden, por qué son iguales las fracciones, o por qué se resuelve multiplicando ‘los datos conocidos que están en cruz’. Tampoco hace referencia a la propiedad: ‘en una proporción el producto de medios es igual al producto de extremos’. En este sentido, los participantes consideran como MF46 que “los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres no son claros, pudiendo darse el caso de que algunos alumnos no se den cuenta de que, para poder aplicarlos, es necesario que las magnitudes sean proporcionales”. En efecto, en la lección no se analizan o discuten qué condiciones deben cumplirse o qué supuestos hay que aceptar para que el modelo de proporcionalidad directa sea aplicable. Además, indican que estos son los únicos procedimientos dados y que no se ofrece al alumno la posibilidad de “discutir o explicar su punto de vista sobre otros procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad” (MF46). De igual forma, todos los MF indicaron algún conflicto en la dimensión cognitivo- afectiva y todos son correctos.

Tabla 2

Conflictos cognitivo-afectivos identificados por los MF y frecuencia (Frec.)

| Componente | Descriptor del conflicto | Frec |
|------------------------------------|---|-------------|
| Conocimientos previos | No se contemplan los conocimientos previos en relación con fracciones, equivalencia de fracciones o medida de magnitudes | 20 |
| Diferencias individuales | La falta de diversidad de estrategias (construcción progresiva, aditivas, multiplicativas) evita el acceso y logro de todos los estudiantes | 19 |
| Progresión en la dificultad | La dificultad de las situaciones propuestas es similar. | 15 |
| | No se advierte de posibles errores (ilusión de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias o uso de estrategias aditivas erróneas) | 22 |
| Evaluación | No se proponen instrumentos de autoevaluación | 28 |
| | Los modos de evaluación no son adecuados para que los alumnos conozcan sus progresos y adquieran los conocimientos y competencias esperadas | 12 |

| | | |
|------------------|--|----|
| Actitudes | No se fomenta la flexibilidad de los alumnos para explorar métodos alternativos de resolución de problemas. | 24 |
| Emociones | No existen elementos motivadores, ni se razonamientos lógicos u originales | 17 |
| Valores | No se promueve que el estudiante valore la utilidad de las matemáticas en su vida diaria (trabajo poco realista) | 10 |

Los participantes consideran que en la lección debería prestarse más atención a los conocimientos previos necesarios para abordar con éxito el estudio. Por ejemplo, indican como MF12 que la lección “no recuerda los conceptos de magnitud, unidad de medida, cantidad y valor numérico de las medidas; si el alumno no está familiarizado con estos conceptos puede ser que se cree un problema.” También señalan como limitación la falta de flexibilidad en la resolución de las situaciones-problema propuestas (“en casi ninguna ocasión se promueven estrategias diversas, por lo cual no hay apoyo individual”, MF35).

Con relación a la progresión en la dificultad, 15 participantes consideran que la dificultad es similar en las tareas. Su justificación se basa en que son actividades “todas del mismo tipo” sin llegar a contemplar los aspectos en relación con el contenido que influyen en la dificultad de las tareas, por ejemplo, la presencia de números enteros y no enteros, que no siempre se establezcan relaciones de divisibilidad entre las cantidades y que el orden de presentación de los datos en los problemas no sea siempre el mismo (Fernández y Llíneas, 2011; Van Dooren, et al., 2009). También consideran conflictivo que no se advierta a los alumnos de posibles errores (“en ocasiones aparecen recuadros que recuerdan elementos importantes de los procesos a seguir, pero no contemplan otro tipo de errores o dificultades”, MF23; “no se habla de errores comunes o fallos que puedan cometerse para intentar evitarlos previamente y beneficiar al alumnado”, MF45) y lo sitúan junto a la particularización en la presentación por parte del autor de la relación de proporcionalidad y de los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres, como potencial uso de estrategias aditivas erróneas en algunas de las tareas propuestas. Por ejemplo, MF23 menciona que el alumno puede usar este tipo de estrategias en un problema de comparación (Problema 4 en Figura 4):

Otro conflicto cognitivo, lo podemos encontrar en el ejercicio 4, debido a que el alumno se fijará en el número de errores que

ha tenido cada niño, decantándose por el niño pequeño como mejor resultado obtenido, sin tener en cuenta la proporcionalidad de aciertos y errores (MF23).

Figura 4

Tareas propuestas en González et al. (2015, p. 123)

- 4 Dos hermanos comparan sus resultados en un examen. El mayor ha respondido correctamente a 25 preguntas de las 30 que tenía su prueba, y el pequeño a 16 de las 20 que tenía la suya. ¿Quién ha obtenido mejores resultados?
- 7 Una fotografía mide 15 cm de ancho y 10 cm de largo. Si Fiona quiere ampliarla para un marco de 45 cm de ancho, ¿cuánto medirá el largo?
- A. 30 cm B. 150 cm C. 50 cm D. 3 cm

También MF45 considera que el “no advertir los errores” junto a que no se explique “de forma adecuada, la naturaleza multiplicativa en las comparaciones entre magnitudes proporcionales”, puede derivar en el uso incorrecto de estrategias de tipo aditivas:

Por otro lado, en el ejercicio 7, se presenta un conflicto cognitivo, debido a que [el alumno] vería la diferencia que hay entre 45cm y 15cm que serían 30cm y se lo sumaría a 10 cm, dando como resultado 40 cm o simplemente fijándose en los 30 cm y pondría ese resultado, pero sin asociar que es un problema de proporcionalidad.

Además, gran parte de los MF indican la falta de tareas de autoevaluación o que el uso como actividades evaluativas por parte del docente de los problemas de la lección, no permitiría medir correctamente la adquisición de conocimientos y competencias matemáticas. Finalmente mencionan el carácter rígido de la lección (“se centran en un solo método de resolución sin dar cabida a la flexibilidad, no hay ejercicios en los que se permita a los alumnos indagar ni explorar métodos nuevos” MF7) y que no ofrece a los alumnos la posibilidad de valorar la utilidad de las matemáticas:

Se explica los mecanismos a seguir para realizar el procedimiento de reducción a la unidad y la regla de tres, pero no va más allá no se explica la utilidad de estos. No se crea en los alumnos la necesidad de utilizarlos en otro contexto o en su vida real (MF33).

Como se observa en la tabla 3, entre los principales conflictos instruccionales identificando por los participantes destacan las carencias en las componentes interaccionales y la escasa propuesta de recursos materiales en la lección. De manera similar a MF23, los participantes consideran que:

El autor no subraya conceptos clave como simetría de la relación de proporcionalidad, la constante de proporcionalidad, diferencia entre situación de proporcionalidad, procedimientos para resolver las situaciones y sistemas de representación empleados, y el porcentaje como expresión de proporciones. No se enfatiza ni se insiste en dialogar entre compañeros para poner puestas en común. A penas se promueve el uso de materiales manipulativos.

Tabla 3

Conflictos instruccionales identificados por los MF y frecuencia (Frec.)

| Componente | Descriptor del conflicto | Frec. |
|----------------------------------|---|--------------|
| Interacción autor→alumno | La presentación del contenido por parte del autor no es clara ni está bien organizada | 22 |
| | No se promueven situaciones donde se busque consenso en base al mejor argumento | 26 |
| | No se usan diversos recursos argumentativos para implicar al estudiante | 18 |
| Interacción entre alumnos | Las tareas no favorecen un diálogo entre estudiantes donde cuestionen y argumenten sobre diferentes puntos de vista | 26 |
| Autonomía | No se plantean momentos para que los estudiantes asuman la responsabilidad del estudio | 11 |
| Recursos materiales | No se promueve el uso de materiales manipulativos para el estudio de la proporcionalidad (escalímetro, pantógrafo, compás de proporción, Geogebra...) | 37 |
| Secuenciación | La secuenciación de contenidos y actividades no es adecuada y no se reserva espacio suficiente a los contenidos más complejos | 15 |

En relación con la secuencia, también plantean que esta no es la adecuada. Fundamentalmente consideran que no se atiende a la progresión en los diversos significados de la proporcionalidad, que no se han incorporado otros procedimientos antes de incluir la regla de tres y que contenidos como las escalas requieren de una mayor explicación. Por ejemplo,

La secuencia no es la mejor ya que se debería de haber explicado la proporcionalidad con experiencias intuitivas referentes a la estimación, la regla de tres debería de haberse explicado al final de todo, una vez que los alumnos adquieran la experiencia suficiente en este tema. No se le ha dedicado suficiente espacio al contenido de escalas que puede ser más complejo para ellos (MF13).

Propuesta de mejora y solución a conflictos

Además de la identificación de carencias, la toma de decisiones sobre el uso de los materiales forma parte de la competencia de intervención didáctica que deben adquirir los MF. Así, se solicitó a los participantes sugerir cambios para mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto y elaborar propuestas concretas de solución efectiva a los conflictos que habían indicado (al menos cuatro de estos).

Aunque las sugerencias de mejora que incluyeron fueron todas significativas y apropiadas (segunda columna en las tablas 4, 5 y 6, a continuación), observamos que no todas las propuestas de solución a conflictos son igual de pertinentes, por lo que proponemos la siguiente categorización de estas:

- *no pertinente*, si no da solución al conflicto;
- *de pertinencia media*, si la solución que propone no es del todo adecuada o carece de fundamentación didáctico-matemática;
- *pertinente*, si da respuesta al conflicto en base a conocimientos didáctico-matemáticos específicos.

Por ejemplo, más de la mitad de los participantes plantean como conflicto que determinados conceptos no se presentan en la lección de manera clara, fundamentalmente, los de magnitudes proporcionales, porcentaje o escala. Ante este conflicto, sugieren definiciones que incluir en la unidad. Como se observa en la Figura 5, MF44 aprecia adecuadamente que la lección no

introduce una definición de magnitudes proporcionales. Sin embargo, su propuesta de solución a este conflicto no es pertinente, en tanto la definición que propone es incorrecta:

Figura 5

Propuesta de definición de magnitudes proporcionales no pertinente (MF44)

No queda clara la diferencia entre magnitud proporcional y no proporcional. El libro presenta los siguientes enunciados: "El tiempo y el precio son magnitudes proporcionales. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad". "El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales".

En esta parte, añadiría la definición de magnitudes proporcionales, de manera que el alumnado comprenda qué significa y pueda comprobarlo con el ejemplo.

Por tanto, podríamos añadir:

"Una proporción es una igualdad entre dos razones. Dos magnitudes son proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye respectivamente, en la misma medida, por ejemplo: (Ejemplo propuesto en la lección).

Figura 6

Propuesta de definición de magnitudes proporcionales de pertinencia media (MF40)

Para dar solución al concepto de relación proporcional y su naturaleza multiplicativa, la definiría como: "Decimos que dos magnitudes son directamente proporcionales si cuando se duplica, triplica, etc., la medida de una cantidad de la primera magnitud, la medida de la otra magnitud también se duplica, triplica, etc."

Consideramos de pertinencia media la propuesta de MF40, al mismo conflicto, dado que como se observa en la Figura 6, si bien incluye una definición de la relación de proporcionalidad, esta no es del todo pertinente: no establece la relación funcional (no incluye la noción de constante de proporcionalidad) y particulariza la relación multiplicativa escalar.

En las tablas 4, 5 y 6 resumimos las sugerencias de mejora y las frecuencias de propuestas efectivas de solución a conflictos en las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional, según las componentes a las que se vinculan y su grado de pertinencia (NP: No pertinente, PM: Pertinencia media, P: Pertinente).

Tabla 4

Propuesta de mejora y solución a conflictos epistémico-ecológicos. Grado de Pertinencia.

| Componente | Sugerencias de cambio | Propuesta efectiva de solución al conflicto | | | |
|---|--|---|----|---|-------|
| | | NP | PM | P | Total |
| Problemas | – Incluir problemas de semejanza, comparación. – Plantear actividades de cálculo mental en cada configuración. | 7 | 8 | 1 | 16 |
| Lenguajes | – Mejorar representaciones. | 2 | 1 | 0 | 3 |
| Conceptos | – Definir lo que son magnitudes proporcionales y no proporcionales. – Definir porcentaje y escala, relacionándolos con la proporcionalidad. | 5 | 17 | 4 | 26 |
| Proposiciones | – Destacar la relación escalar y la funcional. | 2 | 0 | 0 | 2 |
| Procedimientos | – Dar flexibilidad en resolución de problemas. – Explicar con detalle y separadas reducción a la unidad y regla de tres. | 3 | 3 | 2 | 8 |
| Argumentos | – Justificar todos los procedimientos | 2 | 0 | 0 | 2 |
| Procesos (Argumentación/ Modelización) | – Pedir a los alumnos que justifiquen todas las soluciones – Incluir función lineal con Geogebra | 4 | 5 | 1 | 10 |
| Currículo | – Relacionar con otros contenidos | 2 | 1 | 0 | 3 |
| Total | | 27 | 34 | 8 | 70 |

Los MF han propuesto solución a 70 de los conflictos epistémico-ecológicos identificados (es decir, al 26,44% de los que fueron identificados con cierta representatividad). Sin embargo, un porcentaje elevado de las propuestas se consideran no pertinentes. Con relación al componente problemas, aunque la mayoría de sugerencias de mejora tienen que ver con la necesidad de incluir problemas que cubran todos los significados de la proporcionalidad (Aroza et al., 2016), en concreto, señalan de semejanza o comparación, o que los alumnos planteen problemas de proporcionalidad (usualmente a partir de una “tabla de proporcionalidad”) la mayoría de propuestas concretas de solución a conflictos refieren a que el cálculo mental se contemple en todas las configuraciones (magnitudes proporcionales, reducción a la unidad, regla de tres, escalas) y no sólo con los porcentajes.

Figura 7

Propuesta de definición de porcentaje dada por MF44.

Para dar solución al conflicto del concepto de porcentaje y su relación con la proporcionalidad, definiría el concepto como: “Un porcentaje es un símbolo matemático, %, que representa una cantidad dada como una fracción cuyo total (denominador) es 100. Los porcentajes pueden expresarse como una fracción decimal de denominador 100. Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el tanto por ciento de una cantidad se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada 100 de esa cantidad.”

Más de la tercera parte de las propuestas abordan la necesidad de incluir en la lección definiciones apropiadas para los conceptos fundamentales: magnitudes proporcionales (Figuras 5 y 6), porcentajes y escalas. Sin embargo, en su mayoría las que plantean no son del todo adecuadas, o no mejoran las carencias que las motivan. En el caso de las magnitudes proporcionales, las definiciones o bien no son adecuadas (basadas en la propiedad en acto, “más en A..., más en B”) o bien sólo consideran la relación multiplicativa escalar (Figura 6). En el caso del porcentaje, destacan el porcentaje como símbolo, como fracción decimal y sólo en escasas ocasiones tratan de vincularlo con la relación de proporcionalidad, como se muestra en la Figura 7.

Para la escala, proponen definirla como “una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida” (MF33). En otros casos, las propuestas de solución a conflictos son menos específicas, planteando, por ejemplo, pedir que argumenten la solución

a los problemas, incluir la función lineal (por medio de Geogebra) o temas transversales y otros contenidos relacionados con la historia matemática.

Tabla 5

Propuesta de mejora y solución a conflictos cognitivo-afectivos. Grado de pertinencia.

| Componente | Sugerencia de mejora | Propuesta de solución al conflicto | | | |
|-----------------------------------|--|------------------------------------|----|---|-------|
| | | NP | PM | P | Total |
| Conocimientos previos | – Incluir actividades para detectar y reforzar conocimientos previos | 1 | 3 | 3 | 7 |
| Diferencias individuales | – Incluir actividades de ampliación y refuerzo | 3 | 2 | 0 | 5 |
| Progresión en aprendizajes | – Ampliar el grado de complejidad de las tareas | 2 | 5 | 0 | 7 |
| Evaluación | – Cambiar configuración “repara” por tareas reales de autoevaluación | 6 | 17 | 0 | 23 |
| Actitudes/ Emociones | – Proponer situaciones donde los alumnos conjeturen y exploren otros métodos – Proponer actividades más atractivas e interesantes | 5 | 2 | 3 | 10 |
| Total | | 17 | 29 | 6 | 52 |

Los participantes plantean propuestas de solución al 31,14% de los conflictos cognitivo-afectivos identificados. De estas, el 63,46 % se consideran con cierta pertinencia. La mayoría se centran en incluir en cada configuración, o bien globalmente al final de la lección, unas actividades de autoevaluación que deben venir resueltas al final del libro del alumno. En algunas de las propuestas, los MF consideran también un buen momento para incluir diversas estrategias de solución. Así MF39 indica:

Al final de la lección, dedicaría una sección de EVALUACIÓN y AUTOEVALUACIÓN, con problemas que incluyeran distintas maneras de darles solución ... Así se solucionaría el

tener que llevar a cabo una evaluación a parte y que ellos mismos vean su evolución y sus puntos débiles y fuertes.

Por otro lado, plantean comenzar la lección con unas actividades introductorias que permitan detectar qué conocimientos previos, con relación a fracciones, equivalencia de fracciones o medida de magnitudes, disponen los alumnos. Por ejemplo, MF4 indica:

me centraría en conocer conocimientos previos como el uso de fracciones o si saben que es una magnitud, para ello se podría realizar un cuestionario previo debido a que, muchas veces nos anticipamos a lo que los alumnos saben y conocen.

Para garantizar una adecuada progresión en los aprendizajes consideran necesario aumentar el nivel de complejidad, si bien no llegan a concretar tipos de actividades con las que lograría ese incremento. También proponen advertir a los alumnos de posibles dificultades con ciertos contenidos o errores frecuentes:

Solucionaría este conflicto añadiendo antes de la explicación del autor acerca del contenido a explicar en cada configuración, advertencias acerca de qué dificultades se pueden encontrar los alumnos en este apartado. Qué les puede resultar más complejo y los errores más comunes que suelen tener los alumnos en su comprensión (MF21).

En el aspecto afectivo, plantean como propuesta de mejora incluir “actividades que fomenten la curiosidad” (MF16), “no tan rutinarias, actividades más atractivas” (MF25). También creen que mejoraría el aspecto afectivo de la lección proponer situaciones donde los alumnos conjeturen y exploren ideas o métodos alternativos (MF17), pero no concretizan de qué forma.

Tabla 6

Propuesta de mejora y solución a conflictos instruccionales. Grado de pertinencia

| Componente | Sugerencias de mejora | Propuesta efectiva de solución al conflicto | | | |
|------------|-----------------------|---|----|---|-------|
| | | NP | PM | P | Total |

| | | | | | |
|----------------------------------|--|----|----|---|----|
| Interacción autor→alumno | – Ampliar y mejorar la explicación de cada configuración | 7 | 7 | 0 | 14 |
| Interacción entre alumnos | – Incluir actividades grupales – Pedir a los alumnos que dialoguen y debatan sobre las tareas | 2 | 11 | 0 | 13 |
| Autonomía | – Fomentar el trabajo autónomo | 1 | 1 | 0 | 2 |
| Recursos materiales | – Incorporar materiales manipulativos | 16 | 8 | 4 | 28 |
| Secuenciación | – Cambiar el orden de las configuraciones | 0 | 4 | 1 | 5 |
| Total | | 26 | 31 | 5 | 62 |

Figura 8

Propuesta de uso de recursos materiales (MF46)

Ausencia del uso de recursos y materiales variados: En la configuración de mapas y escalas, utilizaría mapas y planos reales para que los alumnos tuvieran que interpretarlos correctamente. Por ejemplo, podríamos realizar una actividad en la que los alumnos, por grupos, tienen que dibujar un plano del colegio y, posteriormente, calcular la escala a la que lo han hecho utilizando los pasos como unidad de medida.

En el caso de la propuesta de solución a conflictos instruccionales (el 40% de todos los indicados), si bien la mayoría sugiere el uso de recursos materiales o informáticos, no suelen explicitar qué tipo de recursos (salvo Geogebra o Excel) o de qué manera los usarían. Son propuestas que no se concretan en actividades para implementar en el aula, a excepción de la construcción de figuras a cierta escala, la elaboración o interpretación de mapas o la toma de medidas para el diseño de planos (Figura 8).

Otros, proponen el uso de Google Maps (“Por ejemplo, con Google Maps calcular la distancia desde el colegio a la casa de cada alumno a través de la escala que nos ofrece esta herramienta, FM12). En general, se observa una falta de conocimiento sobre aquellos materiales que pueden ser adecuados para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad (“no hacen falta materiales

muy específicos, porque cualquier material que se pueda dividir ya puede ser útil para trabajar la proporcionalidad”, MF22).

En cuanto a la secuenciación, creen que mejoraría el proceso de estudio por medio de la lección alterar el orden de presentación de las configuraciones, de manera que se presenten las magnitudes proporcionales antes que los porcentajes y posponer la introducción de la regla de tres (“cambiaría el orden de las configuraciones, de manera que se trabajara la regla de tres como último contenido tal y como se indica en la secuencia apropiada de la proporcionalidad”, MF28).

Figura 9

Propuesta de reformulación a la actividad 17 (MF33).

Aparece un conflicto muy claro en el ejercicio 17, esto se debe a que, en esta actividad, nos plantean ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales?

En él aparecen una serie de recuadros donde aparecen una serie de magnitudes. Sin embargo, aparecen ancladas por parejas y además tienen el mismo color, lo cual puede llevar al niño a entender que esos pares de magnitudes son proporcionales únicamente porque los dos recuadros tienen el mismo color. Esto, yo lo cambiaría, y pondría todos los recuadros del mismo color para que no hubiera confusiones y además tampoco uniría los recuadros cada uno que fuera independiente.

Planteamiento de la actividad 17 corregida: ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales? Explica porque lo son.

| | |
|---------------------------|-------------------------------|
| Litros de leche comprados | Precio total |
| Edad de una persona | Altura de la persona |
| Número de espectadores | Cantidad de entradas vendidas |
| Velocidad de un tren | Número de pasajeros |

En el componente interaccional, los participantes proponen mejorar la presentación del tema (“mejoraría la explicación en cada configuración didáctica, que es demasiado escueta y particularizada”, MF3), enfatizando los conceptos fundamentales del tema (constante de proporcionalidad, carácter simétrico de la relación de proporcionalidad, fundamentalmente) pero no llegan

a hacer una descripción suficientemente precisa. Sí son más concretos cuando su propuesta se asocia a alguna de las tareas propuestas. Por ejemplo, para MF33 la formulación de la actividad 17 (Figura 2) puede dar lugar a un conflicto y sugiere el enunciado alternativo que aparece en la Figura 9.

Finalmente, para garantizar una adecuada interacción entre los alumnos, los participantes proponen emplear algunas de las tareas más significativas de cada configuración para trabajarlas de manera colaborativa y aprovecharlas para que argumenten y justifiquen sus respuestas. En este sentido, también proponen añadir “justifica tu respuesta” en todos los problemas de la lección.

CONCLUSIONES

Los profesores interpretan y actúan como mediadores de los contenidos de los libros de texto cuando los utilizan, por lo que deben disponer de los conocimientos y competencias necesarias para hacer un uso adecuado de estos recursos (Kim, 2007). Llevar a cabo un análisis crítico que guíe el modo de uso de este recurso, constituye una tarea profesional docente que puede resultar difícil y requiere de formación específica (Beyer y Davis, 2012; Godino et al., 2017; Shower, 2017). Como sugieren Remillard y Kim (2017), este trabajo es especialmente importante para los profesores de primaria, que no suelen tener una amplia preparación en matemáticas y, por lo tanto, están más inclinados a confiar en los recursos curriculares. Esto supone que, desde la formación se debe velar por que los profesores dispongan de herramientas para criticar los materiales curriculares y adaptarlos para hacer un uso adecuado de los mismos (Beyer y Davis, 2012).

En este trabajo hemos descrito el diseño, implementación y resultados de una experiencia formativa con MF destinada a desarrollar su competencia para el análisis didáctico de una lección de libro de texto, la identificación de deficiencias y propuesta de gestión de uso y mejora. Como instrumento para guiar este análisis se facilitó a los participantes la GALT-proporcionalidad (Castillo et al., 2022a) basadas en las facetas, componentes y criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2013).

Para valorar el desarrollo en esta competencia por parte de los MF, se propuso como tarea inicial una primera lectura y valoración de la lección. En este caso, un porcentaje elevado de los participantes indicó explícitamente que no observaban ningún elemento que pudiera obstaculizar el aprendizaje por parte de potenciales alumnos, si bien aquellos que indicaron alguna carencia, lo hicieron en general de manera oportuna, mostrando rasgos asociados a las

distintas facetas que afectan a los procesos instruccionales, especialmente, en lo epistémico-ecológico.

El análisis de las tareas de evaluación muestra que la formación sobre el análisis didáctico y la valoración de la lección en base a los criterios de idoneidad didáctica permite mejorar la competencia de los MF para identificar conflictos en la lección. Sin embargo, en relación con la toma de decisiones fundamentadas sobre la gestión del material, las propuestas de solución a conflictos no han sido del todo precisas o efectivas. Los participantes sabían qué querían cambiar, pero no tanto cómo.

Que los MF propongan solución a unos conflictos y no a otros, puede deberse a varios motivos. Por un lado, a sus propias creencias sobre cuáles son los aspectos más importantes para garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje “idóneo”. Los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios (en lugar de normas que son reglas) y por tanto son graduales (Breda, 2020). En tanto consensos a priori, los criterios de idoneidad parciales deben tratarse de manera conjunta, dando un peso relativo diferente a cada criterio en función del contexto. En la búsqueda del carácter idóneo de un proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, del equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto o las necesidades de los estudiantes inclina las decisiones en una determinada dirección (Breda, 2020).

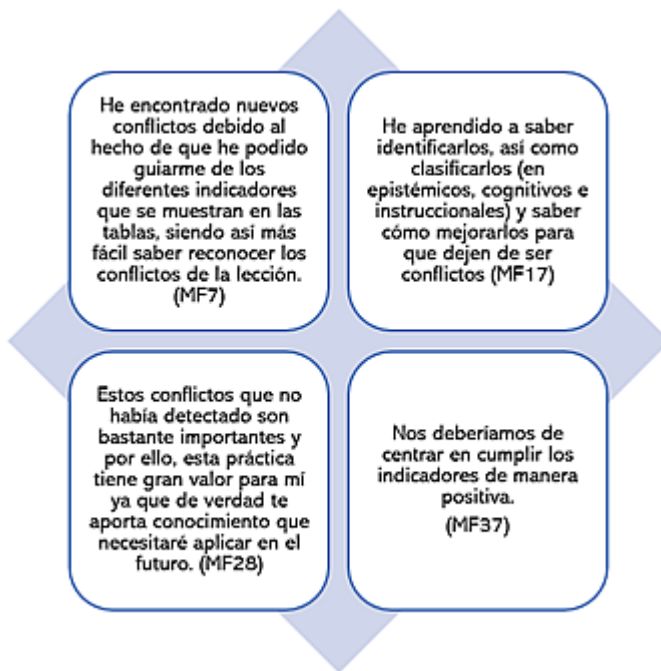
Por otro lado, influye en sus propuestas sus conocimientos didáctico-matemáticos y su competencia para abordar unos aspectos con mayor seguridad que otros. Por ejemplo, hemos observado que las definiciones que proponen para magnitudes directamente proporcionales, porcentaje o escala, que califican como deficitarias en la lección, tampoco son adecuadas, o que no llegan a plantear nuevas situaciones para trabajar de forma articulada los distintos significados de la proporcionalidad (Aroza et al., 2016), aunque sí lo habían considerado como carencia en la lección. A pesar de los MF recibieron formación sobre factores que afectan a la dificultad (Fernández y Llinares, 2011; Van Dooren, et al., 2009) y la diversidad de estrategias en problemas de proporcionalidad (Lamon, 2007), y de que identificaron conflictos en cuanto a la atención a la diversidad y progresión en el aprendizaje, no diseñaron tareas específicas para atenderlos. Los participantes dieron mayor respuesta a conflictos en el aspecto instruccional, siendo esta más adecuada cuanto menos dependía del contenido matemático.

A la luz de estos resultados, creemos relevante fomentar este tipo de acciones formativas orientadas hacia el conocimiento y las competencias

didácticas, pero centradas en la importancia del contenido a la hora de desarrollar las matemáticas necesarias para su enseñanza (Burgos et al., 2020; Davis, 2015; Esqué & Breda, 2021). Los MF consideran necesario disponer de este tipo de guías basadas en los criterios de idoneidad didáctica para identificar conflictos y saber cómo gestionarlos (Figura 10).

Figura 10

Reflexiones de MF sobre la acción formativa



Además, les ayuda a expresar sus ideas en términos formales, empleando un lenguaje profesional (“al identificar el fallo, quizá no sabía cómo expresarlo en términos didáctico-matemáticos”, MF29), aspecto que se puede considerar una evidencia de mejora en la competencia reflexiva de los participantes (Ivars et al., 2018).

Los libros de texto y otros recursos digitales sirven a los profesores como enlace entre el currículum previsto y el mundo tan diferente y complejo

del aula (Valverde, et al., 2002), por lo que deben estar capacitados para emplearlos de diversas formas teniendo en cuenta las necesidades de sus estudiantes (Lloyd, 2002). Es posible que los resultados de nuestra investigación hubieran sido distintos con docentes en ejercicio o si los MF hubieran podido llevar a la práctica en un aula de primaria la lección y sus propuestas de mejora, como ocurre en el trabajo de Esquí y Breda (2021). Es necesario por tanto investigar los resultados de una intervención formativa como la descrita en este trabajo, cuando las propuestas deben ser implementadas de manera efectiva en un contexto real de clase.

RECONOCIMIENTO

Investigación realizada en el marco del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con el apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España). El segundo autor también podría agradecer la beca y el apoyo financiero de la Universidad de Costa Rica.

DECLARACIONES DE LOS AUTORES

M.B particip  en la conceptualización, investigación, definición de metodología, procesamiento de datos, monitoreo, validación, visualización, redacción, revisión y edición. M.J.C particip  en la conceptualización, procesamiento de datos, validación, visualización, revisión y edición. Ambos autores participaron activamente en el análisis y discusión de los resultados y revisaron y aprobaron la versión final del artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor de correspondencia, M.B., previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Ahl, L. M. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks. *REDIMAT*, 5(2), 180-204. <https://doi.org/10.4471/redimat.2016.1987> .

- Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. S. (2012) *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense.
- Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(3), 113-135.
- Beyer, C. J., y Davis, E. A. (2012). Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of pre-service elementary teachers' pedagogical content knowledge. *Science Education*, 96(1), 130-157. <https://doi.org/10.1002/sce.20466>
- Breda, A. (2020) del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas, *Bolema*, 34(66), 69-88.
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278. <http://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Buform, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 23, 229-251.
- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022) Identificación de conflictos semióticos en una lección de libro de texto sobre proporcionalidad por parte de maestros en formación. *Revemop*, 44, e202204.
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0>
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Desarrollo de la competencia de análisis de idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas en futuros maestros de educación primaria. *Revista*

Española de Pedagogía, 78(275), 27–45.
<https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07>

- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2018). Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-22. <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013>
- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema* 34(66), 40-69. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema*, (en prensa).
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Prospective High School Mathematics Teachers' Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. *Acta Scientiae*, 23(4), 169–206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Revista Educación Matemática*, (en prensa).
- Castillo, M. J., Burgos, M., y Godino, J. D. (2022a). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), e15399. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>
- Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(5), 331–353. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9170-3>
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1, 9–13.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. Routledge.

- Esqué de los Ojos, D., y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, 35(1), 38–54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>
- Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67-80.
- Ferrero, L., Martín P., Alonso, G. y Bernal, E. I. (2015) *Matemáticas 6*. Anaya.
- Font, V., Breda, A., Seckel, M. J. y Pino-Fan, L. R. (2018). Análisis de las reflexiones y valoraciones de una futura profesora de matemáticas sobre la práctica docente. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 34(2), p. 62–75.
- Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2019). Cognitive analysis on prospective mathematics teachers' reasoning using area and tree diagrams. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 18–32.
- Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, 1–21. <http://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.
- González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramírez, R., Bernabeu, J., Pérez, M., Pérez, B., Morales, F., Vidal, J. M., Hidalgo, V. (2015). *Matemáticas. 6º Primaria*. Savia.

- Grossman, P. y Thompson, C. (2008). Learning from curriculum materials: Scaffolds for new teachers. *Teaching and Teacher Education*, 24(8), 2014–2026. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.05.002>
- Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae*, 21(1), 64–82.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourses. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), em1599.
- Kim, O. K. (2007). Teacher knowledge and curriculum use. In: T. de Silva Lamberg y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1114–1121). PME.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. In: F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–668). Information Age.
- Lloyd, G. (2002). Mathematics teachers' beliefs and experiences with innovative curriculum materials. The Role of Curriculum in Teacher Development. En G. C. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 149–159). Kluwer.
- Morales-López, Y., Araya-Román, D. (2020) Helping Preservice Teachers to Reflect. *Acta Scientiae*, 22 (1), 88–111. <http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5641>
- Nicol, C. C. y Crespo, S. M. (2006) Learning to teach with mathematics textbooks: How pre-service teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331 – 355.
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123–150.

- Remillard, J. y Kim, OK. (2017). Knowledge of curriculum embedded mathematics: exploring a critical domain of teaching. *Educ Stud Math* 96, 65–81. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9757-4>
- Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. In: G. Gueudet, B. Pepin, L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Teacher Education* (Vol. 7, pp. 231–245). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_12
- Riley, K. J. (2010) Teachers' understanding of proportional reasoning. In P. Brosnan, P.; Erchick, D. B.; Flevares, L. (Eds.). *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 6, 1055-1061.
- Salcedo, A., Molina-Portillo, E., Ramírez, T. y Contreras, J. (2018). Conflictos semióticos sobre estadística en libros de texto de matemáticas de primaria y bachillerato. *Revista de Pedagogía*, 39(104), 223–244.
- Shawer, S. F. (2017). Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy and teacher training. *Teaching and Teacher Education*, 63, 296–313. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.12.017>
- Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- Thompson, D. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research*, 64, 141–148. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.013>
- Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, 31, 315–327.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311–342.
- Yang, K. y Liu, X. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics*,

Science and Technology Education, 15(1), em1655.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/99515>