ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7372

Modelagem matemática reversa

Gleison De Jesus Marinho Sodré [a]
Raquel Soares Do Rêgo Ferreira [b]
Renato Borges Guerra [c]

[a] Universidade Federal do Pará (UFPA), Escola de Aplicação da UFPA, Belém, PA, Brasil
[b] Secretaria Estadual de Educação (SEDUC), Belém, PA, Brasil
[c] Universidade Federal do Pará (UFPA), Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, PA, Brasil

Recebido para publicação em 16 set. 2022. Aceito após revisão em 16 nov. 2022
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Pesquisas na Educação Matemática evidenciam a modelagem matemática como uma prática que busca "traduzir" situações-problemas em possíveis modelos matemáticos, sem entretanto, explicitar a complexidade que envolve a formulação reversa, partindo-se do modelo matemático para delimitar o tipo de situação. **Objetivo**: Evidenciar a problemática da modelagem matemática reversa, no sentido de uma formulação reversa que vai do modelo matemático à situação. **Design**: Para isso, foi realizado um percurso de estudo e pesquisa orientado pelo ciclo investigativo de modelagem matemática que se assenta sobre recursos teórico-metodológicos da teoria antropológica do didático. **Ambiente e participantes**: Professores em formação de um curso de licenciatura de uma instituição pública a partir do enfrentamento de um problema em contexto não usual para eles sobre o Sistema de Numeração Decimal, e mais amplamente do Sistema de Numeração Posicional. **Coleta e análise de dados**: Apresentamos um recorte empírico a partir da pesquisa realizada por Ferreira (2020) com professores em formação inicial. **Resultados**: Os resultados observados da empiria confirmam a hipótese de existência da problemática da modelagem matemática reversa, mesmo diante de modelos do tipo normativo, no sentido de que podem descrever uma situação real fielmente. **Conclusões**: Em última análise, o estudo de um tipo de problema em contexto não usual além de evidenciar o encontro dos professores com diferentes objetos de saberes, revelou a notável dificuldade para delimitar o tipo de situação de quantificação que pode estar associada ao modelo matemático do numeral, bem como estimulam pesquisas futuras sobre o ensino da modelagem matemática reversa.

Palavras-chave: Formação de Professores; Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática; Numeral; Teoria Antropológica do Didático.

Autor correspondente: Gleison De Jesus Marinho Sodré. Email: profgleisoneaufpa@gmail.com

Reverse mathematical modelling

ABSTRACT

Background: Research in mathematics education shows that mathematical modelling is a practice that seeks to “translate” problem situations into possible mathematical models without, however, explaining the complexity involved in the reverse formulation, starting from the mathematical model to delimit the type of situation. **Objective**: To highlight the problem of reverse mathematical modelling, in the sense of a reverse formulation that goes from the mathematical model to the situation. **Design**: For this, a course of study and research was carried out guided by the investigative cycle of mathematical modelling that is based on theoretical-methodological resources of the anthropological theory of the didactic. **Setting and Participants**: Pre-service teachers of a teaching degree at a public institution were faced with a problem in an unusual context about the decimal number system and, more broadly, the positional number system. **Data collection and analysis**: We present an empirical approach based on research carried out by Ferreira (2020) with teachers in initial training. **Results**: The empirical results observed confirm the hypothesis of the existence of the problem of reverse mathematical modelling, even in the face of normative models, in the sense that they can faithfully describe a real situation. **Conclusions**: Ultimately, the study of a type of problem in an unusual context, in addition to highlighting the encounter of teachers with different objects of knowledge, revealed the remarkable difficulty in delimiting the type of quantification situation that can be associated with the mathematical model of the number and as stimulate future research on the teaching of reverse mathematical modelling.

Keywords: Teacher education; Mathematical modelling investigative cycle; Numeral; Anthropological theory of didactics.

Modelado matemático inverso

RESUMEN

Contexto: La investigación en Educación Matemática muestra que la modelización matemática es una práctica que busca “traducir” situaciones-problema en posibles modelos matemáticos, sin, sin embargo, explicar la complejidad involucrada en la formulación inversa, partiendo del modelo matemático para delimitar el tipo de situación. **Objetivo**: resaltar el problema de la modelización matemática inversa, en el sentido de una formulación inversa que va del modelo matemático a la situación. **Diseño**: para ello se realizó un curso de estudio e investigación orientado por el ciclo investigativo de modelación matemática que se fundamenta en recursos teórico-metodológicos de la teoría antropológica de la didáctica. **Escenario y Participantes**: docentes en formación de un curso de enseñanza de una institución pública a partir del enfrentamiento de un problema en un contexto inusual para ellos sobre el Sistema de Numeración Decimal, y más ampliamente el Sistema de Numeración Posicional.

Colección y análisis de datos: presentamos un abordaje empírico a partir de la investigación realizada por Ferreira (2020) con docentes en formación inicial. **Resultados:** Los resultados empíricos observados confirman la hipótesis de la existencia del problema de la modelización matemática inversa, incluso frente a los modelos normativos, en el sentido de que pueden describir fielmente una situación real. **Conclusiones:** En definitiva, el estudio de un tipo de problema en un contexto inusual, además de resaltar el encuentro de docentes con diferentes objetos de conocimiento, reveló la notable dificultad para delimitar el tipo de situación de cuantificación que se puede asociar al modelo matemático de el numeral, así como estimular futuras investigaciones sobre la enseñanza de modelos matemáticos inversos.

Palabras clave: Formación docente; Ciclo Investigativo de Modelamiento Matemático; Número; Teoría Antropológica de la Didáctica.

INTRODUÇÃO: A PROBLEMÁTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA REVERSA

Nossos pressupostos teórico-metodológicos se assentam sobre a noção de Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática (Sodré, 2019), doravante CIMM, e, de maneira mais ampla, a partir de noções da Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD, que postula que toda atividade humana situada pode ser modelada por meio de organizações praxeológicas que, como tal, assume a noção de situação como uma forte hipótese da própria definição de conhecimento matemático desde a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1995), isto é, "um conhecimento é uma situação" [1] (Bosch & Chevallard, 1999, p. 3, tradução nossa).

Nesse contexto, é notório o interesse por Modelagem Matemática, ou simplesmente MM, que nas últimas décadas se impôs como um importante tópico de pesquisa voltada para o ensino e aprendizagem de objetos matemáticos em sala de aula, como destacam diferentes pesquisadores, tais como, Barquero (2020) e Florensa, Garcia e Sala (2020).

Independente da corrente teórica adotada sobre a MM, uma questão que se busca resposta é "Como podemos ensinar modelagem?"[2](Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018, p. 11, tradução nossa). Frejd e Bergsten (2018) clamam por estudos empíricos independentes da corrente teórica adotada sobre a MM para esclarecer essa questão, considerada segundo Blum (2011), como a

[1] Fragmento do texto: *une connaissance est une situation*.

[2] Fragmento do texto: *How can we teach modelling?*

mais importante discutida nas Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações ou simplesmente ICTMA.

Aqui, consideramos essa questão à luz da TAD, pois ela permite que a vejamos como um dos tipos das problemáticas vivenciadas pelos professores no exercício de sua profissão. Especificamente, o tipo de problemática denotado por $\mathbf{P_0}$, assim posta: o que ensinar de um objeto e como ensiná-lo para uma dada classe ou comunidade de estudo? (Barquero, Bosch & Gascón, 2011).

Nesse contexto teórico, Florensa, Garcia e Sala (2020), a partir da observação de García, Gascón, Ruíz-Higueras e Bosch (2006), destacam que essa questão, vista como uma problemática do tipo $\mathbf{P_0}$, ganha novas formulações entre elas e mais frequentes, “Como ensinar modelagem matemática? E como ensinar matemática através da modelagem?”[3] (Florensa, Garcia & Sala, 2020, p. 22, tradução nossa).

As pesquisas sobre o ensino de MM a partir do enfoque teórico da TAD, admitem o consenso de pesquisadores de outra área, entre eles, Borromeo Ferri (2006), Blum e Borromeo Ferri (2009), Perrenet e Zwaneveld (2012), Blum (2015), Greefrath e Vorhölter (2016), Vorhölter (2019) e Barquero e Jessen (2020), sobre a técnica didática dos ciclos de MM com propósito de que esta minimize a complexidade existente no processo de MM em sala de aula, o que inclui, dentre outros, aspectos da construção de modelos matemáticos sobre situações em contextos concretos.

No entanto, na perspectiva da TAD, assume-se a necessidade de se questionar as práticas que levam a cabo no interior das instituições e, nesse sentido, questiona-se o ciclo de MM (García, Gascón, Ruiz Higueras & Bosch, 2006; Bosch, García, Gascón & Ruiz Higueras, 2006), não com a pretensão de criticá-lo, mas para dotá-lo de arcabouços teóricos sólidos que permitam melhor compreendê-lo e, se possível, torná-lo mais acessível para o ensino e, com isso, para a aprendizagem da MM.

Seguindo essa linha, Sodré e Guerra (2018) e Sodré (2019) propuseram o CIMM “como metodologia de desenvolvimento e análise de modelos matemáticos de situações em contextos concretos” (Sodré & Guerra, 2018, p. 253) que deve “ser entendido sempre como relativo e provisório, aberto a questionamentos e a revisões, além de pertinente na medida em que seja rico

[3] Fragmento do texto: *las dos formulaciones más frecuentes del problema son: ¿cómo enseñar modelización matemática? y ¿cómo enseñar matemáticas a través de la modelización?*

para a identificação de fenômenos didáticos e formulação de problemas didáticos”[4] (García, Barquero, Florensa, & Bosch, 2019, p. 78, tradução nossa).

O CIMM (Sodré & Guerra, 2018; Sodré, 2019) foi proposto a partir dos três gêneros de tarefas genuínas da atividade matemática, isto é, *utilizar a matemática conhecida*, *aprender (e ensinar) matemática* e *criar uma matemática nova*, anunciadas por Chevallard, Bosch e Gáscon (2001) as quais reescrevemos a partir de Sodré (2019) do seguinte modo:

> **G_1** - Usar modelos matemáticos socialmente legitimados para situações em contextos sociais para responder a questionamentos sobre essas situações, destacando a relação associativa entre situações em contextos e os modelos matemáticos;
>
> **G_2** - Estudar um modelo matemático frente a diferentes situações e contextos, bem como estudar uma situação em contexto concreto frente a diferentes modelos matemáticos;
>
> **G_3** – Criar um modelo matemático associado a uma nova situação a partir de estudo de situações e seus modelos matemáticos associados, tendo em conta as analogias ou homologias entre essas situações e a nova situação.

De outro modo, o CIMM é sustentado por esses *gêneros de tarefas* (Chevallard, 1999) que o dota de razões sobre suas práticas, começando pela apresentação de modelos como customizações de objetos matemáticos ensinados a situações em contextos concretos, como a simples mudança de “letras” em uma expressão algébrica, por exemplo, e segue para o modo reverso partindo de um modelo em busca de situações associadas e, finalmente, de modo avançado, a construção de modelos como articulações de situações e modelos estudados.

Assim, esses gêneros de tarefas são vistos como orientação para o ensino de práticas de MM que procura evitar o ensino rotineiro da matemática que, em geral, se limita a levar o aluno a fazer o que viu o professor fazer. Esse ensino que alcança relativo sucesso em certos tipos de tarefas do estrito campo das matemáticas dotadas de técnicas algorítmicas, que podem ser executadas por máquinas, encontra dificuldades no ensino e aprendizagem da MM.

---

[4] Fragmentos do texto: *Ser entendidos siempre como relativos y provisionales, abiertos a cuestionamiento y revisión, y pertinentes en la medida en que sean fértiles para la identificación de fenómenos didácticos y la formulación de problemas didácticos.*

Na MM Guerra e Silva (2009) e Sodré (2021) destacam a existência de uma interdependência entre a situação e o modelo matemático e, assim, não há sentido em falar no estrito campo das tarefas matemáticas. Nesse caso, são organizações praxeológicas com matemática, as que envolvem tarefas matemáticas e tarefas não matemáticas, por exemplo, a definição de variável que não se reduz apenas a números, como considera a matemática, pois são dotadas de sentidos e significados não alcançados pelas tarefas matemáticas e, não menos importante, pela complexidade de articulações entre diferentes saberes para o desenvolvimento do processo de MM. Este envolve relações entre as práticas matemáticas estudadas e as práticas não matemáticas pertencentes a uma situação em contexto que é de modo quase, senão sempre, ignorada no ensino da matemática e, como em extensão, no ensino da MM.

Sob esse pensar, a funcionalidade do CIMM para o ensino foi desenvolvida a partir dos três gêneros de tarefas como uma organização praxeológica, constituída de seis tipos de tarefas, que podem nem todas se fazerem necessárias frente a uma dada situação em contexto. Especificamente, os seis tipos de tarefas que definem o CIMM são as seguintes:

Tarefa T_0: Construir uma Situação de Referência Inicial para o problema em contexto

Uma situação de referência inicial é entendida como a primeira abstração sobre o problema em contexto real considerado. A técnica dessa tarefa consiste em considerar problemas em contexto do mesmo tipo com todos os dados conhecidos, inclusive, os dados para serem encontrados, que permitam encontrar possíveis relações entre eles, não necessariamente matemáticas.

Tarefa T_1: Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relativo ao problema em contexto

Aqui, é preciso ter em conta a complexidade matemática dos modelos matemáticos para a situação suposta. Essa é uma questão vital para o estudo, pois uma maior exigência do conhecimento matemático poderá levar a rejeição ou adoção inadequada de um modelo matemático sobre a realidade estudada.

O conhecimento matemático de uma dada *comunidade de estudo*[5] é sempre limitado pela escola por meio de currículos e programas e isso pode se constituir em uma condição restritiva à busca de modelos matemáticos existentes na literatura escolar, mesmo os disponíveis extramuros da escola, como a internet.

Situações inicialmente não imaginadas em um dado podem se revelar com o uso do modelo, principalmente, a partir de modelos matemáticos que governam situações sociais, como por exemplo, os modelos matemáticos sobre financiamentos.

Seguindo a compreensão adotada pela TAD, assumimos que, quanto maior o conhecimento de uma pessoa em situações com matemática, ou seja, situações que admitem praxeologias com matemática, maior a disponiblidade de saberes para encontrar situações praxeologias matemáticas associadas. Esse é o objetivo da tarefa seguinte.

Tarefa T_2: Encontrar situações que podem ser associadas a um modelo matemático

A técnica é analisar o modelo matemático em contraste com a situação de referência inicial considerada. Isso inclui desconstruir o modelo matemático para construir situações e vice-versa.

> É preciso também observar que um homem pode ser confrontado com uma situação na qual ele vê apenas determinado aspecto, e que a construção de um modelo pode obrigá-lo a lançar um olhar mais agudo sobre a situação e descobrir características as quais, no início, ele não observara. Saber mais pode ajudar a ver mais[6] (Revuz, 1971, p. 50, tradução nossa).

---

[5] Neste texto a expressão *comunidade de estudo* refere aos alunos e professor em sala de aula.

[6]Fragmento do texto: *One must also remark that a man can be confronted with a situation of which he sees only certain aspects, and that the building of a model may compel him to throw a more acute look at the situation and discover features of which, at the beginning, he was not aware. To know more may help to see more.*.

A análise do modelo matemático encaminha o encontro com as situações, como uma formulação reversa, no sentido de que vai do modelo à situação que a formulação do modelo pode ser associada.

Tarefa T_3: Avaliar os modelos matemáticos

A avaliação é realizada assumindo como critérios a adequabilidade e a multivalência desses modelos. Ambas são avaliadas frente às situações. A técnica é encaminhada pelas seguintes subtarefas interconectadas:

Subtarefa S_{T31}: Avaliar a adequação das situações reconstruídas frente ao problema

A adequação do modelo matemático não é uma questão matemática, todavia é uma questão vital para o estudo da realidade que trata o tipo de problema em contexto, uma vez que se alguém usa um modelo inadequado, por causa de sua conveniência, simplicidade, por exemplo, sem observar sua inadequação frente a situação, é preciso estar ciente do perigo de tirar conclusões sobre a realidade a partir do estudo de tal modelo (Revuz, 1971).

Subtarefa S_{T32}: A multivalência do modelo matemático e situações associadas frente ao tipo do problema

São preferíveis os modelos matemáticos que dão conta de diferentes tipos de situações e, em consequência, diferentes questões sobre a realidade considerada, em lugar dos que somente dão conta de uma situação particular específica.

Tarefa T_4: Desenvolver um modelo matemático

A técnica para essa tarefa é produto das tarefas anteriores, de modo que pode resultar: em um dos modelos matemáticos estudados; de modificações, inclusive de customização, de um dos modelos ou de articulação e integrações de modelos estudados.

A experiência da comunidade de estudo sobre MM é uma das condições que agem para o desenvolvimeto de um modelo, além dos níveis de codeterminação didática, nem sempre claros, tal como, os impostos pelos programas das disciplinas e os recursos materiais disponíveis e usados como calculadoras e/ou computadores que agem, em geral, limitando ou potencializando as atividades matemáticas da comunidade de estudo na execução das tarefas *superestruturais* e *infraestruturais* (Chevallard, 2019) de MM.

Tarefa T_5: Difundir e defender o modelo matemático

A técnica para essa tarefa consiste em duas fases:

I - Utilizar o modelo matemático desenvolvido para enfretamento das situações eleitas como referência, se possível com diferentes conjuntos dados, mas considerando como desconhecidos os dados de interesse do problema em estudo. A demonstração da consistência das respostas obtidas pelo modelo com a resposta conhecida, legitima o modelo matemático para a situação de referência;

II - Utilizar o modelo matemático, desenvolvido no enfretamento do problema em contexto real com os dados originais. A razoabilidade das respostas obtidas com a repetição do uso do modelo com diferentes dados possíveis para o contexto do problema, encoraja a legitimidade do modelo matemático para o tipo de problema em estudo.

O sucesso alcançado simultaneamente nas duas fases, legitima, provisoriamente, o modelo matemático como resposta para o tipo de problema em estudo. A falha em uma delas evidencia o insucesso do modelo, o que demanda reformular a situação de referência, levando ao início de um novo ciclo.

RECURSOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Nesta investigação assumimos recursos teórico-metodológicos do CIMM aqui compreendido como um *Percurso de Estudo e Pesquisa Orientado* (Sodré, 2019), doravante PEPO, e mais amplamente a partir de noções da TAD cujo CIMM emerge, especificamente, fundamentado em elementos do dispositivo didático-metodológico denominado de Percurso de Estudo e Pesquisa (Chevallard, 2005, 2013), daqui em diante PEP, que toma sua forma concreta pela articulação de saberes disciplinares e não disciplinares.

Na esteira dessa construção, o CIMM se materializa articulado pela funcionalidade dos seis tipos de tarefas que o integram, encaminhadas sob um olhar mais profundo do orientador de estudo ou pesquisador que diante da díade, situação e praxeologia matemática, questiona: como é que essa relação existe e por quê? Isso permite outros questionamentos sobre a ecológica dos saberes, especificamente, por que um dado saber observado é considerado e outro não?

O PEPO (Sodré, 2019) funciona como um dispositivo metodológico de pesquisa e, em simultaneidade, como um percurso de formação dos professores, modo para atender suas necessidades de fundamentarem suas organizações didáticas escolares sobre o SND-SNP (Sistema de Numeração Decimal-Sistema de Numeração Posicional) em uma epistemologia funcional, no sentido de os saberes aparecerem como "máquinas" produtoras de conhecimentos úteis para que eles criem respostas a suas diferentes questões, como assim defendem Bosch e Gascón (2010).

Sob esse olhar, assumimos nesta o PEPO como dispositivo metodológico de formação de professores, com a clareza de que sua realização demanda uma mudança nos *topos* (Chevallard, 2009a) dos estudantes, ou professor em formação, já que podem elaborar uma resposta pessoal, como faz classicamente ao produzir sua solução para um problema dado pelo diretor de estudo para investigar, como também podem propor e introduzir nos estudos qualquer obra que eles desejem, por meio da literatura disponível e ou sugerida.

Sob essa compreensão do PEPO, a organização praxeológica do CIMM:

> Contraria o desenvolvimento da MM como uma atividade exclusiva da matemática quando encaminha a didática do PEPO, pois, sob o paradigma de questionamento do mundo é que ele toma sua forma concreta, chamando para si as praxeologias infraestruturais, matemáticas e não-matemáticas, o que inclui todos os saberes disciplinares e não-disciplinares demandados para o estudo de um domínio de realidade (Sodré, 2019, p. 128).

Essa complexidade de relações entre saberes matemáticos e não matemáticos se faz presente no desenvolvimento das tarefas do CIMM e podem se mostrar problemática para professores e alunos quando pensam a MM no estrito campo de um único saber, como a matemática, por exemplo.

Especificamente, a execução tarefa $\mathbf{T_2}$ constitui o que chamamos de processo de *modelagem matemática reversa*, ou seja, *encontrar uma situação que possa estar associada a um dado modelo matemático*.

Esse tipo de tarefa envolve a desconstrução e reconstrução de um modelo matemático com construções/reconstruções de situações. Isso, em geral, pode se mostrar problemático quando alunos ou professor estão frente a problemas em contextos reais desconhecidos ou não usuais para eles, como observou Guerra e Silva (2009) sobre um grupo de professores, que mesmo sendo mestres em matemática, não sabiam modelar em contextos incomuns para eles.

A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E O OBJETIVO

Nossos olhares tomam a tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM como foco sem perder de vista as outras tarefas, pois ela não pode ser enfrentada de modo isolado das demais. Assim, metodologicamente, a luz da TAD e do dispositivo do PEPO aqui considerado, torna-se necessário criar condições para instaurar o CIMM para esse fim, ou seja, encontrar respostas a questionamentos do tipo:

> *Quais condições são necessárias para desenvolver o CIMM relativo a um dado contexto concreto?*

Não há respostas prontas à essa questão, embora uma condição seja apontada como determinante pela matemática acadêmica, especificamente, a que assume a indispensabilidade de conhecimentos matemáticos sólidos para o sucesso em MM. No entanto, estudos de educadores matemáticos sobre MM, como Guerra e Silva (2009), Iversen e Larson (2006), Guerra e Silva (2009), Greefrath e Vorholter (2016), Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß, & Schukajlow (2019), entre outros, mostram que a experiência matemática não constitui uma condição suficiente para a aprendizagem da MM.

De outro modo, o conhecimento matemático, embora necessário, não é determinante para o sucesso de alunos e professores em MM. Assim, aqui objetivamos evidenciar o encontro da *modelagem matemática reversa* como uma problemática do CIMM enquanto dispositivo didático para o ensino e aprendizagem da MM.

A EMPIRIA DO CIMM COM FORMAÇÃO DE PROFESSORES RELATIVO AO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Inicialmente destacamos que a escolha do Sistema de Numeração Decimal, daqui em diante SND, e mais amplamente sobre o Sistema de

Numeração Posicional, daqui em diante SNP, se deve pelo interesse de diferentes instituições, incluindo a escola básica e a instituição docente e, não menos importante, de pesquisadores da educação matemática, entre eles, Terigi e Wolman (2007), Itzcovitch (2008), Sadovsky (2010), Cenci, Becker e Mackedanz (2015), Ferreira, Guerra e Nunes (2019) e Ferreira e Guerra (2020), quando destacam a relevância desses temas na formação de professores.

Para atender ao nosso objetivo, consideramos organizações praxeólogicas realizadas em um PEPO por um grupo de vinte e cinco professores em formação inicial[7], como parte de uma disciplina de um curso de licenciatura em Ciências, Matemática para as séries iniciais, de uma instituição pública, encaminhado por Ferreira (2020), a partir de um problema em contexto não usual para eles, envolvendo noções sobre o SND em contexto de um SNP.

Consideramos o PEPO à luz da noção do CIMM, com o interesse em evidenciar o encontro dos professores com a problemática da *modelagem matemática reversa* por meio de uma das trajetórias percorridas por eles durante a formação, tendo em conta que o problema em contexto enfrentado encaminhava, de algum modo, o encontro dos professores com a prática de quantificação a partir do SNP.

O problema proposto para o PEPO trata de um contexto inusitado com o propósito de evitar que pudesse ser reduzido a uma situação rotineira dotada de uma resposta pronta, no sentido de movimentar *habitus*[8]associados a essa situação rotineira, de acordo com os estudos de Bourdieu (2002), pois se assim

---

[7] Os dados empíricos obtidos a partir da manifestação dos professores em formação inicial se deu no contexto de uma disciplina curricular de uma instituição pública de ensino superior. Nesse sentido, os registros dos professores aqui destacados não explicitam as suas identidades, suas imagens e vozes, zelando-se assim pela dignidade e devida proteção aos participantes da pesquisa científica. Por essa razão, não foi solicitada prévia avaliação ética pelos conselhos adequados do projeto de pesquisa de que o trabalho decorre. Assim, assumimos e eximimos a Acta Scientiae de quaisquer consequências daí decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa, conforme orienta a Resolução Nº 510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil.

[8] A noção de habitus é aqui destacada como "um sistema de disposições duráveis e transponíveis que, integrando todas as experiências passadas, funciona em cada momento como uma matriz de percepções, apreciações e ações e possibilita o cumprimento de tarefas infinitamente diferenciadas graças à transferência analógica de esquemas adquiridos em uma prática anterior" (Bourdieu, 2002 [1972], p. 261).

o fosse não atenderia aos fundamentos da metodologia de um Percurso de Estudo e Pesquisa.

Especificamente, em vista de nosso objetivo, tomamos o seguinte recorte do problema inicialmente descrito por Ferreira e Guerra (2020):

> Pertenço a um povo parecido com os humanos. Possuo I boca, V olhos e Z membros, como eles. Mas me diferencio por possuir apenas A, ou seja, Z menos I, dedos em cada um desses membros, além de não possuir pelos, ou seja, O pelos em todo o corpo. Em meu planeta, nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde numericamente ao ano solar cristão da terra de 2000, obtivemos a seguinte produção:
>
> Quadro I – Representação de grãos ou tubérculos
>
> | **PRODUTOS** | **PRODUÇÃO** |
> |---|---|
> | Feijão | AZOIO |
> | Arroz | ZVAII |
> | Mandioca | ZZAAV |
>
> Em meu planeta usamos apenas os registros de representação V, A, Z, I e O para representar as quantidades. A partir das De De acordo com as informações descritas no texto, responda a seguinte questão: **Q_2** - Como provavelmente os Et´s chegaram à representação de quantidades do modo apresentado no texto? (Ferreira & Guerra, 2020, p. 10).

As análises, a seguir apresentadas, detêm-se sobre a tarefa **T_5** do CIMM realizada pelos professores, organizados em cinco grupos, aqui representados por ***FI_1***, ***FI_2***, ***FI_3***, ***FI_4*** e ***FI_5***, tendo em conta a sincronia dessa tarefa como as demais tarefas e, de nosso interesse, a tarefa **T_2**.

ANÁLISES DOS RESULTADOS ENCONTRADOS

A tarefa **T_5** demanda a difusão e defesa dos modelos, assim cada grupo FI_k apresentou e defendeu seu modelo e situação diante da classe [FI, D], em que FI representa o conjunto de professores em formação, ou todos os grupos, e D representa a direção de estudo ou professor formador.

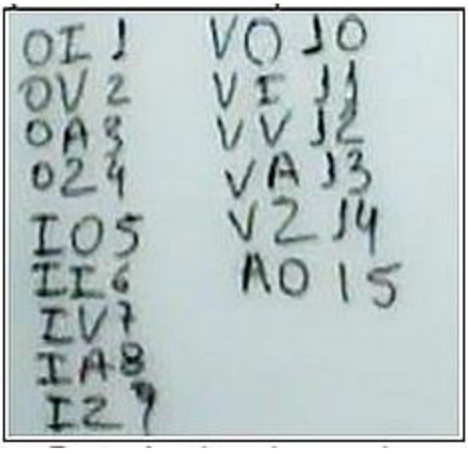
As situações St_k e os modelos M_k produzidos, após a realização das tarefas T_0, T_1, T_2, T_3 e T_4 no interior de cada grupo, foram postos por cada grupo para avaliação da classe [FI, D], mas nos detemos nas defesas das situações St_k e modelos M_k que consideramos de maior relevância para a construção da resposta final aprovada pela classe e por conter a defesa de elementos de respostas da tarefa T_2 que atende ao objetivo de buscar evidenciar a problemática da *modelagem matemática reversa*.

A situação St_1 e o modelo M_1 foram encaminhadas pelo grupo *FI_1* como segue:

> **FI_1** – *Eu fiquei pensando muito nessas relações e cheguei quase na mesma conclusão a respeito da representação que ela fez, fiz a mesma relação aqui... Só que o grupo um apresentou, a representação dos Et's, mas quando chega no 10 ela passa para nossa realidade, IO que seria representado pelo 10 pra gente...só que eu acredito ... na verdade... eu penso que, seria mais ou menos assim... o OI = 1, OV = 2, OA = 3 e OZ = 4, ai como o deles é quinário só vai até o 4 ... então quando chega aqui [...] fica mais ou menos como o grupo FI_1 fez... fica assim:*

Figura 1

Registro da relação entre letras e numerais. (Ferreira, 2020)



Isso quer dizer que a gente conta 1,2,3,4 só que quando chega no 5 é como se a gente chegasse no 9, então passa a ser IO = 5, a gente passa para o 10 e automaticamente o 1 vai pra frente e o 0 zero fica pra trás...

Deixa-me explicar ... quando chega no 99?

Vai para o 100, é como se fosse a última dezena, o 44 é a última, está entendendo.

Depreendemos da difusão que:

> **St_1**: Pode ser reduzida a realização da tarefa "relacionar os numerais decimais, enquanto nome de quantidades, com numerais quinários";

> **M_1**: Foi definido como uma correspondência um a um entre os numerais decimais, enquanto nome de quantidades, e os numerais quinários, em que estes seguem a mesma regra intuitiva de escrita de registros dos numerais decimais, ou seja, são constituídos de posições ocupadas por dígitos, no caso O (zero), I (um), V (dois), A (três) e Z (quatro) e cada posição, quando ocupada pelo dígito que correspondente ao valor máximo, no caso, Z, deve ser reiniciada a partir de O (zero), tomando o sucessor do dígito da posição a esquerda seguinte.

Posto à prova diante da classe [**FI, D**], uma limitação do modelo foi revelada diante do questionamento de D ao grupo $\boldsymbol{FI_1}$:

> **D -** *Se você fosse fazer, você chegaria na relação entre 2000 com AIOOO?*

> **FI_1 -** *Ah! professora ia demorar muito! O processo é longo...*

A dificuldade reside no esforço exigido de enumerar todos os numerais decimais até o numeral decimal 2000, já que não é possível encontrar isoladamente um numeral quinário (decimal) correspondente a um dado numeral decimal (quinário), em particular, quando esse numeral quinário (decimal) dado é um grande numeral decimal (quinário).

De outro modo, a validação do modelo matemático M_1 apresentada pelo grupo de professores $\boldsymbol{FI_1}$ ficou pendente, talvez por ser uma etapa do processo de MM extremamente difícil, segundo destacam Frejd e Bergsten

(2018, p.123, tradução nossa): "validar o modelo é extremamente difícil [...] sem uma negociação humana, confiando demais em modelos matemáticos como base, as coisas podem dar errado".

Nesse contexto de dúvidas, o grupo $\boldsymbol{FI_2}$ frente tarefa $\mathbf{T_1}$ do CIMM, a de investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar, encontrou um modelo matemático que pode ser descrito como $\mathbf{M_2}$: $\boldsymbol{d = r_N\beta^N + \cdots + r_1\beta^1 + r_0\beta^0 = \sum_{k=0}^{N} r_k\beta^k}$, segundo a representação posicional de base β (Ripoll, Rangel & Giraldo, 2016, p. 25):

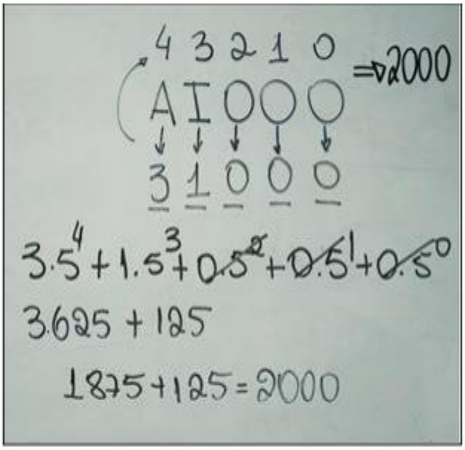
> $\mathbf{FI_2}$ −*Vou mostrar o que pesquisei, posso professora? Tudo que pesquisei aqui foi tirado de alguns artigos como https://pt.wikipedia.org/wiki/Codifica%C3%A7%C3%A3o, e youtuber:https://www.youtube.com/watch?v=2pGkFn4Sgao.*
>
> *Eu consegui relacionar o que a colega fez com que eu pesquisei, assim...a gente toma como princípio o sistema dos Et's que é o quinário e no meu ponto de vista é indiscutível tá, então temos: O →0, I → 1, V → 2, A → 3, Z → 4. A gente observa que é uma sequência são os números naturais, eu pesquisei na internet no site: http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch0d3s03.html.Eu descobri que tem uma fórmula, eu vou aplicar essa fórmula aqui e vocês vão ver se dá certo ou se não dá, tá bom então?*
>
> *Eu fiz para ver se tinha coerência. Estava certo porque simplesmente quando joguei a fórmula, neste fato AIOOO, eu queria saber se a fórmula que estava relacionado, daria 2000. Então bateu. O ET era normal tinha dois olhos, rsrs...*

A inserção do modelo matemático $\boldsymbol{M_2}$ criou condição para os professores construírem uma resposta sobre uma das problemáticas por eles levantadas, isto é, a de validar a relação do numeral quinário 31000 com o numeral decimal 2000.

Esse modelo permitiu ratificar resultados encontrados com o uso do modelo matemático $\boldsymbol{M_1}$. Entretanto, a problemática enfrentada pelos professores de representação de um numeral decimal em um numeral quinário permaneceu aberta. Como condição para enfrentar isso, foi encaminhada pela direção de estudo D, o uso do ábaco e, com isso, os professores construíram a nova *situação* $\boldsymbol{St_2}$ *para o modelo* $\boldsymbol{M_2}$. Inicia-se, explicitamente, o enfrentamento da tarefa $\mathbf{T_2}$, a busca de uma situação para um dado modelo.

Figura 2

Registro de uso do modelo matemático. (Ferreira, 2020)



A situação St_2 e modelo M_2 foram encaminhadas pelo grupo FI_3 como segue:

> **FI_3** - *Professora posso tentar mostrar como fiz? Vou tentar mostrar no ábaco, vamos começar pela unidade, se nosso sistema fosse o quinário certo?! Vamos contar 1, 2, 3, 4, ele passar para o pino seguinte, quando for 5 então, ele vai zerar as unidades não vai? Vamos contar de novo: 1, 2, 3, 4, então ele vai ficar 4 e vou usar uma bolinha de outra cor, encheu de novo e a gente tira e começa de novo, e passa para o próximo pino, toda vez que a gente contar de 4 em 4, no 5 zera e começa de novo.* (Figura 3)

Figura 3

Representação no ábaco. (Ferreira, 2020)

FI_5 – *Se a gente pega o ábaco, é interessante isso aqui, pegando três bolinhas, quantas cabem na unidade de ordem superior 2? quantos cabem? Até onde enche essa casa? Até 4, certo? Então vou colocar 4 bolinhas, vamos começar do zero, até quanto enche a casa?*

FI_1 – *4*

FI_5 – *Certo*

FI_3 – *O meu, parte da direita...*

FI_5 – *Não! não pode! Mantém o mesmo princípio, da esquerda para direita... então aqui só cabe 4, se fosse no sistema decimal caberia 9.*

FI_5 – *Posso colocar quantos então...*

FI_1 – *4*

FI_5 – *Posso colocar outra bolinha?*

FI_4 – *Não!!!*

FI_5 – *Então, vai contra o sistema, porque não suporta, a casa só suporta 4, então tiro da unidade de ordem dois e vou para* *a unidade de ordem 3, isso quer dizer que na unidade de ordem dois chegou no 5, por isso tiro e vou para a próxima, no caso a unidade de ordem três e represento com uma outra bolinha, com outra cor, no caso vermelha, coloco mais uma bolinha na unidade de ordem três, quanto fica?*

FI$_2$ – *Entendo que na nossa cabeça tá claro essa questão, mas quando se trata de ensinar para as crianças usando material concreto ... não conseguimos ....*

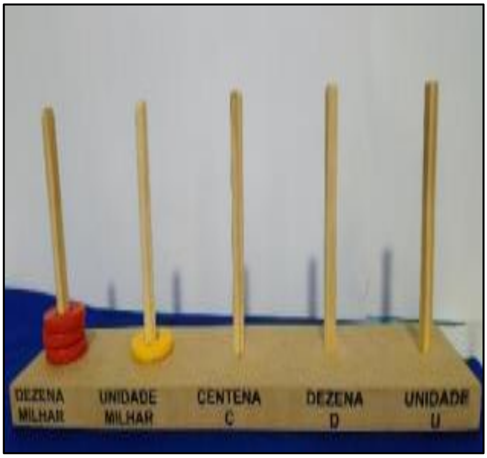
FI$_2$ – *Quero só concluir ... um modo de representar as potências....*

FI$_2$ – *625 + 625 + 625 que dá quanto? 1875*

FI$_2$ – *1875 mais 1, o amarelinho (125) dá quanto?...Dois mil.*

Figura 4

Representação por FI$_2$ do numeral quinário 31000 no numeral decimal 2000. (Ferreira, 2020)



FI$_5$ – *Observando o sistema quinário, eu fiz com a potência para o sistema decimal e funciona bacana, zera mesmo!! É um macete para zerar legal!*

FI_5 – *Próximo amarradinho $5^4 = 625$ e assim vai até a necessidade de cada um.*

Foi observado pela manifestação dos professores frente suas práticas, a seguinte organização praxeológica situacional:

St_2: Representar um numeral em um ábaco e vice-versa, interpretando as posições do ábaco como as potências constantes no modelo matemático **M_2** e vice-versa, ou seja, as potências constantes no modelo como posições do ábaco.

A situação **St_2** e o modelo matemático **M_2**, no entanto, não respondem à questão **Q_2** e, com isso, invalidam essa situação e o modelo, embora o modelo **M_2** responda a situação posta **St_2**. Isso foi observado na apresentação do grupo ***FI_4*** sujeito a atender a seguinte condição encaminhada pela direção de estudo ***D***.

D - *Agora precisamos construir a prática, porque isto aqui está no nosso nível. Agora precisamos fazer como ensinaremos para as crianças. Precisamos entender como isso pode funcionar com crianças. Na próxima aula (sessão) precisamos deixar claro o que é cada coisa, as noções básicas...*

FI_4 – *Agora vamos trabalhar no sistema quineral, em que a base não é 10. Então fica: 1 tampinha, 2 tampinhas, 3 tampinhas, 4 tampinhas e 5 tampinhas e fecha um amarradinho...[...],*

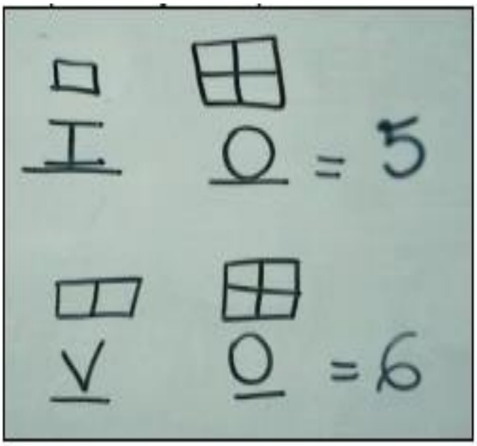
Figura 5

Contagem de tampas de garrafas pelo grupo. (Ferreira, 2020)

FI$_4$ – *[...] então ficamos com um amarradinho, formado por cinco unidades com mais duas unidades formei o sete, diferente de lá... que é outro sistema, mas eu formei também amarradinhos. A partir daí eu pulei a casa, ele é posicional, essa questão de ser posicional é crucial, pois ele precisa tomar a posição das casas e é preciso enxergar a posição das casas, por exemplo....*

Figura 6

Representação de quantidade das letras na base 5. (Ferreira, 2020)



FI$_5$ – *IO, quanto vale isso aqui?*

FI$_4$: *10*

FI$_5$ – *Nãooooo*

FI$_1$ – *4...*

FI$_5$ – *Nãooooooooo...*

FI$_3$: *é 5 ...*

FI$_5$ – *5... e vai bater lá na fórmula, que o grupo FI_2 apresentou. Se a gente fizer e remexer e fazer cálculos ... a gente vai bater lá .... lá na fórmula que o outro grupo apresentou.*

FI$_5$ – *E é isso aí ... e a gente segue na próxima ... e vou deixar para próxima aula, tem outras coisas sim, mas vou deixar pra próxima aula, vou trazer o material dourado para apresentar como se fosse para as crianças, e ai a gente desenvolve e segue os números ... eu cheguei no cinco, eu vou parar .... porque depois disso eu encontrei dificuldade .... eu não consegui enxergar....*

FI_5 – *Agora preciso de ajuda...vocês concordam comigo que o IO é igual a 5? Que é o 5 ... e o 6? seria V e ausência? Sim ou não? vou escrever aqui no quadro essa representação VO = 6.*

FI_1 – *Não!*

FI_5 – *Não? Porque não?*

FI_1 – *Porque seria ausência com o próximo*

FI_5 – *Qual seria o próximo?*

FI_1 – *O "I"*

FI_5 – *O "I" já tem*

FI_1 – *Pois é, mas você não substituiu a ausência por 1. Aí não seria o caso ... Sem ouvir*

FI_5 – *Aqui eu represento dois, que para mim é o V.... pois é aqui .... vai entrar a discórdia. É um problema... por isso disse que seria bom parar aqui ... por que vai ter discórdia.*

A manifestação da classe [FI, D] evidenciou um confronto entre as situações **St_1** e **St_2** com a explicitação de **VO=6** *(Figura VI),* obtido com base em **M_1** e **M_2**, mas contradizendo o modelo **M_1** que destaca a correspondência de **II = 6.** De outro modo**,** os professores não conseguiram representar numerais no ábaco por quantificação.

Nesse sentido, o modelo **M_2** associado à situação **St_2** não respondeu à questão **Q_2**, cuja resposta demanda representar uma quantidade física em um numeral. Uma situação para responder **Q_2** não foi encontrada, embora pudesse ser derivada do modelo **M_2**.

A condição do uso de materiais concretos para serem quantificados sem o uso do ábaco, introduzida pelo diretor de estudo D, encaminhou os professores **FI** ao encontro de nova situação **St_3** frente ao modelo **M_2**. Essa situação ***St_3*** foi encaminhada pelo grupo **FI_5** como segue:

FI_5 – *São 7 tampinhas, vou juntar, ou melhor agrupar de dois em dois, porque estamos fazendo na base 2.*

FI_5 – *Esse que sobrou, é a Unidade Simples?!*

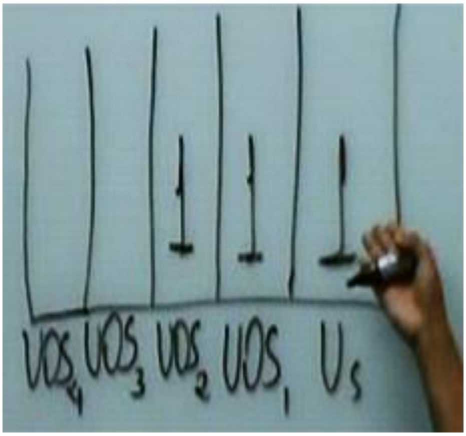
FI_5 – *Sim*

FI_5 – *Tá, e agora? Agrupa de novo, professora?*

> ***FI*₅** – *Então vai ficar assim? [dúvida], eu junto de novo? Duas de duas, sobra 1 de novo, então fica 1 agrupamento de 4 e 1 agrupamento de 2, então fica 1 na US,1 na UOS1 e 1 na UOS2.*
>
> ***FI*₅** – *Então, registra no ábaco escrito as quantidades por tipos agrupamentos obtidos.*

Figura 7

Registro do numeral no sistema binário. (Ferreira, 2020)



O modelo $\mathbf{M_2}$ pode, então, ser associado à seguinte situação $\mathbf{St_3}$ de construção de um numeral posicional, inclusive quinário, a partir da quantificação de um aglomerado de unidades discretas sem o uso de um ábaco físico:

> $\mathbf{St_3}$**:** Representar por um numeral a partir da quantificação de um dado aglomerados de unidades físicas, considerando diferentes tipos de agrupamentos dessas unidades.

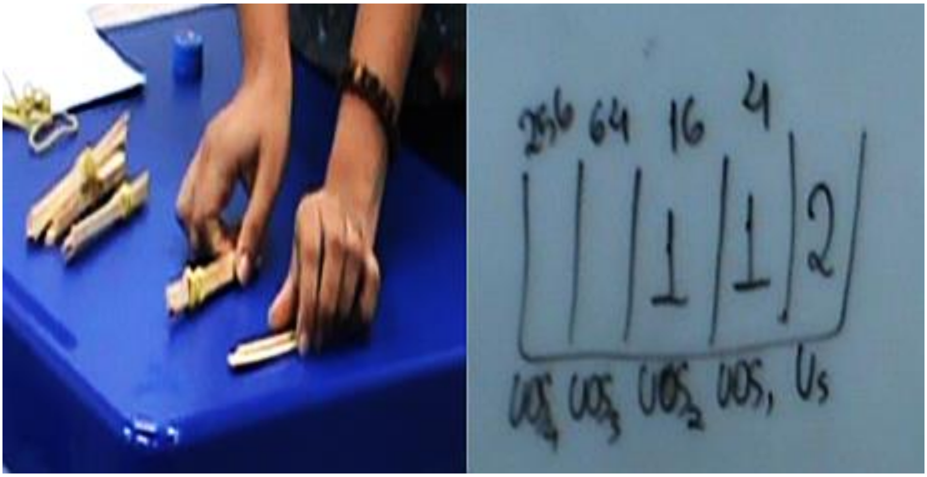
A díade [$\mathbf{St_3}$; $\mathbf{M_2}$] permitiu aos professores constatarem as limitações das díades [$\mathbf{St_1}$; $\mathbf{M_1}$] e [$\mathbf{St_2}$; $\mathbf{M_2}$]. Isso foi revelado por manifestações da classe [FI, D] em se apropriar da prática algorítmica de organização de um aglomerado de unidades a serem quantificadas por agrupamentos.

> ***FI*₁**: *Entendi!!!!! Quero fazer de novo!*
>
> ***FI*₄**: *Colega troca a base pra ver se melhora, faça na base 4.*

> ***FI_1**: A contagem agora é de 4 em 4 e o número é 22. Vamos separar e amarrar, ficou então 5 grupos de 4 sobrando 2, que é a unidade simples...reagrupando teremos 1 grupo de 4 de 4 sobrando 1 grupo de 4. Fica então 1 unidade simples, 1 unidade de ordem superior 1 e 1 de ordem superior 2. (Figura VIII)*

Figura 8

Agrupamento de 4 de 4 palitinhos e sua representação no ábaco escrito. (Ferreira, 2020)



Além disso, e não menos importante, vale observar que a situação ***St_3*** encaminhou uma resposta à questão **Q_2**, na medida em que revelava um possível modo de como chegar a um numeral por quantificação de grandezas discretas.

A resposta à questão **Q_2** encontrada pela classe pode ser descrita por meio de quatro tarefas divididas em duas etapas:

- ✓ ***1ªEtapa: Definição:***

  t_1 – Defina o limite β, ou base, da contagem de unidades;

- ✓ ***2ª Etapa: Processo iterativo -*** Começando com as unidades simples:

t_2 – Se possível, construa agrupamentos de ordem superior as existentes formando novos agrupamentos de β unidades de agrupamentos de ordem imediatamente inferior.

t_3 – Registre a quantidade das unidades de agrupamentos que estavam sendo agrupados no passo anterior.

t_4 – Se a quantidade de novos agrupamentos de maior ordem formados, for inferior ao limite de contagem β, registre essa quantidade na posição correspondente e finalize destacando o numeral escrito. Caso contrário, retorne a tarefa t_2.

Em resumo, o CIMM incluiu uma dinâmica complexa de mobilização de tarefas para sua realização e, entre elas, ficou evidente a tarefa $\mathbf{T_2}$ de *modelagem matemática reversa* como uma problemática aos professores em formação. Essa tarefa promoveu a “desmagificação” dos numerais por serem boas “máquinas” para produção de conhecimentos (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006) relativos ao domínio de realidade que podem estar associados.

ENCAMINHAMENTOS E PERSPECTIVAS FUTURAS DA PROBLEMÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA REVERSA

Este artigo, além de atender uma das recomendações de Niss (2015) (apud Stillman, 2019) sobre o necessário desenvolvimento de pesquisas teóricas e empíricas em modelagem prescritiva ou normativa, dado que a estruturação de quantificação de grandezas físicas dos numerais governam ou traduzem “fielmente” domínios de realidades, revelou evidências sobre a problemática da *modelagem matemática reversa* no sentido da formulação reversa que parte do modelo para o conhecimento ou construção de uma situação em contexto que pode estar associada ao modelo.

Os resultados dessa pesquisa mostraram que essa problemática da *modelagem matemática reversa* integrante do processo de MM, para ser vencida, pode exigir que o professor, ou diretor de estudo, introduza condições que permitam levar os sujeitos do estudo ao encontro de respostas possíveis a essa problemática.

Aqui, as condições introduzidas consideravam que o modelo matemático de estruturação de numerais posicionais pode ser visto como do tipo normativo (Greefrath & Vorhölter, 2016), no sentido de que descreve, de modo fiel, uma realidade, nesse caso, de quantificação de grandezas físicas. Daí os encaminhamentos do diretor de estudos aos professores, para que utilizassem aglomerados de unidades discretas para serem quantificadas. Enquanto essa condição não foi atendida, a situação procurada não foi encontrada pelos professores em formação.

Ficou evidente o que preconiza a TAD sobre a mudança da qualidade das relações com o saber (Chevallard, 2005), nesse caso, dos professores com os numerais posicionais e isso caracteriza que o CIMM realizado é uma resposta possível ao problema de formação de professores, relativo ao sistema de numeração posicional, que inclui o SND.

O papel do diretor de estudos foi determinante para o avanço da investigação, posto que é "quem deve 'surpreender' continuamente para cumprir com sua função [...], isto quer dizer a condição mínima" (Chevallard, 2005, p. 81, tradução nossa) que contribuiu para o encontro dos professores com a situação de quantificação de grandezas físicas de estruturação do numeral.

Além disso, pareceu-nos claro que não basta conhecer ou não conhecer saberes matemáticos para alcançar a compreensão necessária para enfrentar a *modelagem matemática reversa* que demanda o funcionamento de uma prática social, como a de quantificação, por exemplo, para a associá-la a um dado modelo matemático, mesmo que esse modelo possa funcionar como normativo dessa prática. Isso ratifica que "entre um saber e uma prática existe uma distância nunca inteiramente abolida"[9] (Chevallard, 2005, p. 171, tradução nossa).

Por fim, a prática de MM escolar deve considerar, sobretudo, uma ampla variedade de contextos de situações que permitam alunos e/ou professores o reconhecimento de situações frente a um tipo de problema em contexto, tendo em vista que "não podemos esperar qualquer transferência mística de um exemplo ou contexto para outro"[10] (Blum, 2015, p. 84, tradução nossa). Nessa linha e tendo em conta os resultados aqui encontrados, ficamos estimulados para realizar futuras pesquisas sobre possíveis problemáticas que

[9] Fragmento do texto: *que entre un saber y una práctica hay una distancia nunca enteramente abolida.*

[10] Fragmentos do texto: *can not expectany mystical transfer from one exampler contexto another.*

podem se revelar a partir das tarefas do CIMM e, em particular, sobre o ensino da *modelagem matemática reversa*.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

GJMS e RSRF encaminharam a investigação apresentada. RBG supervisionou o planejamento e execução delimitando o uso do ciclo investigativo de modelagem matemática. GJMS, RSRF e RBG planejaram a questão de investigação, o objetivo, os recursos teórico-metodológicos, as análises dos dados empíricos e resultados encontrados, bem como os encaminhamentos da investigação e perspectivas futuras.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que respaldam este estudo e investigação serão disponibilizados pelo autor para correspondência (GJMS), mediante solicitação prévia.

REFERÊNCIAS

Barquero, B. (2020). Introduction to ‘research on the teaching and learning of mathematical modelling: approaches for its design, implementation and analysis’. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17*, 1-4.

Barquero, B. Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. enseñanza de las ciencias: *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(3), 339-352.

Barquero, B. & Jessen, B. E. (2020). Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. *Avances de Investigación em Educación Matemática, 17*, 98–113.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In: Kaiser, G. Blum, W. Borromeo Ferri, R. & Stillman, G. A. (ed.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. Springer.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? In: Cho, S. J. (ed.). *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96).

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 86-95.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activitémathématique aux ostensifs. objetd'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentos antropológicos das organizações didáticas: das "oficinas de práticas matemáticas" às "rotas de estudo e pesquisa". In: Bronner, A. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, M. Chevallard, Y. Cirade, G., & Ladage, C. (ed.) *Difusor los mathematiques (et les autres savoirs) commed'outils de connaissance et acção* (pp. 49-85).

Bosch, M. Chevallard, Y., & Gascón, J. (2006). Science or magic? the use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the fourth congress of the european society for research in mathematics education*.

Bosch, M. García, F. J. Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2006, agosto). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar: Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Bourdieu, P. (2002) (1972). *Esboço de uma teoria da prática*: *precedido de três estudos de etnologia kabila*. Celta.

Brousseau G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In: Noirfalise R. et Perrin-Glorian M. J. *Actes de la VIIIe ecoled'été de didactique des mathématiques* (p. 3-46).

Cenci, D. Becker, M. L. R., & Mackedanz, L. F. (2015). Produções acadêmicas sobre o ensino do sistema de numeração decimal: o estado da arte. *Revista de divulgação científica em ciências exatas e tecnológicas PORANDU, 1*(1), 29-41.

Chevallard, Y. (1999). L'analise des pratiques enseignantes em theórie anthopologique du didactique, recherches em didactiques des mathematiques. *La Pensée Sauvage Éditions, 19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2009a). La tad face au professeur de mathématiques. *Communication au Séminaire DiDiST de Toulouse*.

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique.

Chevallard, Y. (2019). On using the atd: some clarifications and comments. *Educ. Matem. Pesq*., *21*(4), 1-17.

Chevallard, Y. (2013). Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1*: Enquête codisciplinaire & EDD*.

Chevallard, Y. Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e aprendizagem*. Artmed.

Ferreira, R. S. R. & Guerra, R. B. (2020). Formação inicial de professores que ensinam matemática e o sistema de numeração decimal. *Revista de estudos e pesquisas sobre ensino tecnológico (educitec)*, *6* (Ed. Especial), 1-17.

Ferreira, R. S. R. (2020). *O sistema de numeração decimal na formação de professores dos anos iniciais*. [Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil].

Ferreira, R. S. R. Nunes, J. M. V., & Guerra, R. B. (2019). Atividade de estudos e investigação sobre o sistema de numeração posicional na formação de professores dos anos iniciais. *Educação Matemática Pesquisa, 21*(5), 274-288.

Florensa, I. García, F. J., & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 21–37.

Frejd, P. & Bergsten, C. (2018). Professional modellers conceptions of the notion of mathematical modelling – ideas for education. *ZDM Mathematics Education*, *50,* 1-2, 117-127.

García, F. J. Baquero, B. Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75-94.

Garcia, F. J. Gascón, J. Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226-246.

Greefrath, G. & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: approaches and developments from german speaking countries.* Springer.

Guerra, R. B. & Silva, F. H. S. (2009). Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. *Perspectivas da Educação Matemática, 2*(3), 95-119.

Itzcovich, H. (2008). *La matemática escolar: las prácticas de enseñanza en el aula*. Aique.

Iversen, S. M. & Larson, C. J. (2006, junho). Simple thinking using complex math vs. complex thinking using simple math: a study using model eliciting activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities. *ZDM*, *(38)*3, 281-292.

Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal Of Mathematical Modelling and Application, 1*(6), 3-21.

Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 48-52.

Ripoll, C. Rangel, L., & Giraldo, V. (2016). *Livro do professor de matemática na educação básica: números naturais*. SBM.

Sadovsky, P. (2010). *La enseñanza de la matemática en la formación docente para la escuela primaria*. Ministerio de educación de la nación.

Schukajlow, S. Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM – Mathematics Education, 50*(1–2), 5-18.

Sodré, G. J. M. & Guerra, R. B. (2018). O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq*., *20*(3), 239-262.

Sodré, G. J. M. (2021). Mathematical Modelling and Didactic Moments. *Acta Sci., 23*(3), 96-122.

Sodré, G. J. M. (2019). *Modelagem matemática escolar: uma organização praxeológica complexa*. [Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil].

Stillman, G. A. (2019). State of the art on modelling in mathematics education-lines of inquiry. In. Stillman, G. A. & Brown, J. P. (eds.), Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. *13th International Congress on Mathematics Education* (pp.1-20).

Terige, F. & Wolfman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, (43)*, 59-83.

Vorhölter, K. Greefrath, G. Borromeo Ferri, R. Leiß, D., & Schukajlow, S. (2019). M*athematical modelling*. In: Jahnke, H. N. Hefendehl-Hebeker, L. (eds.). *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research. 13th International Congress on Mathematics Education* (pp. 91-114).