ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7705

Toma de decisiones en situaciones de incerteza como un saber matemático escolar

Andrea Vergara-Gómez[a]

Universidad Católica del Maule, Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Talca, Chile[a]

Recibido para publicación 4 mayo 2023. Aceptado tras revisión 28 jun. 2023
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Uno de los objetivos explícitos de las matemáticas escolares es preparar a los estudiantes para la toma de decisiones. Sin embargo, la toma de decisiones por sí misma no suele ser considerada un contenido curricular. Recientemente el currículo escolar chileno de matemáticas incorpora la toma de decisiones en contextos de incerteza como un objeto de enseñanza en la formación diferenciada de educación secundaria. **Objetivo:** Discutir desde una perspectiva socioempistemológica cómo se propone la enseñanza de la toma de decisiones en contexto de incerteza en el currículum chileno, teniendo en cuenta tanto el programa de estudio como el texto escolar oficial. **Diseño**: A partir de una metodología cualitativa, se usa análisis temático para identificar criterios históricos-epistemológicos y análisis de contenido para la revisión de las actividades de los textos curriculares. **Entorno y participantes:** Se analizan 3 corpus textuales: una obra histórica, el programa de estudio y el texto escolar oficial. **Recopilación y análisis de datos:** Aplicando el análisis de contenido interpretativo, se analizan las actividades propuestas para la enseñanza de la toma de decisiones en contextos de incerteza, considerando como criterio la distinción epistemológica entre decisiones de un solo caso y procesos de toma de decisiones, así como también el uso de probabilidades *a priori* y *a posteriori*. **Resultados:** El texto escolar provee una mayor proporción de tareas o preguntas para involucrar al estudiante en la toma de decisiones que el programa de estudio, pero no siempre de manera explícita; con énfasis en lo calculatorio y uso de fórmulas. Con base en los criterios de análisis definidos, fue posible clasificar todas las actividades excepto una, relacionada con el problema Monty Hall. **Conclusiones:** Las actividades propuestas tanto en el texto escolar como en el programa de estudio promueven casi exclusivamente decisiones de un solo caso, con predominio de probabilidades *a posteriori*, lo que genera una superposición conceptual entre azar y aleatoriedad.

Palabras clave: Toma de decisiones; Azar; Currículum Escolar; Aleatoriedad; Incertidumbre.

Corresponding author: Andrea Vergara Gómez. Email: avergarag@ucm.cl

Tomada de Decisão em Situações de Incerteza como Conhecimento Matemático Escolar

RESUMO

Contexto: Um dos objetivos explícitos da matemática escolar é preparar os alunos para a tomada de decisões. No entanto, a tomada de decisão por si só não é considerada um conteúdo curricular. Recentemente, o currículo escolar chileno de matemática incorpora a tomada de decisões em contextos de incerteza como objeto de ensino na formação diferenciada do ensino médio. **Objetivo**: Discutir, desde uma perspectiva sociopistemológica, como se propõe o ensino da tomada de decisão em um contexto de incerteza no currículo chileno, levando em consideração tanto o programa de estudos quanto o livro escolar oficial. **Design**: Com base em uma metodologia qualitativa, utiliza-se a análise temática para identificar critérios histórico-epistemológicos e a análise de conteúdo para revisar as atividades dos textos curriculares. **Ambiente e participantes**: são analisados 3 corpora textuais: uma obra histórica, o programa de estudos e o texto escolar oficial. **Coleta e análise de dados**: Aplicando a análise de conteúdo interpretativa, analisam-se as atividades propostas para o ensino da tomada de decisão em contextos de incerteza, tendo como critério a distinção epistemológica entre decisões de caso único e processos de tomada de decisão, bem como a utilização de e probabilidades posteriores. **Resultados**: O texto escolar apresenta maior proporção de tarefas ou questões para envolver o aluno na tomada de decisão do que o programa de estudo, mas nem sempre de forma explícita; com ênfase no cálculo e uso de fórmulas. Com base nos critérios de análise definidos, foi possível classificar todas as atividades exceto uma, relacionada ao problema de Monty Hall. **Conclusões**: As atividades propostas tanto no manual escolar como no programa de estudos promovem quase exclusivamente decisões de caso único, com predominância de probabilidades posteriores, o que gera uma sobreposição conceptual entre acaso e aleatoriedade.

Palavras-chave: Tomada de decisão; Azar; currículo escolar; Aleatoriedade; Incerteza.

INTRODUCCIÓN

La contingencia sanitaria mundial desencadenada por la pandemia, entre sus múltiples consecuencias humanas, sociales, económicas y filosóficas, visibilizó con claridad lo vital que son las habilidades matemáticas y estadísticas para la toma de decisiones. En general, los desafíos del siglo XXI exigen que los datos y el conocimiento, ampliamente disponibles en una era global, se usen para mejorar la toma de decisiones en todos los niveles con sentido de gobernanza (Lopez-Claros et al., 2020). La toma de decisiones es inmanente a la vida cotidiana y se vuelve crítica especialmente en presencia de incertidumbre. La incertidumbre puede deberse a la naturaleza del fenómeno en sí o a la falta de capacidad o conocimiento de los individuos que interactúan con el fenómeno (Helton, 1997). Según van der Bles et al. (2019), el conocimiento en el que se basan las decisiones siempre está envuelto por diferentes tipos y grados de incertidumbre. De ahí, el carácter ubicuo de esta.

Desde el ámbito de la educación, hace más de 10 años que los estándares internacionales resaltan que el deber de las matemáticas escolares es preparar al futuro ciudadano para enfrentar los problemas y desafíos de la vida cotidiana (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2010, 2019). En este sentido, es razonable esperar que dicha preparación incluya el desarrollo de habilidades para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Si bien nociones como probabilidad, aleatoriedad, datos, azar, incertidumbre y riesgo se manifiestan de manera combinada en la enseñanza de la probabilidad y la estadística (Sriraman & Chernoff, 2020), no son conceptos necesariamente equivalentes. Por ejemplo, cuando las estimaciones o cálculos de probabilidad no están disponibles, hablamos de "toma de decisiones bajo incertidumbre", en lugar de "toma de decisiones bajo riesgo" (Knight, 1921). Estas, como otras diferencias alrededor de la toma de decisiones, poseen bases sociales y epistemológicas que requieren ser atendidas.

La investigación ha evidenciado vínculos entre el desarrollo del pensamiento probabilístico y la capacidad para razonar, hacer inferencias y tomar de decisiones bajo incertidumbre, en estudiantes de preescolar (Denison & Xu, 2014), de primaria (Malaspina & Malaspina, 2020) y de secundaria (Vergara-Gómez et al., 2020), como también en profesores de matemáticas (Elbehary, 2021). Asimismo, desde la Estadística, se reconoce que la importancia de su enseñanza a nivel escolar está en preparar ciudadanos capaces de tomar decisiones reales con base en los datos (Lajoie, 1998; Shaughnessy, 2019). De esta forma, tomar decisiones adecuadas al enfrentar la incertidumbre es una necesidad formativa, que suele ser atendida por la enseñanza escolar al incluir la probabilidad y la estadística en los planes de estudios, desde la educación primaria hasta la educación superior (Batanero, 2020).

Respecto del rol de la enseñanza y aprendizaje de la incertidumbre, Pratt y Kazak (2017) realizan una revisión de la literatura, encontrando tres ejes de desarrollo: heurísticas y sesgos; compromiso conceptual y experiencial con la incertidumbre, y perspectiva de modelado sobre la probabilidad, siendo el primer eje el que principalmente se relaciona con el estudio de los procesos de toma de decisiones. Aunque la presencia de la incertidumbre es permanente en distintos contextos cotidianos, su matematización surgió de manera tardía, gracias al desarrollo de la probabilidad (Greer & Mukhopadhy, 2005). De ahí que incertidumbre y probabilidad se aborden en estrecha relación.

Las decisiones en situaciones de incerteza son esencialmente apuestas cuyos resultados están determinados tanto por las elecciones realizadas por las personas involucradas como por la especificidad del procedimiento aleatorio asociado (Cortada, 2008). Al mismo tiempo, las situaciones inciertas se caracterizan por la imposibilidad de calcular las probabilidades de todos los casos y, como tales, por procesos de toma de decisiones que no pueden ser completamente deductivos o inductivos, sino que tienden que ser heurísticos (Mousavi y Gigerenzer, 2017). Una heurística "es una estrategia que ignora parte de la información, con el objetivo de tomar decisiones con mayor rapidez, frugalidad y/o con precisión que los métodos más complejos" (Gigerenzer y Gaissmaier, 2011, p. 454). En definitiva, las estrategias que utilizamos y las justificaciones que elaboramos para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre exigen marcos de explicación más amplios.

Hoy en día, dado el protagonismo que ha adquirido la toma de decisiones en contextos de incertidumbre, consideramos fundamental reflexionar sobre este tema desde la Educación Matemática y Estadística. Algunas investigaciones apuntan a que los juicios basados en heurísticas simples, el sentido común o el uso de la intuición son a menudo erróneos para tomar decisiones (Garfield y Ahlgren, 1988; Shaughnessy et al., 1996). Pero las ideas intuitivas son persistentes, incluso cuando se reconoce que son falsas y han sido sometidas a procesos de enseñanza correctivos (Garfield y Ben-Zvi, 2007). Así, la relación entre la toma de decisiones en contextos de incertidumbre y el uso de la intuición es un tema de estudio recurrente. De hecho, la discusión sobre los conflictos que surgen entre la intuición y la razón cuando se toman decisiones en contextos de incertidumbre se remonta al trabajo de Kahneman y Tversky (1973), esto es, lleva casi medio siglo de desarrollo. En estas primeras investigaciones, las estimaciones intuitivas se consideraron un recurso perjudicial para elaborar inferencias. Sin embargo, investigaciones más recientes (Arkes et al., 2016; Kubricht et al., 2017) han demostrado que, para resolver problemas de gran complejidad e incertidumbre, el uso de la intuición y estrategias heurísticas son recursos válidos que facilitan la elaboración de inferencias.

En particular, considerando situaciones de aprendizaje a nivel escolar, se ha analizado la relación entre los procesos de toma de decisiones, tanto bajo riesgo como bajo incertidumbre, y el desarrollo del pensamiento probabilístico (por ejemplo, Brovcnik y Kapadia, 2011; Martignon, 2014; Bennett, 2014). En términos generales, estos estudios coinciden en que, si bien la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre exige un razonamiento probabilístico, existen otros elementos que prevalecen en el momento de decidir, que no se basan en cálculos formales de probabilidad, sino en estrategias simples e intuitivas. En efecto, la intuición ha sido uno de los aspectos más complejos a tratar en la construcción de conceptos probabilísticos (Fischbein, 1975; Gandhi, 2018). Así, si bien existe variada investigación que aborda la toma de decisiones bajo incertidumbre en situaciones de enseñanza y aprendizaje a nivel de la Matemática o la Estadística escolar (Shi, 2000; Borovcnik, 2015; Serradó-Bayés, 2018; Ingram, 2022), aún se requiere investigación que indague en las bases históricas y epistemológicas de la toma de decisiones y sus eventuales alcances didácticos.

En el caso de Chile, durante décadas, los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre no habían sido considerados en el currículo nacional. El año 2020, este tema se incorporó al plan diferenciado de educación matemáticas humanista-científico para los últimos dos años de escolaridad obligatoria. Teniendo en cuenta estos antecedentes, nos interesamos por comprender los tipos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre, junto con los posibles conocimientos probabilísticos relacionados, partiendo desde una perspectiva histórica epistemológica. A partir de esta base conceptual se realiza una revisión y clasificación de todas las actividades propuestas en el libro de Texto escolar y el Programa de estudio, documentos que apoyan la implementación de la nueva asignatura propuesta por el Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. Se identificaron qué actividades utilizaban contextos o fenómenos asociados a situaciones de incertidumbre y cómo estas incorporaban auténticas preguntas y/o tareas para promover la toma de decisiones.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Socioepistemológica de la Educación Matemática (TSME), aborda "los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple de las dimensiones del conocimiento en uso, mediante el estudio de la interacción entre epistemología, dimensión sociocultural (énfasis en el valor del uso), procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza (patrimonio cultural)” (Cantoral, 2019, p. 791). Desde esta perspectiva, el presente estudio considera los procesos de toma de decisiones como conocimiento matemático-estadístico en uso. La TSME propone problematizar aquellos procesos deliberados que permiten la construcción, el intercambio y el uso del conocimiento matemático. De esa manera, el conocimiento en uso "se construye, reconstruye, significa y resignifica; se encuentra en el tiempo y el espacio; se explora desde el punto de vista de los que aprenden, de los que inventan, de los que usan" (Cantoral, 2013, p. 97), de ahí que su análisis no se limite a las fronteras del conocimiento matemático escolar. Se hace hincapié en entender la toma de decisiones como una actividad humana, explorándola en sus dimensiones sociales, culturales e históricas. Como tal, la toma de decisiones constituye una parte inmanente de la vida cotidiana, que opera tanto en capas individuales, colectivas e institucionales, y que pone en uso diferentes conocimientos y habilidades provenientes de varias disciplinas. Dado el objeto de estudio, nos centramos específicamente en los saberes matemáticos-estadísticos implicados en la matemática escolar.

Una forma de realizar un análisis didáctico en la TSME es estudiando este conocimiento matemático-estadístico en uso a través del análisis de su *historización* y *dialectización* (Cantoral, 2013). Al historizar, el conocimiento en uso se ubica en el tiempo y el espacio, explorado desde el punto de vista de quienes lo inventan, aprenden y utilizan, asumiendo una perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, 2013). Al concebir la existencia de un conocimiento en uso en el proceso continuo de construcción, se han identificado tres momentos fundamentales de *historización*: *génesis*, *desarrollo* y *transversalidad* (ver Figura 1).

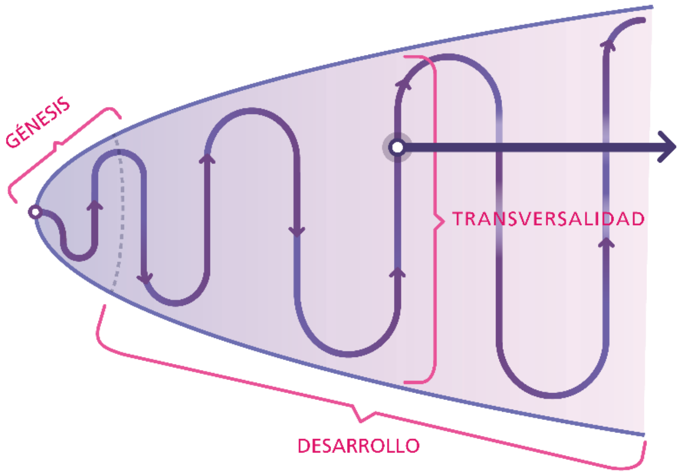
En la génesis, se exploran los aspectos de la *historización*, relacionados con la producción de conocimiento en uso y sus significados germinales; en el momento *desarrollo* se analiza su trayectoria histórica a lo largo del tiempo, y en la *transversalidad* se estudia cómo se utiliza el conocimiento en diferentes prácticas humanas (Espinoza et al., 2018).

En esta investigación, se lleva a cabo la *historización* analizando específicamente el momento germinal del conocimiento en uso, en el que el interés es situarse en los contextos, las intenciones y las actividades específicas del ser humano, que acompañaron y fomentaron la producción de conocimiento (Espinoza et al., 2018). El análisis de los momentos germinales es de gran importancia, dado que en ellos podemos explorar el significado constitutivo y esencial del conocimiento matemático en uso. En esta línea, la

TSME entiende la resignificación como el proceso de apropiación progresiva de significados ubicados en contextos específicos (Cantoral, 2013).

Figura 1

Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del conocimiento en uso. (Espinoza et al., 2018, p.252)



Reconocemos los significados germinales como piezas fundamentales para entender el conocimiento en uso (Espinoza et al., 2018). Sin embargo, estos a menudo son difusos o invisibles en la matemática y la estadística escolares en la actualidad (Cantoral, 2013). Por esta razón, la *dialectización* se propone como un proceso de análisis didáctico en el que se contrastan los resultados de la *historización* con la forma en que ciertas piezas del conocimiento matemático-estadístico se conciben, organizan y enseñan en las escuelas, en búsqueda de generar innovaciones didácticas.

METODOLOGÍA

El enfoque de investigación es cualitativo, con alcance descriptivo. Con respecto a los métodos en la fase de *historización*, a través de una búsqueda documental en la biblioteca digital francesa Gallica, se identificó un libro que es precursor del estudio de la toma de decisiones en contextos de incertidumbre. La obra se titula *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, publicada en 1843 por el matemático y economista Antoine Augustin Cournot (1801-1877).

Este trabajo no solo sintetiza el trabajo de Cournot sobre la teoría de la probabilidad, sino que también expone una epistemología sin precedentes para explicar la relación entre las teorías que constituyen el conocimiento científico y la realidad empírica (Martin, 2007). Además, proporciona una visión filosófica sobre cómo aplicar el uso de probabilidades y estadísticas para comprender mejor aquellos problemas que fueron adquiriendo cada vez mayor relevancia en el siglo XIX: demografía, tasación de primas de seguros de vida, comportamiento del mercado financiero, juegos de azar y la toma de decisiones en los tribunales civiles, entre otros.

El libro fue analizado utilizando el método híbrido de análisis temático (Boyatzis, 1998), que articula un análisis de la obra y su contexto de producción. La codificación y el planteamiento de temas se realizaron utilizando el software ATLAS.ti 8. El análisis temático híbrido considera pasos deductivos (impulsados por la literatura) y pasos inductivos (impulsados por los datos), que se describen en la Tabla 1.

Tabla 1

Etapas y pasos utilizados para el Análisis Temático Híbrido de la obra Exposition de la théorie des chances et des probabilités (1843). Adaptado de Boyatzis (1998).

Etapas del análisis temático híbrido	Pasos	Tipo de análisis
I. Revisión preliminar (codificación primitiva)	1. Delimitación de unidades semánticas. 2. Selección de muestras para codificación inductiva preliminar. 3.Codificación inductiva preliminar completa.	Inductivo
II. Desarrollo de Temas y Código (Codificación Temática)	1. Reducción de la información en bruto. 2. Identificación de relaciones entre códigos primitivos.	Inductivo

	3. Refinar y validar grupos de códigos primitivos. 4. Temática a través de las relaciones	Deductivo
III. Evaluación del tema	1. Evaluación cualitativa interna de los temas. 2. Validación cualitativa de los temas, a través del análisis de expertos.	Deductivo

Como resultado de este análisis, se obtuvieron 3000 códigos, organizados en 45 grupos, los que dieron lugar a 6 temas, utilizando las funciones de relación y redes de ATLAS.ti 8. Los 6 temas se denominaron: *aleatoriedad, variabilidad, distribución, contextos, leyes indeterministas* y *decisión*. Cada uno de estos temas reportó significados característicos de los inicios de la matematización de los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Para los fines de esta investigación, se articulan los significados germinales proporcionados por los temas de *aleatoriedad* y *decisión*, que permiten la construcción de una base conceptual para reconocer auténticas situaciones aleatorias que demandan procesos de toma de decisiones.

En relación con la fase de dialectización, se sigue un análisis de contenido interpretativo (Drisko y Maschi, 2016) para analizar la asignatura Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, propuesta por el currículo chileno para la formación científica humanística diferenciada, correspondiente a los niveles de 3º y 4º de Educación Secundaria (16 y 17 años). Esta asignatura aborda el razonamiento y la toma de decisiones en situaciones de incerteza. El análisis considera la revisión y clasificación de todas las actividades contenidas en el Programa de estudio y la unidad sobre toma de decisiones del Texto escolar. Dado que el análisis de contenido interpretativo atiende tanto a lo manifiesto como a lo latente, inicia con una codificación emergente que luego se contrasta de manera flexible con las categorías definidas *a priori* (Drisko & Maschi, 2016). De esta manera, se realiza una revisión preliminar de los datos, la que permite identificar la estructura común entre ambos corpus (programa y unidad de aprendizaje del texto escolar). Luego se aplican los criterios de clasificación definidos deductivamente desde la teoría.

Como criterio de clasificación se consideró la presencia/ausencia de dos aspectos: 1. contextos o fenómenos de incertidumbre, 2. preguntas o tareas que invitan o requieren procesos de toma de decisiones por parte de los estudiantes. Para identificar adecuadamente el segundo punto se utilizaron los significados y características de la articulación de los temas decisión y aleatoriedad, resultantes del análisis temático informado anteriormente.

Para organizar el recuento y visualización se consideraron las etapas y pasos que se describen en la Tabla 2.

Tabla 2.

Etapas y pasos utilizados para el análisis de contenido de los recursos curriculares asociados a la asignatura Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Etapas del análisis		Pasos
I.	**Identificación**	1. Unidades temáticas. 2. Objetivos de Aprendizaje específicos por unidad temática. 3. Lecciones por unidad temática. 4. Actividades matemáticas-estadísticas por lección.
II.	**Descripción**	1. Actividades matemáticas-estadísticas por lección. 2. Contextos o fenómenos de incertidumbre que enmarcan cada actividad. 3. Preguntas o tareas contenidas en cada actividad.
III.	**Clasificación**	1. Según presencia/ausencia de contextos o fenómenos de incertidumbre. 2. Según presencia/ausencia de preguntas o tareas matemáticas-estadísticas que involucran al

	estudiante en la toma de decisiones.

Para clasificar las preguntas o tareas contenidas en las actividades, nos preguntamos ¿es esta una pregunta o tarea que involucra auténticamente al estudiante en la toma de decisiones en contextos de incertidumbre? Consideramos que la respuesta es afirmativa, si la actividad cumple con las siguientes condiciones:

1. Interpela al estudiante a tomar una decisión en una situación o contexto de incertidumbre.
2. La decisión es requerida para resolver un problema u orientar la solución de un problema.
3. Solicita al estudiante una justificación o fundamentación de la decisión.
4. No puede ser reemplazada directamente por una pregunta de cálculo.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

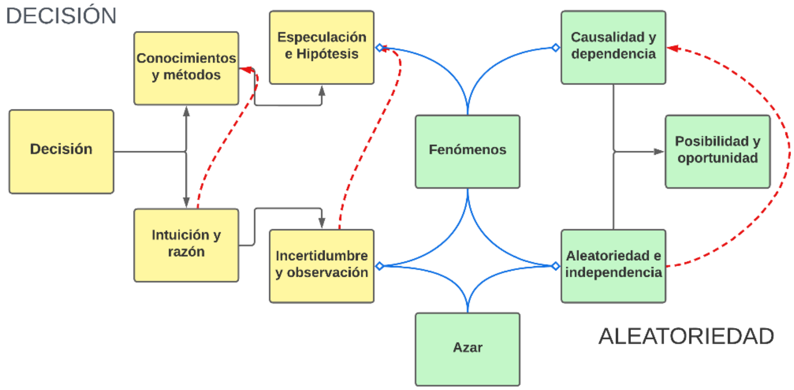
Primero se presentarán los resultados asociados al proceso de *historización* y luego, al proceso de *dialectización*, siguiendo lo planteado en el marco teórico.

Respecto de la *historización*

En cuanto a los significados germinales obtenidos a partir del análisis socioepistemológico, la articulación de los temas decisión y aleatoriedad se puede observar en la Figura 2. El tema decisión conglomeró 5 grupos de códigos (en color amarillo) y el tema aleatoriedad otros 5 grupos de códigos (en color verde). De acuerdo con el análisis, tomar una decisión moviliza el uso de conocimientos y métodos conocidos, a la vez que exige coordinar intuición y razón. Esto último debido específicamente a la presencia de incertidumbre. Asimismo, tomar una decisión lleva a la necesidad de observar y comprender el fenómeno, de modo que sea posible especular y elaborar hipótesis, las que eventualmente podrían ir consolidándose en nuevos conocimientos y métodos. Una observación sistemática del fenómeno permite distinguir aleatoriedad de causalidad, y evaluar así cuáles posibilidades de ocurrencia podrían resultar en oportunidades favorables. Por el contrario, ante la imposibilidad de realizar una observación sistemática, o al menos extensa, del fenómeno, solo podemos percibir azar y actuar de forma intuitiva.

Figura 2

Red temática que articula los significados característicos de aleatoriedad y decisión.



Diferencia entre azar y aleatoriedad

La obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* analiza diferentes tipos de problemas, que son resueltos a través del estudio de las posibilidades de error o riesgo en las decisiones bajo incertidumbre. El trabajo de Cournot nos proporciona una diferencia conceptual entre el azar y la aleatoriedad, basada principalmente en la noción de independencia de una serie de ocurrencias o causas. Por un lado, para Cournot el azar no es la ausencia de causa ni un estado de ignorancia sobre las causas, sino más bien la multiplicidad de causas, sin dependencia ni una relación rastreable entre ellas, que se manifiesta en la ocurrencia de un evento especifico (Cournot, 1843). Por otro lado, para este matemático, la aleatoriedad es una noción más compleja, que se relaciona con la forma en que percibimos y observamos los fenómenos para analizarlos.

Cournot nos brinda un ejemplo. La trayectoria de un proyectil es susceptible de ser modelado por una curva parabólica, pero esto no significa necesariamente que el comportamiento del proyectil resulte perfectamente en una función cuadrática. Del mismo modo, los fenómenos aleatorios pueden explicarse a través de modelos, en los que se puede mejorar el grado de correspondencia aumentando el número de datos y la calidad de la muestra. De hecho, comenzamos a notar ciertas regularidades cuando tenemos grandes conjuntos de datos o suficientes procesos de acciones/eventos a lo largo del tiempo, adecuadamente recopilados y sistematizados. De esta manera, la aleatoriedad es la expresión regular que surge del registro sistemático de eventos fortuitos, que ocurren bajo condiciones similares del mismo fenómeno (Cournot, 1843). Por lo tanto, la aleatoriedad puede hacerse explícita a través de leyes o propiedades y su distribución adquiere una forma en la medida que se estudia con mayor completitud el fenómeno.

Esta distinción entre azar y aleatoriedad resultó ser esencial en la matematización germinal de los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre, ya que permitió el estudio objetivo de diferentes fenómenos aleatorios basados en leyes como la ley del error o la ley de los grandes números (Vergara-Gómez, 2020). En concreto, era necesario separar la ocurrencia fortuita de un hecho concreto en el tiempo —difícil de anticipar o medir— de la expresión regular adquirida por el registro de una gran cantidad de ocurrencias fortuitas en igualdad de condiciones fenomenológicas —susceptibles de ser sometidas a mediciones y análisis matemáticos y/o estadísticos—.

Diferencia entre decisiones de un solo caso y procesos de toma de decisiones

Si bien Cournot nunca menciona el término modelo en *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, ni en sus otras obras (Walliser, 2007), cada vez que aplica ideas teóricas para estudiar la aleatoriedad, utiliza algunos ejemplos simples, a partir de los cuales construye un principio o expresión analítica más general. De esta manera, simplifica el fenómeno, asumiendo que los eventos se repiten muchas veces en circunstancias similares. El fenómeno, entonces, se trata como una colección de experiencias independientes, donde cada una, aunque impredecible, determina el mismo tipo de resultados posibles. El abanico de posibilidades podría ser ciertamente más amplio, pero el observador puede fijar su interés en una de ellas, simplificando el análisis. Cournot inicia con la suposición de que los eventos $A', A'',..., A^n$ son repeticiones del evento A y que los eventos $B', B'',..., B^n$ son repeticiones del evento complementario B.

El valor de las probabilidades de estos eventos se puede definir, según explica el matemático, *a priori* o *a posteriori*. En ambos casos, la medida de probabilidad se obtiene usando la razón entre el número de posibilidades favorables y el número total de oportunidades, pero en la probabilidad *a priori* se consideran todas las combinaciones abstractamente posibles, mientras que en la probabilidad *a posteriori*, las frecuencias de los resultados conocidos de los eventos aleatorios (Cournot, 1843). El matemático explica que estas probabilidades se aproximan solo cuando el valor del número de ensayos es lo suficientemente grande. De ahí la importancia de contar con una gran cantidad de ensayos para el experimento aleatorio que se desea analizar.

Desde la perspectiva *a priori*, si se asume que las probabilidades p y q, de los eventos A y B respectivamente, permanecen significativamente invariantes durante el proceso, entonces, para m intentos, el producto $(p + q)(p' + q')(p'' + q'')$... se convierte a $(p + q)^m$, cuyo análisis general se puede realizar mediante el binomio de Newton. El uso de esta idea permite a Cournot no solo calcular probabilidades específicas, sino también determinar un número mínimo o máximo de experimentos para poder alcanzar un indicador específico de probabilidad previamente establecido. Un ejemplo simple y representativo de cómo esta idea establece las bases para una distinción entre los procesos de toma de decisiones y las decisiones de un solo caso se da utilizando un juego de dados. Cournot propone un juego con dos dados en el que uno gana al obtener un doble 6. En lugar de preguntar: "¿Cuál es la probabilidad de ganar?" que implícitamente asume un intento al azar, pregunta: "¿Cuántos intentos mínimos son necesarios para asegurar una probabilidad de 1/2 de obtener el evento de interés al menos una vez?" Tenga en cuenta que, para responder a la pregunta, se necesita un proceso aleatorio de muchas acciones. Como respuesta, Cournot propone la ecuación que se puede ver en la Figura 3.

Basándose en la ecuación expresada en la Figura 3, Cournot concluye que 24 intentos son necesarios como mínimo para obtener al menos un evento exitoso. Redondea el resultado a 24 debido a la naturaleza discreta del experimento. Es importante tener en cuenta que la probabilidad acumulada simétricamente alrededor de la media, como propone Cournot para este caso, es apenas 0,5. Si se quisiera asegurar, por ejemplo, una mayor probabilidad acumulada, digamos 0,75, el número de intentos aumentaría a 49. Esta probabilidad acumulada se basa en la lógica del muestreo. Una probabilidad P de 0,5 significa que, para un gran número de muestras, cada una de 24 ensayos o eventos, la mitad de estas aproximadamente presentarían al menos un evento "doble seis". Este tipo de análisis promueve la comprensión de la probabilidad en el escenario de aleatoriedad, no del azar. En consecuencia, para Cournot es posible hacer estimaciones probabilísticas *a priori* confiables solo cuando existe la posibilidad de decidir el número de ensayos.

Figura 3

Ecuación logarítmica propuesta para determinar un número mínimo de intentos. Cournot (1843, p. 48).

$$q^m = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{36}, \quad q = 1 - p = \frac{35}{36};$$

et l'équation précédente donnerait

$$m = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}6\ldots$$

La perspectiva *a posteriori* Cournot la usa principalmente en aquellos acontecimientos aleatorios cuyas combinaciones posibles no pueden ser determinadas aritméticamente, como los que derivan de fenómenos naturales o sociales. En estos casos, las múltiples variables que proporcionan leyes de probabilidad para los valores que toma la magnitud aleatoria son casi siempre de naturaleza desconocida (Cournot, 1843); en esa época resultaba prácticamente imposible someter la ocurrencia de tales eventos a cálculo teórico. El cálculo de probabilidades *a posteriori* adquiere sentido cuando existe una cantidad suficientemente grande de datos y estos han sido recogidos sistemáticamente. En la actualidad esto sería equivalente al uso adecuado de técnicas de muestreo y registro. Conocer las probabilidades *a posteriori* facilitan la toma de decisiones en cuanto revelan posibles tendencias o formas en la distribución de las frecuencias, lo que a su vez permite evaluar eventuales reajustes en la precisión, incrementando o mejorando el registro de los eventos. Un ejemplo de esto corresponde a los procesos de toma de decisiones de los tribunales de justicia civil en la Francia de la época de Cournot. El sistema de justicia francés llevaba un registro sistemático de los fallos y las apelaciones. Un grupo de jueces dictaba un gran número de sentencias a lo largo de varios años, las que requerían contar con una mayoría predeterminada de votos.

De esta forma, el cálculo de la probabilidad *a priori* o *a posteriori*, es pertinente según la naturaleza de la situación, siendo los procesos de toma de decisiones los que dan sentido a la elegir una u otra perspectiva. Así, por un lado, las probabilidades *a priori* permiten conocer la cantidad mínima de ensayos requeridos para tomar una decisión favorable y, por otro, las probabilidades *a posteriori* informan sobre las frecuencias de los hechos, favoreciendo la toma de decisiones respecto de un conjunto de eventos futuros. En los orígenes de la matematización de la toma de decisiones, destacan los procesos de toma de decisiones por sobre las decisiones de un solo caso. Los procesos implican una gran cantidad de ensayos o registro de eventos, en los que el cálculo de probabilidades surge para estimar la cantidad conveniente de ensayos o eventos. A diferencia de las decisiones de un solo caso, donde las probabilidades se calculan para estimar la posibilidad de ocurrencia de un evento específico, en los procesos de toma de decisiones se tiene una mirada más global sobre el número de intentos y la distribución de los resultados al ir aumentando el número de eventos.

Respecto de la *dialectización*

El Texto escolar editado especialmente para el Ministerio de Educación y con distribución gratuita a lo largo de todo el país, se estructura en 4 unidades, la primera de ella se denomina "La toma de decisiones en situaciones de incerteza", conformada por 6 lecciones. En total, se revisaron 49 actividades. El programa de Estudio Probabilidad y estadística descriptiva e inferencial (MINEDUC, 2021) se estructura en 4 unidades (ver Tabla 3), cada unidad posee 4 lecciones principales y entre 5 y 12 lecciones de evaluación. En total, se revisaron 193 actividades. En la Tabla 3 se reportan los resultados de la revisión del programa de estudio y en la Tabla 4, los resultados de la revisión del texto del estudiante.

Tabla 3

Descripción de las unidades, objetivos de aprendizaje y lecciones del programa de estudio, junto con la clasificación de las actividades por lección.

Unidad	Objetivo de Aprendizaje (OA)	Lecciones	A	B	C

1. ¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información	Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales (OA1).	1.1 Analizar críticamente la información en el contexto de las estadísticas vitales (esperanza de vida).	16	1	16
		1.2 ¿Cómo representar estadísticamente datos y fenómenos? (histogramas en distintos contextos).	13	1	13
		1.3 Tomar decisiones a partir de diagramas de cajón (diagramas de caja en distintos contextos).	11	0	11
		1.4 ¿Datos dispersos o relacionados? (nubes de puntos en distintos contextos).	9	0	9
		1.5 Evaluación.	5	0	5
		Total	54	2	54
2. Comprender la media muestral, las medidas de	Resolver problemas que involucren los conceptos de media	2.1 Analizar información gráfica en diferentes contextos.	11	0	9

dispersión y la correlación	muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales (OA2)	2.2 La media muestral y la media de la población en diferentes contextos.	13	0	13
		2.3 Utilizar la correlación muestral en contextos de ciencias sociales.	8	1	8
		2.4 Aplicar el modelo de correlación lineal en censos de la población.	12	0	12
		2.5 Evaluación	12	1	9
		Total	56	2	51
3. Modelaje de fenómenos mediante las probabilidades de las distribuciones binomial o normal	Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal (OA3)	3.1 Experimentos aleatorios con modelos de Bernoulli y Binomial.	10	0	6
		3.2 Comprender el modelo normal de probabilidades.	5	0	2
		3.3 Aplicar el modelo normal en el transporte de personas.	13	1	13
		3.4 Aproximar la distribución binomial por la distribución	9	1	7

		normal			
		3.5 Evaluación	12	1	11
		Total	49	3	39
4. Hacer inferencia estadística	Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis (OA4)	4.1 Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza.	4	0	1
		4.2 Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza.	5	0	5
		4.3 Elaborar una hipótesis y comprobar o rechazar en diferentes contextos.	9	0	5
		4.4 Elaborar y comprobar o rechazar una hipótesis.	7	0	7
		4.5 Evaluación	9	1	8
		Total	34	1	26
		Total general	193	8	170

Nota: A indica el número de actividades totales de la lección; B indica el número de actividades que involucran al estudiante en la toma de decisiones; C indica el número de actividades que se basan en contextos o fenómenos de incertidumbre.

Tabla 4

Descripción de las unidades, objetivos de aprendizaje y lecciones del texto del estudiante, junto con la clasificación de las actividades.

Unidad	Objetivo de Aprendizaje (OA)	Lecciones	A	B	C
1. La toma de decisiones en situaciones de incerteza	Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos.	1.1 Estaturas de los jugadores de la selección chilena de fútbol y medida de tendencia central.	1	1	1
		1.2 Calcular e interpretar medidas de tendencia central, cuartiles. Técnicas de conteo. Cálculo de probabilidad clásica.	6	0	5
		1.3 Medidas de dispersión.	8	3	8
		1.4 Comparación de conjuntos de datos.	8	5	7
	Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.	1.5 Probabilidad condicional.	6	2	6
		1.6 Probabilidad total.	15	3	8
		1.7 Evaluación.	5	2	5
		Total	49	16	40

Nota: A indica número de actividades totales de la lección; B indica número de actividades que involucran al estudiante en la toma de decisiones; C indica número de actividades que se basan en contextos o fenómenos de incertidumbre.

Como se puede observar en la Tabla 3, el total de actividades que invitan a los estudiantes a tomar una decisión en el programa de estudio corresponden aproximadamente al 4,63% de las actividades propuestas (9 de 194), mientras que en el texto escolar corresponden aproximadamente al 32,65% de las actividades propuestas (16 de 49). Por otra parte, el 88% y el 82% de las actividades del programa de estudio y del texto escolar, respectivamente, evocan contextos o fenómenos de incertidumbre, dejando ver que el contexto de incertidumbre por sí mismo no es suficiente para emplazar a la toma de decisiones. En total, se identificaron 24 actividades que promueven la toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Varias de ellas hacen referencia explícita a las nociones de azar y aleatoriedad, sin una distinción conceptual clara. Por ejemplo, en los problemas asociados a la elección de muestras, los conceptos se utilizan como sinónimos. Además, si bien el texto escolar provee una mayor proporción de tareas o preguntas para involucrar al estudiante en la toma de decisiones, muchas de estas no son explícitas y se presentan de manera posterior a las tareas de cálculo de medidas estadísticas o probabilísticas, es decir, las actividades asociadas a tomar decisiones no motivan la búsqueda de estrategias, sino más bien enfatizan lo calculatorio y el uso de fórmulas. Cabe señalar que las unidades y objetivos de aprendizaje hacen alusión tanto a la Estadística como a la Probabilidad. De ahí que no todas las tareas para la toma de decisiones apelen al cálculo de probabilidades, sin embargo, varias de las tareas estadísticas podrían abordarse considerando análisis de distribuciones de frecuencias y, por lo tanto, probabilidades frecuentistas. De esta manera, es posible organizar las actividades cruzando criterios, como se puede observar en la Tabla 5.

Tabla 5

Clasificación de las actividades que involucran al estudiante en la toma de decisiones en el Programa de estudio y el Texto del estudiante.

		Probabilidades a priori		**Probabilidades a posteriori**		**Total**
		Estadística	Probabilidad	Estadística	Probabilidad	
Programa de	**Decisiones de un solo caso**	0	3	4	0	7

	Procesos de toma de decisiones	0	1	0	0	1
Texto del estudiante	**Decisiones de un solo caso**	0	3	12	0	15
	Procesos de toma de decisiones	0	0	0	0	0
	Total	0	7	16	0	23

Nota: A indica el número de actividades totales de la lección; B indica el número de actividades que involucran al estudiante en la toma de decisiones; C indica el número de actividades que se basan en contextos o fenómenos de incertidumbre.

Como se puede apreciar en la Tabla 5, predominan las actividades asociadas al uso de probabilidades *a priori,* en temas de Probabilidad, y a probabilidades *a posteriori,* en temas de Estadística, siendo estas últimas más del doble que las primeras. Las actividades en temas estadísticos refieren exclusivamente a decisiones de un solo caso. Algo similar ocurre con las actividades en temas probabilísticos, salvo una única actividad. La actividad pertenece a la lección 3.4 del Programa de estudio y se basa en la pregunta "¿En qué te basarías para decidir desde qué valor de n vale la pena utilizar la aproximación normal de la distribución binomial? Argumenta. Conjetura una regla práctica para determinar desde qué valor de n conviene usar la aproximación normal de la binomial". Si bien la actividad no explicita realizar varios intentos y tampoco ofrece un contexto de significación, esta es la única actividad que tiene el potencial de promover la búsqueda variando el número de intentos o el tamaño de las muestras.

De las 24 actividades que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de tomar decisiones, sólo fue posible clasificar 23. La actividad sin clasificar pertenece a la lección 1.5 "Probabilidad condicional" del Texto del estudiante y hace referencia al problema Monty Hall. La razón de por qué no fue posible asignarle una categoría es que la actividad plantea una decisión de un solo caso, pero las indicaciones para que los estudiantes analicen la situación son presentadas como un proceso de toma de decisiones. Además, la primera pregunta se realiza esperando que los estudiantes empleen una medida apriorística de probabilidad, pero para verificar si su decisión es correcta o incorrecta se pide a los estudiantes que realicen una simulación del proceso, registrando los datos y usando las frecuencias para obtener probabilidades *a posteriori*.

La actividad en cuestión propone que los estudiantes analicen el problema en parejas, observando la imagen de la Figura 4, donde el concursante se llama Leonardo.

Figura 4

Ilustración del Texto escolar. MINEDUC (2020, p. 22).

En esta actividad los alumnos deben seguir las siguientes acciones:

> “a) En lugar de Leonardo, ¿qué escogerían: cambiar de puerta o mantenerla? ¿por qué? Argumenten y comenten su respuesta con sus compañeros de clase.
>
> b) Antes de que Leonardo escoja una puerta, ¿cuál es la probabilidad de que escoja la puerta que tiene el automóvil? Y ¿cuál la de escoger la que tiene una cabra?”

A continuación, para que los estudiantes vean que la opción probabilísticamente correcta es cambiar la decisión, se les pide que recurran a material concreto para hacer tarjetas que simulen las opciones de las puertas y las usen para "Reproducir la situación varias veces, contando los resultados y completando la información en una tabla" (MINEDUC, 2020, p.22). Es decir, mientras que en el contexto del conocido problema el concursante puede hacer una sola elección, la explicación de la decisión teóricamente óptima se basa en la suposición de una larga serie de juegos o elecciones.

Aunque esta actividad contempla la simulación de la decisión varias veces utilizando tarjetas, en el contexto real del concurso, la posibilidad de cambiar la decisión se presenta al concursante como una oportunidad única. En este sentido, analizar los posibles resultados de la decisión para varios intentos no es coherente con el espíritu del concurso. Por otro lado, no está claro cuántos intentos serían suficientes para evaluar la conveniencia de la decisión. Por ejemplo, si los alumnos, utilizando el mecanismo de las cartas, juegan 10 o 15 veces, la variabilidad empírica es alta y por lo tanto podrían concluir, en base a sus datos, que es más conveniente mantener la primera decisión. Además, la oportunidad de cambiar o preservar la decisión se presenta como un evento aislado, no como una serie de eventos. Así, la oferta del presentador, de carácter perentorio, exige una respuesta rápida, que no permite mecanismos de anticipación, comparación o medición. A los ojos del tomador de decisiones, el resultado de su decisión es fortuito. Y, de hecho, para cada decisión aislada, ni siquiera el más preciso de los cálculos de probabilidad condicional garantiza una decisión correcta, el resultado está genuinamente sentenciado por el azar.

Huelga decir que, dada la naturaleza del concurso, la decisión corresponde a una decisión de un solo caso. Si un alumno responde, antes de realizar la simulación, que es más favorable no cambiar la decisión, no existen medios físicos para verificar el supuesto error de esa decisión, aparte de mostrar lo que hay detrás de la puerta seleccionada. En situaciones de un solo caso no existe un criterio directo de verificación o evaluación del éxito para la probabilidad estimada (Borovcnik, 2016). A este respecto, planteamos la siguiente pregunta: ¿por qué considerar una decisión como incorrecta o subóptima si, en términos fácticos, no es posible verificar su eficacia? La situación sería diferente si las decisiones pudieran evaluarse en un proceso de toma de decisiones, ya que, como propone Cournot, en un proceso, es factible analizar el número mínimo de intentos necesarios para asegurar una cierta probabilidad acumulada. Esta probabilidad acumulada debe estimarse de antemano para superar la simple “suerte”.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se identifica un momento germinal para la matematización de los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre, a través del análisis histórico y epistemológico de la obra de Cournot (1843). Este análisis revela dos distinciones conceptuales de interés: la diferencia entre azar y aleatoriedad, y la diferencia entre decisiones de un solo caso y procesos de toma de decisiones. Estas distinciones están conectadas entre sí y permiten resaltar la importancia de discutir el fundamento epistémico de la toma de decisiones bajo incertidumbre. Las decisiones de caso único o de un solo caso refieren principalmente a la noción de azar, mientras que los procesos de toma de decisiones requieren de la aleatoriedad como base conceptual más amplia.

A partir del análisis realizado, se hace evidente la ausencia de una adecuada base epistemológica para sustentar conceptualmente a la propuesta del currículum escolar chileno, lo que se traduce en un predominio de actividades asociadas a decisiones de un solo caso. Dado que las decisiones de un solo caso no propician una adecuada comprensión de la aleatoriedad, cabe cuestionar la pertinencia del tratamiento que poseen estos conceptos en el currículum escolar chileno. Moore (1990) explica que "los fenómenos que tienen resultados individuales inciertos, pero un patrón regular de resultados en muchas repeticiones, se llaman aleatorios. Aleatorio no es sinónimo de azar […] la probabilidad es la rama de las matemáticas que describe la aleatoriedad" (p. 98). Del mismo modo, Yates et al., (1998) definen un fenómeno aleatorio como aquel en el que, "los resultados individuales son inciertos, pero no obstante hay una distribución regular de los resultados en un gran número de repeticiones" (p. 314). Estas definiciones, por un lado, explican la distinción estadística entre azar y aleatoriedad y, por otro lado, mantienen correspondencia epistémica con lo que Cournot postuló al inicio de la sistematización de los procesos de toma de decisiones.

En cuanto a la diferencia entre decisiones de un solo caso y procesos de toma de decisiones, Baumann (2008) niega la fuerza normativa de los argumentos probabilísticos para las decisiones que se toman para un caso individual. En este mismo sentido, Borovcnik (2015) explica que "existe una gran diferencia en términos del éxito de la estrategia utilizada si uno tiene una decisión única o decide casos similares repetidamente. Lo que es bueno en una decisión única puede ser malo para la decisión repetida" (p. 127). Así, en el campo de la toma de decisiones, surge la necesidad de pensar probabilísticamente cuando las decisiones se presentan como procesos, cuyos resultados ayudan a conectar la probabilidad teórica o *a priori* con la probabilidad frecuentista o *a posteriori*. Al respecto, Gigerenzer y Todd (1999) indican que en contextos de incertidumbre en los que se nos exige tomar una decisión particular, con poco tiempo para evaluar cuantitativamente las posibilidades y poca información confiable, la intuición puede ser una herramienta valiosa, especialmente si las estrategias de cálculo son complejas o demandan una gran cantidad de tiempo. Esto explica por qué, en las decisiones de un solo caso, la intuición compensa el esfuerzo y se adapta más rápidamente al contexto.

Cabe señalar que el supuesto didáctico tras la actividad asociada al problema Monty Hall, presentada en el texto escolar chileno, no está lejos de lo que se ha propuesto en investigaciones previas. Por ejemplo, Saenen et al. (2018) proponen el uso de procesos que simulan el experimento aleatorio para repetir la elección muchas veces, con el fin de superar las dificultades de comprensión en el dilema de Monty Hall por parte de los estudiantes. En general, las investigaciones consultadas utilizan el problema como insumo para analizar cómo reaccionan las personas ante el dilema, tratando de encontrar explicaciones para el predominio de decisiones subóptimas (Batanero et al., 2009; DiBattista, 2011; Elicer y Carrasco, 2017). Sin embargo, desde el análisis socioepistemológico realizado, es posible argumentar que las contradicciones se generan porque el contexto del concurso requiere de una decisión de caso único, enmarcada por el azar. Son estos significados los que generan respuestas persistentemente intuitivas y no probabilísticas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

A.V.G desarrolló la idea presentada, ajustó el marco teórico, adaptó la metodología a este contexto, creó las categorías de análisis, recolectó y analizó los datos.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor correspondiente, A.V.G, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto FONDECYT de Iniciación Nº11240150, Agencia de Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID).

REFERENCES

Arkes, H., Gigerenzer, G., y Hertwig, R. (2016). How bad is incoherence?. *Decision*, *31*(1), 20-39. https://doi.org/10.1037/dec0000043

Batanero, C. (2020). Probability teaching and learning. In: Lerman S. (eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 682-686). Springer.

Batanero, C., Fernández, J.F., y Contreras, J.M. (2009). Un análisis semiótico del problema Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (63), 11-18.

Baumann, P. (2008). Single-case probabilities and the case of Monty Hall: Levy's view. *Synthese*, *162*(2), 265-273. https://doi.org/10.1007/s11229-007-9185-6

Bennett, D. (2014). Sticking to your guns: a flawed heuristic for probabilistic decision-making. In E.J. Chernoff, & B. Sriraman. (eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 261-281). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_14

Borovcnik, M. (2015). Risk and decision making: The "logic" of probability. *The Mathematics Enthusiast*, *12*(1), 113-139. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1339

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *18*(3), 1491-1516.

Borovcnik, M., y Kapadia, R. (2011). Modelling in probability and statistics. En J. Maasz, & J. O'Donoghue, J. (eds.), *Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students* (pp. 1-43). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-543-7_1

Boyatzis, R. (1998). *Transforming qualitative information: Thematic analysis and code development*. Sage Publications.

Cantoral R. (2019) Socioepistemology in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 790-797). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa SA.

Cortada de Kohan, N. (2008). Los sesgos cognitivos en la toma de decisiones. *International Journal of Psychological Research, 1*(1), 68–73. https://doi.org/10.21500/20112084.968

Cournot, A.A. (1843). *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.* Hachette.

Denison, S., & Xu, F. (2014). The origins of probabilistic inference in human infants. *Cognition*, *130*(3), 335-347. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.12.001

Drisko, J. W., & Maschi, T. (2016). *Content analysis*. Pocket Guide to Social Work Research Methods.

diBattista, D. (2011). Evaluación de un objeto de aprendizaje digital para el dilema de Monty Hall. *Enseñanza de la Psicología, 38*(1), 53-59. https://doi.org/10.1177/0098628310390916

Elbehary, S. G. (2021). Reasoning under uncertainty within the context of probability education: A case study of preservice mathematics teachers. *Pythagoras, 42*(1), 630. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v42i1.630

Elicer, R., y Carrasco, E. (2017). Conditional probability as a decision-making tool: A didactic sequence. In T. Dooley, & G. Gueudet (eds.), *CERME 10* (pp. 748-755). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01927857

Espinoza-Ramírez, L., Vergara-Gómez, A., & Valenzuela-Zúñiga, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Reidel

Gandhi, H. (2018). Understanding Children's Meanings of Randomness in Relation to Random Generators. In C. Batanero, & E. J. Chernoff (eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp.181-200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Garfield, J., y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, *19*(1), 44-63. https://doi.org/10.2307/749110

Garfield, J., y Ben- Zvi. D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International statistical review*, *75*(3), 372-396. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Gigerenzer, G., y Todd, P.M. (1999). Fast and frugal heuristics: The adaptive toolbox. In G. Gigerenzer & P.M. Todd (eds.), *Simple heuristics that make us smart* (pp. 3-34). Oxford University Press. https://doi.org/10.1002/acp.793

Gigerenzer, G., y Gaissmaier, W. (2011). Heuristic decision making. *Annual review of psychology*, *62*, 451-482. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-120709-145346

Helton, J. C. (1997). Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *57*(1-4), 3-76. https://doi.org/10.1080/00949659708811803

Ingram, J. (2022): Randomness and probability: exploring student teachers' conceptions. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-19. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2016029

Kahneman, D., y Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological review*, *80*(4), 237. https://doi.org/10.1037/h0034747

Knight, F. H. (1921). *Risk, uncertainty and profit*. New York: Hart, Schaffner and Marx.

Kubricht, J. R., Holyoak, K. J., y Lu, H. (2017). Intuitive physics: Current research and controversies. *Trends in cognitive sciences, 21*(10), 749-759. https://doi.org/10.1016/j.tics.2017.06.002

Lajoie, S. P. (1998). Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12 (studies in mathematical thinking and learning series). Lawrence Erlbaum Associates.

Lopez-Claros, A., Dahl, A., & Groff, M. (2020). The Challenges of the 21st Century. In *Global Governance and the Emergence of Global Institutions for the 21st Century* (pp. 3-29). Cambridge University Press.

Malaspina, M., & Malaspina, U. (2020). Game invention as means to stimulate probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 19*(1), 57-72. https://doi.org/10.52041/serj.v19i1.119

Martignon, L. (2014). Fostering children's probabilistic reasoning and first elements of risk evaluation. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 149-160). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_9

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Programa de Estudio 3° o 4° Medio. Formación Matemática Diferenciada. Probabilidades y Estadísticas Descriptiva e Inferencial*. UCE, Ministerio de Educación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140145_programa.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2021). *Texto del Estudiante, Matemática 3° y 4°*. Edición especial SM para el Ministerio de Educación. https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-140074_recurso_1.pdf

Moore, D.S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-146). National Academy Press. https://doi.org/10.7326/0003-4819-113-11-902_1

Mousavi, S., y Gigerenzer, G. (2017). Heuristics are tools for uncertainty. *Homo Oeconomicus, 34*(4), 361-379. https://doi.org/10.1007/s41412-017-0058-z

OECD (2019). *Assessment and Analytical Framework PISA 2018, PISA*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

OECD (2010). *Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA.* PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264075009-en

Saenen, L., Heyvaert, M., Van Dooren, W., Schaeken, W., y Onghena, P. (2018). Why humans fail in solving the Monty Hall dilemma: A systematic review. *Psychologica Belgica*, *58*(1), 128-158. https://doi.org/10.5334/pb.274

Serradó Bayés, A. (2018). Reasoning in Decision Making Under Uncertainty and Decisions of Risk in a Game of Chance. *ICME-13 Monographs*, 201–221. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_12

Shaughnessy, J. M. (2019). Recommendations about the big ideas in statistics education: A retrospective from curriculum and research. *Cuadernos*, *18*, 44-58. https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206043

Shaughnessy, J.M., Garfield, J., y Greer, B. (1996). Data handling. In A. Bishop, M. Clements, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_8

Shi, Y. (2000). The game PIG: Making decisions based on mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *19*(1), 30-34. https://doi.org/10.1093/teamat/19.1.30

Sriraman, B., & Chernoff, E. J. (2020). Probabilistic and statistical thinking. In S. Lerman (ed.), Encyclopedia of mathematics education, 675-681. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100003

van Der Bles, A. M., van Der Linden, S., Freeman, A. L., Mitchell, J., Galvao, A. B., Zaval, L., & Spiegelhalter, D. J. (2019). Communicating uncertainty about facts, numbers and science. *Royal Society open science*, *6*(5), 181870. https://doi.org/10.1098/rsos.181870

Vergara-Gómez, A. (2020). *Estudio socioepistemológico de los procesos de toma de decisiones en contextos de incertidumbre; una mirada desde la práctica cotidiana hacia la matemática escolar.* Tesis de Doctorado. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=433540

Vergara-Gómez, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *23*(1), 7-36. https://doi.org/10.12802/relime.20.2311

Walliser, B. (2007). The Functions of Economic Models. In 1st edition. M. Touffut (ed.), *Augustin Cournot: modelling economics* (pp. 41-54). Edward Elgar Publishing Limited. https://doi.org/10.4337/9781847208866.00013

Yates, D., Moore, M. D., y McCabe, G. (1999). *The Practice of Statistics.* W.H. Freeman.