ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7728

A construção de definições por meio do modelo combinatório de Padovan: uma investigação com a Engenharia Didática num curso de formação inicial de professores de Matemática

Renata Passos Machado Vieira [a]
Francisco Regis Vieira Alves [b]
Paula Maria Machado Cruz Catarino [c]

[a] Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo Universidade Federal do Ceará), Fortaleza, CE, Brasil.
[b] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Departamento de Matemática, Fortaleza, CE, Brasil.
[c] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – UTAD, Departamento de Matemática, Vila Real, Portugal.

Received for publication 17 May 2023. Accepted after review 21 Jul. 2023
Designated editor: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Diante de conteúdos negligenciados em livros de História da Matemática, surge a motivação desta pesquisa, observando a sequência de Fibonacci sendo abordada de grande forma. Além disso, destaca-se a existência da sequência de Padovan, sendo considerada prima de Fibonacci. **Objetivos**: realizar uma investigação da sequência de Padovan, construindo sua definição por meio de um modelo combinatório utilizando material manipulável, com base na Teoria das Situações Didáticas, no contexto do curso de formação inicial de professores de Matemática. **Design**: o desenho metodológico segue com a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, sendo elaborada uma situação didática de ensino, como forma de investigar a sequência de Padovan. Assim, foi desenvolvido um material manipulável que facilita o processo de ensino e a construção da definição da sequência. **Ambiente e participantes**: as intervenções foram realizadas no curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior na cidade de Fortaleza. Participaram do estudo um total de 5 sujeitos matriculados na disciplina de História da Matemática. **Coleta e análise de dados**: os dados foram coletados durante as aulas, registrados por meio de fotografias e gravações de áudio, utilizando como embasamento a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas. **Resultados**: como resultado mais relevante deste estudo, tem-se a construção da definição da sequência de Padovan por meio do material manipulável. **Conclusões**: pode-se concluir que a pesquisa permitiu uma

Autor correspondente: Renata Passos Machado Vieira. Email: re.passosm@gmail.com

investigação da sequência de Padovan, possibilitando a visualização de seus termos e sua integração com outros conteúdos matemáticos, contribuindo para o ensino desses números.

Palavras-chave: construção de definições; Engenharia Didática; modelo combinatório de Padovan; sequência didática; Teoria das Situações Didáticas.

The construction of definitions through Padovan's combinatorial model: an investigation with Didactic Engineering in an initial training course for Mathematics teachers

ABSTRACT

Background: Given the oversight of specific topics in the history of mathematics books, this research was motivated by the extensive coverage of the Fibonacci sequence. In addition, the existence of the Padovan sequence, which is considered a Fibonacci cousin, stands out. **Objectives**: Investigating the Padovan sequence, building its definition through a combinatorial model using manipulative materials based on the theory of didactical situations in the initial mathematics teacher education course context. **Design**: The research methodological design follows didactic engineering, and a didactic teaching situation is created to investigate the Padovan sequence. Thus, manipulative material was developed to facilitate the teaching process and the construction of the sequence definition. **Settings and participants**: The interventions were done in the mathematics degree course of a higher education institution in Fortaleza. Five students enrolled in the component of History of Mathematics participated in the study. **Data collection and analysis**: Data were collected during classes, recorded through photos and audio recordings, based on didactic engineering and the theory of didactical situations. **Results**: The most relevant result of this study is constructing the definition of the Padovan sequence through the manipulative material. **Conclusions**: We concluded that the research allowed an investigation of the Padovan sequence, enabling the visualisation of its terms and their integration with other mathematical contents, contributing to teaching these numbers.

Keywords: construction of definitions; Didactic Engineering; Padovan combinatorial model; following teaching; Theory of Didactic Situations.

INTRODUÇÃO

De modo predominante, observa-se a existência de discussões entre autores de História da Matemática em torno das curiosidades da sequência de Fibonacci, negligenciando outras sequências e outros aspectos matemáticos e históricos (Burton, 2007).

À vista disso, é de suma importância compreender os vestígios históricos que motivaram o processo epistemológico e evolutivo de outras sequências numéricas recorrentes. Em contrapartida, observam-se artigos na área de Matemática Pura que exploram abordagens combinatórias de sequências, de modo dominante a sequência de Fibonacci e sua contemporaneidade.

De forma resumida, a sequência de Fibonacci, criada por Leonardo Pisano (1170-1217), é uma sequência numérica recorrente de segunda ordem e apresenta inúmeras relações com o número de ouro (1,61) (Gullberg, 1997). Uma outra sequência, é considerada parente dos números de Fibonacci por apresentar relação com o número plástico (1,32). Destaca-se que o número plástico e o número de ouro são as duas únicas soluções de um conjunto numérico denominado de números mórficos (Ferreira, 2015; Alves & Catarino, 2022).

Essa sequência parente de Fibonacci é conhecida como sequência de Padovan e foi criada por Richard Padovan (1935). Marohnic, Kovacic e Radisic (2013) afirmam que o estudo de Padovan teve como base o trabalho do arquiteto Hans van der Laan (1904-1991), que descobriu um novo número irracional, o número plástico. No entanto, é importante ressaltar que, segundo pesquisas, esse número foi estudado anteriormente por Gérard Cordonnier (1907-1977), e, portanto, essa sequência também é conhecida como sequência de Hans van der Laan ou Cordonnier (Alves & Catarino, 2022).

Diante dessa relação entre esses números, surgiu a motivação de explorar outras sequências, potencializando os seus respectivos desenvolvimentos epistemológicos e matemáticos. De fato, constata-se o caráter inédito em relação à evolução matemática de Padovan voltada para a área de ensino e construção de definições, proporcionando aos sujeitos participantes da pesquisa uma oportunidade de estudo ímpar. Esse fato justifica o interesse em desenvolver uma proposta de ensino para o estudo das sequências de Padovan, enfatizando o modelo combinatório desses números.

Frente a isso, é necessário construir cenários de ensino que estejam conectados com as necessidades dos estudantes. Assim, percebe-se o desafio imposto ao professor de Matemática de tornar as aulas mais atrativas, despertando o interesse dos estudantes na construção de conceitos matemáticos por meio de situações didáticas que estimulem a curiosidade. Nesse sentido, busca-se, entre as teorias da Didática da Matemática de origem francesa, aquela que analisa os obstáculos durante o processo de ensino e estuda os aspectos didáticos e cognitivos, encontrando a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986). A seleção da metodologia de pesquisa também seguiu o mesmo viés de cunho francês, atribuindo a este trabalho a Engenharia Didática

(Artigue, 1988), decorrente do estudo de Brousseau e das práticas das situações didáticas.

Estudos realizados sobre Didática Matemática (*Didactiques de Mathématique*) mostram que os primeiros estudos foram desenvolvidos na França nas décadas de 1960,1970 e 1980 na fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, relatando um forte interesse pelo trinômio clássico: professor-aluno-saber. No Brasil, recebendo o nome de Educação Matemática, pode-se relatar que o principal elemento do trinômio ao realizar uma transposição didática é o professor. De acordo com (Alves, 2018), dois elementos merecem um destaque na chegada desta didática no Brasil, sendo eles: em relação ao movimento da constituição e identidade científica da pesquisa, em relação ao ensino de Ciência e Matemática; e o outro relacionado ao campo efetivo de atuação, onde o aluno torna-se um sujeito analisado com bastante clareza pelo professor.

A definição sobre Didática da Matemática é apresentada como:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (Pais, 2011, p. 11).

Embora o foco esteja no professor, é bom enfatizar a importância do aluno, visto que este também é colocado no centro do processo de aprendizagem, cabendo ao docente guiá-lo de forma correta para determinadas situações-problema a serem resolvidas. Essa Didática da Matemática reúne pesquisas investigativas em relação ao surgimento de possíveis obstáculos na construção epistemológica de conceitos matemáticos em situações de ensino. Diante deste cenário, este trabalho realiza um estudo sobre a construção de definição, apresentando uma investigação da sequência de Padovan, a fim de transformá-la em um conteúdo a ser ensinado.

A Engenharia Didática estrutura os saberes que serão utilizados na atividade, sendo inicialmente levantadas as hipóteses e analisando-as posteriormente. Essa metodologia permite uma inovação didática, tendo como característica a organização de procedimentos metodológicos de pesquisa que estão sendo desenvolvidos em sala de aula. Assim, ao propor distintas situações didáticas, de modo a oportunizar a construção do conhecimento dos estudantes, é possível realizar a transposição de obstáculos de qualquer ramo da Matemática.

À vista disso, tem-se a preocupação com professores e pesquisadores de cursos de formação inicial de professores que abordam o estudo da sequência de Padovan na disciplina de História da Matemática, a fim de (re)pensar suas práticas de ensino. Observa-se, portanto, a contribuição da didática francesa especialmente a Didática da Matemática, relacionando-a aos estudos sobre objetos matemáticos e suas relações vivenciadas em sala de aula.

Com base nos trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2022), Spivey (2019) e Spreafico (2014) sobre o modelo combinatório da sequência de Padovan, Fibonacci e a noção de tabuleiro, surge a questão norteadora desta pesquisa: como construir a definição da sequência de Padovan com base em seu modelo combinatório no curso de formação inicial de professores de Matemática? A partir dessa questão norteadora, tem-se o objetivo geral desta pesquisa, sendo, portanto: realizar uma investigação da sequência de Padovan, construindo a sua definição perante o seu respectivo modelo combinatório via material manipulável, com base na teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas no curso de formação inicial de professores de Matemática.

Assim, é elaborada uma situação-problema fundamentada na teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), com foco na construção da definição da sequência de Padovan, fornecendo apoio para a formação inicial de professores de Matemática.

REFRENCIAL TEÓRICO

Sem dúvidas, o processo de ensino e aprendizagem matemático não é considerado trivial para muitos alunos, necessitando de alternativas para estimular o raciocínio e interesse dos estudantes. Assim, em meados dos anos 80, surgiu na França uma metodologia de pesquisa com o viés de aperfeiçoar as práticas existentes no sistema de ensino, buscando ainda uma compreensão dos acontecimentos da aprendizagem matemática.

Com isso, surge-se então a metodologia da Engenharia Didática, em que segundo Artigue (1988), o seu trabalho é similar de um engenheiro, amparando-se em conhecimentos científicos técnicos de seu domínio e, obrigado a utilizar objetos mais complexos do que os depurados das Ciência. Além disso, essa metodologia, possibilita o estudo das práticas existentes em sala de aula, fornece recursos para a formação do professor e, analisa a sua respectiva atividade e transposição didática do conteúdo matemático (Chevallard, 1991).

Diante da origem das perspectivas de analisar o papel do professor, em torno da Didática da Matemática, tem-se o ensino do modelo combinatório de Padovan, enfatizando a atividade de formação inicial do professor de Matemática. Com isso, a presente pesquisa utilizou da Engenharia Didática, apresentada por microengenharia ou macroengenharia. Onde a primeira possui um olhar mais restrito das práticas de sala de aula. Enquanto a segunda possui um olhar mais global. Assim sendo, emprega-se a microengenharia nesse trabalho, com o viés de realizar o ensino do objeto de estudo matemático. Artigue (1995) retrata ainda que a utilização dessa metodologia de pesquisa é algo complexo, visto que os dados coletados em sala de aula "não são fáceis de se desenvolver na prática" (Artigue, 1995, p. 36).

A Engenharia Didática permite estudar os fenômenos existentes em sala de aula, fornecendo recursos para a formação do professor. Desse modo, é possível analisar a relevância do papel do professor e a sua ação de transpor o conteúdo didaticamente em torno dos saberes científicos. Essas pesquisas realizadas na área da vertente francesa da Didática da Matemática, potencializam as condições e experimentações científicas vivenciadas em sala de aula. À vista disso, tem-se a abordagem do estudo combinatório da sequência de Padovan com a metodologia da Engenharia Didática em complementação com a Teoria das Situações Didáticas para cursos de formação inicial de professores de Matemática, enfatizando a formação e aprendizagem do professor de Matemática, bem como o processo evolutivo da sequência de Padovan.

Dividida então em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori* e a validação, tem-se o estudo entre a teoria e prática. Na primeira fase, são identificados os problemas referentes ao ensino e aprendizagem, buscando na literatura os trabalhos e livros sobre o objeto de estudo matemático, elencando os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática (Artigue, 1995).

Na concepção e análise a *priori*, são selecionadas as variáveis (microdidáticas ou macrodidáticas, discutidas mais adiante) e, desenvolvidas as situações de ensino com base no campo epistêmico-matemático, buscando alcançar o objetivo da pesquisa. Almouloud (2007) afirma que:

> “A análise a priori é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico” (Almouloud, 2007, p.176).

Na experimentação, são aplicadas as situações de ensino elaboradas na fase anterior, devendo ocorrer um registro desses dados coletados (Alves, 2016).

Lopes, Palma e Sá (2018):

> “inicialmente é constituída pelo período de aplicação e experimentação das atividades anteriormente planejadas, colhendo dados sobre a investigação. Em um segundo momento, refere-se a análise dos resultados que serão obtidos na investigação. Esta fase baseia-se na análise do conjunto dos dados obtidos na experimentação durante as sessões de ensino, assim como produções dentro ou fora de sala” (Lopes, Palma & Sá, 2018, p. 164).

Além disso, é indispensável que exista o contrato didático, apresentando as devidas responsabilidades dos professores e participantes da pesquisa. Destaca-se que existem casos em que ocorre a ruptura do contrato didático, visto que os estudantes não dispõem de interesse pelo processo de aprendizagem.

E por fim, tem-se a última fase, análise a *posteriori* e na validação, que analisa os dados coletados na fase anterior, comparando-os com a fase da análise a *priori*, realizando assim a validação das hipóteses formuladas. A validação pode ser interna, analisando somente os estudantes participantes da pesquisa, ou externa, em que compara os participantes que utilizaram a metodologia de pesquisa com os sujeitos que não a utilizaram (Laborde, 1997).

Ainda durante a aplicação, Almouloud (2007) discute que alguns ajustes e correções poderão ser evidenciados. Assim, segue-se para a última fase, avaliando os resultados obtidos para ocorrer uma contribuição do conhecimento didático na transmissão do conteúdo. Diante disso, ocorre a validação dos elementos na fase da experimentação, comparando os resultados que foram discutidos, analisando a evolução ou não da engenharia.

Visando apoiar as fases da Engenharia Didática, sente-se a conveniência de utilizar uma metodologia de ensino, que oportunize aos estudantes um local de aprendizado e troca de informações, sendo, portanto, a Teoria das Situações Didáticas, fundamentadas em situações didáticas de ensino.

Essa metodologia de ensino, propõe e estimula os estudantes a resolver situações didáticas de ensino, propiciando uma investigação durante o processo de ensino e aprendizado em matemática (Brousseau, 1986). Destaca-se que a situação didática, segundo Brousseau (2006), é "o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento” (Brousseau, 2006, p. 19). Tão logo, não se deve esquecer a presença do *milieu*, representando o meio de aplicação da situação didática. De fato, a Teoria das Situações Didáticas é dividida em quatro situações: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na situação de ação, segundo Alves (2016), é nesse momento que o sujeito tem o primeiro contato com a situação-problema proposta, sendo essa uma atividade composta por questões com enunciados diretos e objetivos. Assim, os participantes irão tentar resolvê-la realizando buscas nos conhecimentos já adquiridos. Brousseau (2002) afirma que:

> A sequência de “situações de ação” constitui o processo pelo qual o aluno forma estratégias, ou seja, “ensina a si mesmo” um método para resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio constitui o que chamamos de “dialética da ação”. Utilizamos a palavra “dialética” e não a palavra “interação” porque, por um lado, a aluna é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro, suas estratégias são, de certa forma, proposições confirmadas ou invalidada pela experimentação numa espécie de diálogo com a situação (Brousseau, 2002, p. 9, tradução nossa).

Na situação de formulação, os participantes transformam as ideias em linguagens mais técnicas e formais, objetivando conjecturar teoremas e propriedades (Vieira, Alves & Catarino, 2019). É importante que o sujeito evolua em cada uma das fases (situações) da teoria, permitindo que as informações das fases anteriores sejam aplicadas, bem como a ideia de que o raciocínio é um experimento.

A situação de validação acontece com a validação das resoluções apresentadas na fase da ação, propondo discussões. Oliveira e Alves (2019) afirmam que os estudantes, nesse momento, já devem ter internalizado os conceitos matemáticos, possibilitando a utilização de métodos para que ocorra a demonstração dos conceitos matemáticos verificados.

Por fim, na situação de institucionalização o professor analisa as resoluções apresentadas, revelando o objetivo da situação-problema (Alves, 2019). Vieira, Alves e Catarino (2020) afirmam que

> Nessa última etapa, o professor assume novamente a situação, identificando e reconhecendo o saber construído nas demais etapas discutidas. As resoluções são conferidas, e é então revelada a real intenção da atividade proposta, avaliando a passagem do conhecimento (*connaissances*) e do saber científico (*savoir scientifique*).

Em seguida, inicia-se a primeira fase da Engenharia Didática, com o levantamento do referencial teórico em torno do objeto de estudo e, demarcação do respectivo campo epistêmico-matemático. Além disso, é importante discutir em torno do contrato didático, sendo este considerado como uma relação em que determina a responsabilidade de cada professor e aluno, respeitando as suas respectivas regras estabelecidas durante o funcionamento dos processos de ensino e aprendizagem. Pais (2011) afirma que o contrato didático "é uma noção apropriada para compreender o fenômeno educacional, no plano mais específico da sala de aula, embora, na realidade do cotidiano escolar, aconteçam fatos não previsíveis, dificultando a realização dos objetivos propostos".

Vale salientar que nem sempre o contrato didático é concretizado, pois existem vezes em que o discente não se interessa pela resolução das situações-problema propostas pelo docente, havendo assim uma ruptura do contrato. Portanto, na fase de experimentação, são coletados os dados dos discentes, para que posteriormente, ocorra a validação ou negação na etapa final da Engenharia Didática.

Uma característica importante existente na Teoria das Situações Didáticas é a relevância em relação à Matemática e ao seu estudo epistemológico, sendo proferida de formas distintas, destacando a noção de obstáculo epistemológico. Os obstáculos epistemológicos definem-se como formas de conhecimento considerados relevantes e bem-sucedidos em contextos particulares, além dos contextos escolares, porém em determinado momento tornaram-se falsos ou inadequados (Brousseau, 1986).

Esses estudos tiveram como base Bachelard, em que descreveu uma lista de obstáculos de natureza. A ideia de obstáculo vai sendo formada e modificada conforme acontece o processo de ensino, ampliando para além do campo da epistemologia, para as áreas da didática, psicologia e entre outras.

As definições matemáticas indicam o avanço do conhecimento, tendo o estudo epistemológico das definições como facilitador da identificação dos conceitos históricos. Diversos são os elementos levados em consideração por Lakatos (1980), tais como: a conjectura, a prova da conjectura, mas também as definições em construção, os lemas ocultos que permitem o surgimento de novos conceitos e outras provas.

De fato, a presente pesquisa trata de conceitos e definições matemáticas que estão em construção na pesquisa matemática, envolvendo o conteúdo de sequências numéricas e combinatória, permitindo que essas condições tenham, uma bagagem conceitual semelhante perante uma situação que envolva um "novo" conceito. A situação utilizada na presente investigação, foi de classificação, sendo demonstrada por meio da definição construída. Foi também realizado investimento de forma exploratória aos níveis primário e secundário, trabalhando numa situação classificatória sobre os conceitos de interpretação combinatória da sequência de Fibonacci, por meio do material concreto desenvolvido para fim deste meio. A elaboração da situação, a análise e validação dessas situações são possíveis diante da teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas.

A caracterização da atividade de definição é realizada pela representação por meio do material manipulável desenvolvido, descrevendo o funcionamento da matemática, utilizando o modelo de Balacheff (1995) que se baseia na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986).

O estudo das definições aborda as concepções: de Aristóteles, a qual desenvolve componentes lógicos e linguísticos, estudando o discurso; de Popper, propondo um estudo teórico das definições e; de Lakatos, atentando para a construção dos conceitos abordados nas definições, realizando assim um estudo heurístico.

A concepção de Lakatos (1980), aborda também as concepções de Aristóteles (1965) e Popper (1985), centrando-se no processo de geração de conceitos, reservando um lugar privilegiado para as definições. A definição do problema na concepção de Lakatos (1980), apresenta primordialmente a situação de classificação, delimitando o conceito da sequência de Padovan.

O sistema de representação na concepção de Lakatos (1980), podem ser realizadas por meio de jogos. Logo, tem-se o desenvolvimento do material manipulável, envolvendo a interpretação combinatória de Fibonacci, para assim conseguir manusear as peças e obter a interpretação combinatória de Padovan. Diversos são os elementos levados em consideração por Lakatos (1980), tais como: a conjectura, a prova da conjectura, mas também as definições em construção, os lemas ocultos que permitem o surgimento de novos conceitos e outras provas.

A concepção de Aristoteles (1965) é realizada por meio do processo de definição por gênero e diferenças específicas. A classificação do problema é dada de uma forma mais generalista, apresentando o problema e a sua delimitação. Os controles são bem definidos, verificando a unidade do conceito, conforme estabelecido por Aristoteles (1965). Assim, devem ser proibidas redundâncias, questionando a existência dos conceitos.

A concepção de Popper (1985) distingue-se por sua rejeição ao essencialismo de Aristóteles. A principal contribuição de Popper para a construção de definições reside em operadoras centradas na construção de uma teoria científica e em estruturas de controle. A seleção do problema é feita com base em teorias concorrentes.

Os conceitos de matemática discreta envolvidos em problemas de combinatória, aritmética, verificam essas diferentes condições e se prestam particularmente a uma atividade de definição, conforme realizado no trabalho de Ouvrier-Buffet (2003). Assim, tem-se a proposta da presente atividade, ocorrendo a construção da definição da recorrência da sequência de Padovan, considerando o seu teor de ineditismo perante o objeto matemático envolvido e a elaboração do material manipulável.

METODOLOGIA

Esta seção descreve o procedimento metodológico realizado nesta pesquisa. Inicialmente, foi realizado um levantamento do referencial teórico, abordando a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, a teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas e o objeto matemático (sequência de Padovan e sua abordagem combinatória), realizando assim as análises preliminares da Engenharia Didática. Em relação ao objeto matemático, foram discutidos trabalhos da área de Matemática Pura sobre a sequência de Padovan, a fim de resgatar o estado da arte dessa sequência e permitir a transposição didática em sala de aula nas fases seguintes.

Com o objetivo de realizar a aplicação da pesquisa em curso de formação inicial de professores, foi selecionada a disciplina de História da

Matemática do curso de Licenciatura em Matemática. A seleção do público-alvo deu-se pela disciplina possuir em sua ementa desenvolvimento histórico e representações dos números, possibilitando o estudo de sequências recorrentes lineares. De fato, constatou-se a presença do conteúdo de sequências recorrentes lineares ao discutir sobre a História da Matemática. Além disso, os estudantes devem possuir alguns conhecimentos prévios relevantes para o estudo do objeto matemático em questão, tais como os adquiridos na disciplina de Álgebra Linear conforme a ementa do curso (Educação, 2023).

Com isso, a pesquisa foi aplicada com uma amostra de 5 estudantes matriculados na referida disciplina, permitindo uma investigação com base na Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas. De fato, a pesquisa possui um caráter inédito, permitindo a contribuição do material manipulável como forma de transpor o conteúdo matemático para a área de ensino, além de vislumbrar a visualização dos termos da sequência diante da construção da definição.

Em seguida, foram realizadas aulas expositivas para os estudantes do curso de formação inicial de professores, abordando sequências numéricas recorrentes, a sequência de Fibonacci e a noção de tabuleiro. Ao total foram realizadas 4 aulas, sendo essas com caráter de proporcionar aos participantes uma base matemática para a construção da definição da nova sequência investigada.

Posteriormente, foi elaborada uma situação-problema e analisados os possíveis comportamentos dos estudantes durante a aplicação, com base na teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas. Nesse momento, observou-se a realização da segunda fase da Engenharia Didática.

Continuando o procedimento metodológico, a atividade proposta foi experimentada no curso de formação inicial de professores de Matemática, dando sequência à terceira fase da Engenharia Didática. Durante a experimentação, os participantes foram analisados com base na Teoria das Situações Didáticas, e os dados foram registrados e armazenados para posterior discussão na pesquisa. Por fim, confrontaram-se os dados previstos com os dados aplicados e validados, de acordo com a validação interna da Engenharia Didática, concluindo a quarta e última fase do processo.

ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta seção é realizado um levantamento bibliográfico, referente ao modelo combinatório de Fibonacci e a noção de tabuleiro, para que seja então dado início a construção da definição da sequência "nova". Feito isso, foram elencados trabalhos na área de Matemática Pura e de História da Matemática, para que haja uma exploração da gênese desta sequência, destacando pontos relevantes tais como a noção de tabuleiro, propriedades e outros conceitos matemáticos. Assim, são elencados elementos de ordem epistemológica para que seja então transformado num conteúdo a ser ensinado aos estudantes.

Inicialmente, tem-se o estudo de sequências numéricas recorrentes, sendo evidenciado pela sequência de Fibonacci, abordando o seu aspecto histórico e desconsiderando outros aspectos importantes sobre a contribuição matemática (Burton, 2007). Pode-se dizer que uma sequência numérica recorrente é formada por uma lista infinita de termos, onde para obter esses termos tem-se o cálculo a partir de uma fórmula de recorrência. Além disso, são definidos alguns termos iniciais, a depender da ordem da sequência. A exemplo disso, tem-se sequência de Fibonacci, como sendo uma sequência de segunda ordem.

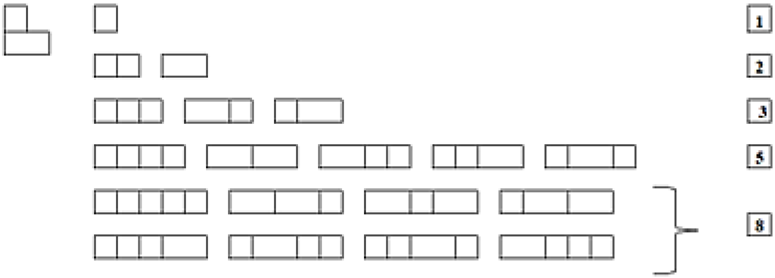
Esses números possuem a sua gênese na problemática dos pares de coelhos imortais, gerando os termos pertencentes a sequência de Fibonacci (Gullberg, 1997). Essa sequência foi desenvolvido por Leonardo Pisano (1170-1217), apresentando os termos 0,1,1,2,3,5,... Desse modo, tem-se a sua fórmula de recorrência dada por: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \leq 2$ e os termos iniciais $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Tão logo, existem diversas aplicações e abordagens envolvendo essa sequência, sendo negligenciadas em livros de História da Matemática. Com base nisso, esta pesquisa abordará a interpretação combinatória desses números, permitindo uma forma de visualizar os termos desta sequência.

Perante a isso, é importante mencionar a noção de um tabuleiro, estabelecida por Spreafico (2014), em que trata de um conjunto de quadrados, sendo esses denominados por células, onde são enumeradas e descrevem uma determinada posição. A partir disso, tem-se o estudo do modelo combinatório de Fibonacci, em que f_n representa a quantidade de formas de ladrilhar no tabuleiro 1 x n, sendo utilizados quadrados 1 x 1 e dominós 1 x 2. Desse modo, tem-se que $f_n = F_{n+1}$. (Spivey, 2019). A Figura 1 apresenta os ladrilhamentos iniciais de Fibonacci, para os casos de n=1 até n=5, observando ao lado direito a correspondência do número de Fibonacci perante cada tabuleiro analisado.

Figura 1

Modelo combinatório de Fibonacci. Elaborado pelos autores com base em Spivey (2019).



ANÁLISE A *PRIORI* E CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nesta seção ocorre o desenvolvimento da situação-problema, sendo analisada com base na variável microdidática, uma vez que a questão proposta é referente à organização de uma experimentação, como previsto na Engenharia Didática (Almouloud, 2007).

Diante disso, foi realizado um estudo nas análises preliminares, abordando o campo epistêmico-matemático da pesquisa, explorando assim a interpretação combinatória da sequência de Fibonacci. Com isso, uma análise epistemológica, cognitiva e didática foi possível. Visando facilitar o processo de ensino e aprendizagem, foi elaborado o material manipulável, contendo peças para a construção dos tabuleiros de Fiboancci e da "nova" sequência em construção.

A seguir, tem-se a discussão da situação didática compostas por situação-problema, fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas, permitindo uma análise da metodologia e das concepções abordadas. Durante a proposição da situação-problema, serão analisadas as variáveis didáticas referentes os conteúdos desenvolvidos no campo epistêmico-matemático, sendo esses: Noção de tabuleiro (Spreafico, 2014); Modelo combinatório de

Fibonacci (Spivey, 2019); construção de definições; sequência de Padovan e Modelo combinatório de Padovan.

Situação-problema: De uma maneira generalista, é possível constatar pesquisas contemporâneas relacionadas ao estudo de sequências numéricas recorrentes e suas inúmeras generalizações, que costumam ser negligenciadas em livros de História da Matemática (Burton, 2007). Uma abordagem interessante, é a interpretação combinatória da sequência de Fibonacci via ladrilhamentos. Vale ressaltar que um tabuleiro é formado por quadrados denominados casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essas enumerações descrevem a posição. Um determinado tabuleiro será chamado apenas de n-tabuleiro (Spreafico, 2014). Tão logo, tomando como base a recorrência da sequência de Fibonacci, dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n..2$, cujos valores iniciais são dados por $F_0 = 0, F_1 = 1$. Desse modo, pode-se utilizar o material manipulável e as peças disponíveis para a construção dos ladrilhamentos de Fibonacci. Para isso, considere como peças disponíveis o quadrado (tamanho 1 x 1) e o dominó (tamanho 1 x 2), ambos de cor branca. Considere f_n o número de configurações para ladrilhar um tabuleiro de comprimento n com quadrados e dominós. Isso posto, a quantidade de maneiras de ladrilhar essas peças para um tabuleiro de tamanho 1 x 1 é 1; para um tabuleiro de tamanho 1 x 2, tem-se 2 maneiras; para um tabuleiro de tamanho 1 x 3, tem-se 3 maneiras; para um tabuleiro de tamanho 1 x 4, tem-se 5 maneiras; e para um tabuleiro de tamanho 1 x 5, existem 8 maneiras. Com isso, tem-se que a quantidade de maneiras de se cobrir um n-tabuleiro com quadrados 1 x 1 e dominós 1 x 2 é igual a $f_n = F_{n+1}$. A Figura 1 apresenta os ladrilhos de Fibonacci.

Diante dessas informações, tem-se a disposição novas peças, sendo essas: um triminó cinza, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3; um quadrado preto 1 x 1 e o dominó azul 1 x 2, qualquer ladrilho é formado pela disposição das formas definidas. O quadrado preto destina-se a complementar os ladrilhos vazios, sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho.

Assim, quantas formas de ladrilhar pode-se obter para um tabuleiro de tamanho 1, 2, 3, 4 e 5, sabendo que para $n = 0$ tem-se valor igual a 1? Esses números formam alguma sequência numérica?

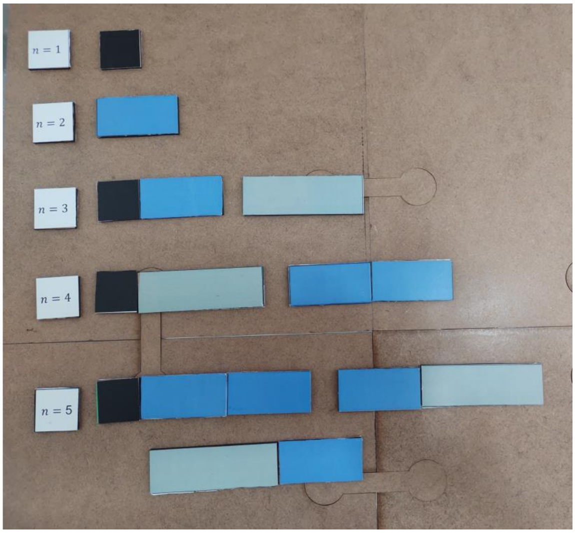
Para a atividade proposta, os estudantes deverão discutir as definições seguintes: Definição 1. Sequência Numérica; Definição 2. Sequência de

Fibonacci; Definição 3. Noção de tabuleiro; Definição 4. Modelo combinatório de Fibonacci; Definição 5. Regras de configuração das peças da interpretação combinatória de Padovan; Definição 6. Sequência de Padovan; Definição 7. Modelo combinatório de Padovan.

Fase da ação: os estudantes deverão observar os ladrilhamentos de Fibonacci, permitindo compreender a sua construção. Assim, busca-se a apropriação do material manipulável, de forma a compreender a interpretação combinatória para a sequência de Fibonacci com as regras e peças estabelecidas. Nesse momento os estudantes deverão investigar a construção das Definições 1, 2, 3 e 4. Diante dessa situação-problema, os possíveis erros estimados dos estudantes, serão em relação as regras e configurações das peças, destacando a inserção do quadrado preto. Para que esse obstáculo seja sanado, os estudantes deverão compreender que o quadrado preto pode ser inserido somente uma única vez e no início do ladrilho, ressaltando que o mesmo pode não aparecer nos demais ladrilhos disponíveis.

Figura 2

Interpretação combinatória da "nova" sequência em estudo.



Fase da formulação: busca-se que os sujeitos possam manipular as peças disponíveis, seguindo as regras definidas, para assim alcançarem montar os tabuleiros de tamanhos 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4 e 1 x 5 ($n = 1, 2, 3, 4$ e 5). Para o tabuleiro de tamanho 1 x 1, é possível obter apenas uma forma de ladrilhar, sendo esta com a presença do quadrado preto. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 2, é possível obter apenas uma forma de ladrilhar, sendo esta com a presença do dominó azul. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 3, é possível obter duas formas de ladrilhar, sendo estas: um quadrado preto concatenado com o dominó azul e, um triminó cinza. Para o tabuleiro de tamanho 1 x 4, é possível obter duas formas de ladrilhar, sendo estas: um quadrado preto concatenado com o triminó cinza e, dois dominós azuis concatenados. Por fim, para o tabuleiro de tamanho 1 x 5, é possível obter três formas de ladrilhar, sendo estas: um quadrado preto concatenado com dois dominós azuis; um triminó cinza concatenado com dois dominós azuis e, dois dominós azuis concatenado com um triminó cinza. A Figura 2 representa a construção desses casos citados, obtendo os termos oriundos de uma possível sequência.

Assim, observa-se a presença dos seguintes números pertencentes à sequência numérica: 1, 1, 1, 2, 2 e 3. Destaca-se que o primeiro termo, $n = 0$, foi definido no enunciado da atividade. Nessa fase os estudantes abordam a Definição 5 e, investigam a Definição 4 para que possam construir as Definições 6 e 7. Os possíveis erros previstos, são em relação a construção dos ladrilhamentos, atentando-se para as regras e os números que foram aparecendo de acordo com cada valor de n. Desse modo, os estudantes deverão observar a quantidade máxima de ladrilhamentos possíveis, não podendo ignorar e/ou esquecer nenhum caso, diante dessa interpretação combinatória. É importante ter cuidado ainda em relação a outro possível erro, uma vez que os estudantes poderão equivocar-se e pensar que os ladrilhos ocorrem obtendo o termo adiantado da sequência, assim como para Fibonacci.

Fase da validação: nesta fase os estudantes deverão observar os termos obtidos e assim identificarem a regra de recorrência dessa sequência numérica. Tão logo, é possível determinarem que o próximo termo (sexto termo) terá valor 4. Esse valor é oriundo da soma do terceiro termo com o quarto termo, ignorando o quinto termo. Assim, pode-se estabelecer a recorrência para a sequência estudada (S_n) como sendo: $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$, necessitando dos valores iniciais $S_0 = S_1 = S_2 = 1$ para $n..3$.

É importante notar que até o presente momento o professor não deve interferir na atividade, não apresentando a sequência e nem nomeando-a. Com isso, os estudantes poderão atribuir qualquer nome para a sequência investigada. É o momento em que os sujeitos conseguem validar a Definição 7. Para essa fase, tem-se a previsão de possíveis erros, sendo esses referentes a recorrência da sequência estudada, não visualizando o salto existente entre o termo anterior imediato. Para isso, os estudantes deverão observar os termos presentes na sequência, com o viés de obter o termo seguinte, de acordo com os números que obtiveram na construção dos ladrilhamentos.

Fase da institucionalização: após as discussões realizadas, o professor deve retomar a posição da atividade, verificando as inquietações apresentadas pelos estudantes. É importante que nesse momento ocorra uma discussão em torno dos argumentos dos sujeitos, identificando também os raciocínios que aconteceram de modo errôneo. Deve ocorrer a institucionalização da sequência de Padovan e sua interpretação combinatória para os casos citados ($n = 1, 2, 3, 4$ e 5). Com isso, o professor deve apresentar a sequência de Padovan, nomeando a sequência numérica estudada e investigada pelos estudantes por meio do material manipulável e sua forma combinatória. De fato, tem-se a construção da definição da sequência de Padovan, possibilitando aos estudantes obterem os seus respectivos termos, por meio da abordagem combinatória. Além disso, o professor deverá demonstrar o teorema referente à interpretação combinatória de Padovan, permitindo uma visualização dessa abordagem combinatória.

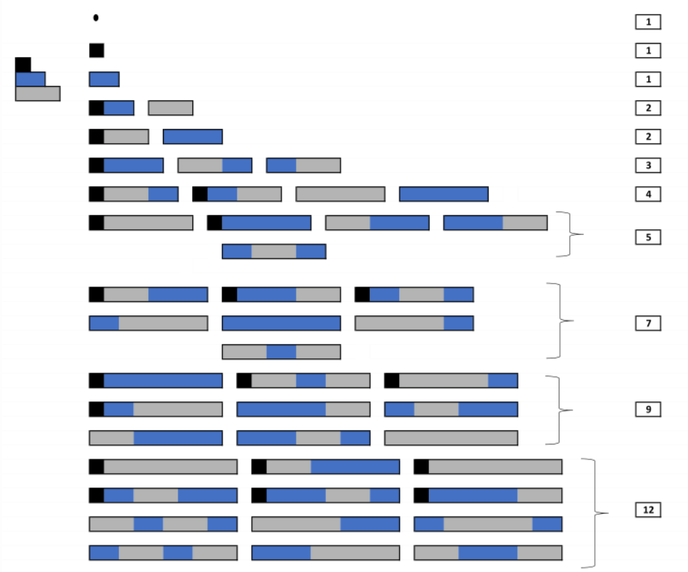
Com isso, tem-se que a sequência de Padovan é uma sequência numérica de terceira ordem, descobertos pela primeira vez em 1924 pelo estudante de arquitetura francês Gérard Cordonnier. Remodelado de forma independente pelo monge-arquiteto francês Dom Hans Van der Laan (1904-1991), tem-se que os números Padovan possuem associação histórica com Cordonnier, Padovan, Van Der Laan e Stewart, sendo conhecidos também por sequência de Cordonnier. Richard Padovan atribuiu em seu livro a sequência como sendo de Van der Laan (Padovan, 2002). A sua recorrência é dada pela relação de recorrência: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, onde $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

Em relação aos ladrilhamentos de Padovan, tem-se que para $n \geq 0$, os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul e triminó cinza é dado por: $p_n = P_n$, sendo p_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan (Vieira, Alves & Catarino, 2022) (ver Figura 3).

O estudo de definições zero pode não ser percebido pelos estudantes como definidor de noções provisórias, mas sim como ideias surgidas durante a resolução da atividade proposta. Observa-se que realizar tal síntese também permite estabelecer as concepções de estudantes sobre a definição matemática, além de avaliar evoluções durante experimentos subsequentes, envolvendo outros conceitos matemáticos e tipos de problemas.

Figura 3

Modelo combinatório da sequência de Padovan. (Vieira, Alves, & Catarino, 2022).



Tal abordagem consistente na construção de uma situação fundamental em matemática. É possível ainda identificar as concepções dos estudantes sobre o conceito matemático em questão e torná-los aptos a compreender sobre os problemas matemáticos propostos.

EXPERIMENTAÇÃO

A fase da experimentação aconteceu numa Instituição de Ensino Superior, localizada na cidade de Fortaleza e no estado do Ceará, para o curso de Licenciatura em Matemática. A disciplina observada foi de História da Matemática, sendo essa obrigatória e contendo 5 alunos matriculados. Todavia, a aplicação aconteceu durante duas semanas, com 4 aulas de duração de 2h/a cada.

Ressalta-se que as aulas foram aplicadas com base na Teoria das Situações Didáticas, sendo elaborada uma situação didática de ensino e por meio de lista de exercício e material manipulável. Para tanto, ocorreram discussões entre os participantes, visando elaborar estratégias de resolução descritas no quadro e material (jogo).

Nesse momento ocorre o estabelecimento do contrato didático, onde são geradas as expectativas do docente em relação aos sujeitos, e deles em relação ao docente. Assim, são incluídas as relações do saber e a maneira a qual o saber é efetivado e tratado por ambos.

Esta etapa é caracterizada ainda por aplicar toda a estrutura já organizada até então, observando as situações de aprendizagem e envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática, não seguindo a dinâmica de uma aula tradicional ou comum (Pais, 2011). Assim, a organização da aula, neste período, deve ser fundamentada na Teoria das Situações Didáticas e voltada para a coleta de dados dos alunos, para que possa assim analisar o ensino-aprendizagem.

Durante a experimentação, o docente deverá colocar em prática a sequência didática elaborada na concepção e análise a *priori*, observando o momento da resolução das atividades propostas pelos estudantes, para serem então analisadas posteriormente na próxima fase.

Inicialmente ocorreu um estudo de sequências numéricas recorrentes, apresentando a sequência de Fibonacci e sua abordagem combinatória via ladrilhamentos. Desse modo, uma discussão em torno da noção de tabuleiro foi realizada, permitindo que os sujeitos obtivessem um embasamento para a investigação seguinte.

Para a coleta dos dados foram realizados procedimentos de gravação de áudio, registros fotográficos durante as discussões das aulas em análise. Destaca-se que todos os registros foram permitidos pelos estudantes, assinando um termo de consentimento livre e esclarecido.

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Durante a aplicação é importante destacar possíveis correções e ajustes locais, sendo indicados então apenas alguns elementos que se considera mais relevantes nesta pesquisa durante o processo de experimentação. Sobretudo, ressalta-se que após a experimentação, existe um retorno para à análise a *posteriori*, avaliando e analisando os resultados obtidos e explorando os dados para que haja uma contribuição dos conhecimentos didáticos durante a transmissão do conteúdo.

Após a análise a *posteriori*, é importante que haja uma validação dos elementos utilizados na fase de experimentação da Engenharia Didática, comparando os resultados discutidos pelos discentes, levantando possíveis questionamentos e analisando a evolução ou não da engenharia sugerida. A situação-problema discutida deve ser considerada, como variável micro didática, que segundo Almouloud (2007) essas são "relativas à organização local da sequência, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase da experimentação".

A aplicação iniciou com a distribuição da lista de exercício e regras para o manuseio do material manipulável. A validação aconteceu com a elaboração de uma situação didática, por meio de atividade proposta aos estudantes, com o objetivo de instigar o lado investigativo do participante, propondo os conhecimentos necessários para as soluções e construção de definição. Diante disso, a situação-problema permitiu a compreensão da definição da recorrência da sequência de Padovan via a sua abordagem combinatória, sendo discutida de acordo com a variável didática. Destaca-se que a validação ocorreu de forma interna, não havendo discussão com outras aplicações e ambientes.

A situação-problema tem o objetivo de construir a definição da sequência de Padovan, resgatando a abordagem combinatória de Fibonacci e a noção de tabuleiro. Assim, foi realizada uma discussão em torno do assunto de sequências numéricas e recorrentes, observando a dificuldade dos estudantes em estabelecer a recorrência de determinadas sequências.

A seguir são realizadas as observações e discussões baseados nos registros armazenados durante as aplicações, tendo enfoque na Engenharia Didática e na Teoria das Situações Didáticas, validando de forma interna esta pesquisa.

Com isso, foi apresentado o material manipulável, as regras para a construção do modelo combinatório de Fibonacci e o modelo. Em seguida, foram apresentadas asa regras de construção e as peças disponíveis para uma nova sequência. A Figura 4 retrata a fase da ação dos estudantes A, B e C, tentando construir o modelo combinatório da nova sequência em estudo.

Conforme Brousseau (1986), é o momento em que o aluno apresenta uma estratégia de solução, podendo essa ser de forma escrita ou oral. Assim, pode-se observar os sujeitos apresentando a ideia de montar os ladrilhamentos de Padovan, perante as peças disponíveis e o respectivo tamanho do ladrilho.

É importante destacar que nessa fase, os alunos compreenderam a regra do quadrado preto, porém o Aluno B não havia compreendido bem a noção de tabuleiro, acarretando na construção de ladrilhamentos desordenados, ou seja, com valores de n distintos do tamanho da peça final. Para a resolução desse obstáculo, o Aluno C explicou a construção dos tabuleiros de tamanhos 1 x n, permitindo uma compreensão do estudante. Com isso, percebe-se que as discussões entre os sujeitos são de grande valia, possibilitando uma melhor compreensão do conteúdo abordado. Interessante ainda mencionar que os sujeitos não conheciam as interpretações combinatórias das sequências, bem como a sequência de Fibonacci.

Figura 4

Fase da ação ocorrendo durante a experimentação. Dados da pesquisa.

Durante a formulação, os estudantes conseguiram desenvolver além da proposta solicitada. Assim, construíram os ladrilhamentos para os valores de n=6, e n=7. Inicialmente, ao determinarem os valores até n=5, alguns estudantes não conseguiram calcular os termos seguintes, ou seja, não conseguiram identificar a recorrência e regra de construção dos termos. Por isso, optaram por desenvolver mais ladrilhamentos. A Figura 5 apresenta a fase da formulação pelos Aluno B e Aluno D, dando continuidade ao modelo combinatório para valores de n posteriores.

Figura 5

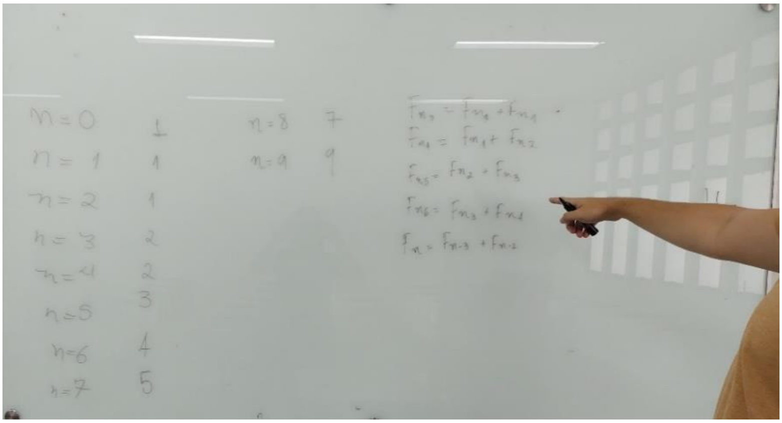
Fase da formulação ocorrendo durante a experimentação. Dados da pesquisa.

Na validação, percebe-se na Figura 6, a construção da definição da recorrência da sequência pelo Aluno E. Constata-se que o sujeito conseguiu determinar mais termos da sequência após a construção do modelo combinatório, efetivando a sua recorrência com base nos cálculos para os termos predecessores.

Pode-se observar o apoio dos sujeitos nos números obtidos pelo material manipulável, permitindo obter a recorrência da nova sequência em estudo. Assim, observa-se que, como estabelecido por Brousseau (1986), os participantes permanecem envolvidos pela atividade, demonstrando e convencendo os demais colegas sobre os argumentos utilizados para a resolução da situação-problema.

Figura 6

Fase da validação ocorrendo durante a experimentação. Dados da pesquisa.



No decurso da resolução os obstáculos epistemológicos e cognitivos foram identificados, sendo superados com a discussão, troca de informações e contribuição do grupo participante. Esse fato é evidenciado quando determinado aluno relata que "*se Fibonacci é a soma de dois termos, essa também tem que ser, resta saber quais são esses dois termos*". Isso mostra a dificuldade em desenvolver a fórmula de recorrência da sequência de Padovan, sendo disponibilizados alguns termos pertencentes a essa sequência.

O processo de construção de definições retrata a busca do conhecimento pelo estudante, levando em consideração os filósofos citados no estudo desta pesquisa. Assim, diante da concepção de Popper (1985), tem-se que o sistema de representação relaciona as teorias e conceitos, como é o caso das sequências estudadas (Fibonacci e Padovan). Os operadores são feitos perante a construção e teste de axiomas locais, realizado com o manuseio do material manipulável. Os controles são realizados com base na formulação de afirmações e a realização de testes experimentais, manuseando as peças disponíveis para obter os termos da sequência de Padovan por meio de ladrilhamentos. Diante disso, tem-se o desenvolvimento da atividade voltada para a construção de definições, mobilizando analogias e campos matemáticos. Atividade de definição orienta-se principalmente pela classificação, categorização de objetos e sua nomenclatura. A construção da definição em questão será guiada por buscar o menor número de condições iniciais, para obter o maior número de resultados. Uma das principais dificuldades de trabalhar com definições matemática, é obtida durante a escolha de um conceito matemático e na exploração a priori deste conceito, a fim de determinar os problemas apropriados e considerar várias possíveis definições, ou mesmo conjecturas e provas envolvendo este conceito.

Com base em Lakatos (1980) ocorre uma realização da interpretação para a sequência de Padovan, sem conhecer a sua recorrência e os seus termos. Destaca-se que a sequência não é nomeada, para que os sujeitos possam investigar e conseguir definir o conceito em relação à abordagem combinatória dos números de Padovan por meio de ladrilhamentos. De fato, pode-se destacar a mudança de representação e linguagem relacionadas a uma passagem da geometria e combinatória para a topologia algébrica desses números, não sendo suficientes para Lakatos (1980).

Diante da concepção de Aristóteles (1965), tem-se que o sistema de representação é ofertado com base em regras e peças estabelecidas pelo objeto matemático manipulável, para que os sujeitos possam manuseá-las e obter os termos dessa sequência em estudo. Os operadores são estudados demonstrando a equivalência entre as definições de Fibonacci e Padovan, com uma linguagem simples.

Por fim, ocorreu o desenvolvimento da atividade voltada para a construção de definições, mobilizando analogias e campos matemáticos. Atividade de definição é orientada principalmente pela classificação, categorização de objetos e sua nomenclatura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Seguindo a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, iniciou-se com as análises preliminares a investigação de trabalhos de Matemática Pura relacionados às sequências de Padovan e Fibonacci. Foi constatada a importância de livros, artigos e teses como fontes fundamentais para o avanço da pesquisa desses números, resgatando seus aspectos históricos, cognitivos e didáticos.

Com base nisso, foi possível realizar um estudo das sequências numéricas recorrentes, tomando como exemplo a sequência de Fibonacci. A partir desse estudo, desenvolveu-se o campo epistêmico-matemático, permitindo uma discussão sobre o modelo combinatório de Fibonacci e a noção de tabuleiro. O objetivo foi obter a definição da sequência de Padovan por meio de seu modelo combinatório.

Em seguida, foi elaborada uma situação-problema para ser aplicada em sala de aula, nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, realizando assim a transposição do assunto para o contexto didático-cognitivo.

Durante a discussão dos conceitos matemáticos, foi explorada a história e a evolução das sequências de forma geral, utilizando o material manipulável como facilitador no processo de construção da definição. Além disso, a situação didática de ensino foi embasada na Teoria das Situações Didáticas, analisando os possíveis comportamentos dos estudantes e comparando os resultados obtidos após a aplicação.

De fato, os pressupostos adotados como metodologia de pesquisa (Engenharia Didática) e teoria de ensino (Teoria das Situações Didáticas) permitem uma reflexão em torno do conteúdo e sua correspondente transposição didática. É importante destacar que o uso do material manipulável possibilitou um aprofundamento no conteúdo, oferecendo uma perspectiva singular em relação à abordagem combinatória das sequências em sala de aula.

Diante da microengenharia didática e da transposição didática, é importante destacar que a sequência foi estudada por meio da criação da situação de ensino fundamentada na Teoria das Situações Didáticas. Essa situação foi analisada e discutida por meio de situação-problema, previamente selecionada, com o objetivo de compreender o processo histórico-evolutivo da sequência de Padovan, explorando a construção de definições e a abordagem combinatória.

A utilização de material manipulável desempenhou um papel crucial para facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Por meio de jogos e suas respectivas interpretações combinatórias, os sujeitos puderam visualizar os termos das sequências de Fibonacci e Padovan, integrando o conteúdo das sequências com a Análise Combinatória.

Por fim, esta pesquisa busca ampliar a investigação e a divulgação do trabalho para professores-pesquisadores da área, evidenciando o interesse na formação e aperfeiçoamento das práticas em sala de aula do professor de Matemática.

AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

F.R.V.A. e P.M.M.C.C realizaram a supervisão do projeto. F.R.V.A., P.M.M.C.C. e R.P.M.V. conceberam a ideia apresentada e discutida nesta pesquisa. R.P.M.V. desenvolveu a teoria, adaptou a metodologia ao contexto da sala de aula vivenciada, criando modelos e coletando os dados. F.R.V.A., P.M.M.C.C. e R.P.M.V analisaram os dados e discutiram para realizar a contribuição final da pesquisa.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os autores concordam que os dados que sustentam os resultados deste estudo estão disponíveis mediante solicitação razoável, a critério dos autores.

REFERENCES

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. 3. ed. Editora UFPR.

Alves, F. R. V. (2019). Visualising the olympic didactic situation (ods): teaching mathemat-ics with support of the geogebra software. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(2), 97-116. https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8

Alves, F. R. V. (2018). Mestrado (acadêmico) em ensino de ciências e matemática: A proposta do instituto federal do ceará (ifce). *Revista Contexto & Educação*, *105*, 305-340.

Alves, F. R. V. (2016). Transição complexa do Cálculo TCC: Engenharia Didática para as noções de Sequências e Séries de Potências. *Educação Matemática em Revista – RS*, *1*(17), 83-97.

Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2022). A sequência de padovan ou cordonnier. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *22*(45), 21–43.

Aristóteles. (1965). *Organon – Les Topiques*. Vrin.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Artigue, M. (1995). Ingenieria Didática. *In* Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. *Ingeniéria didatica en Educacion Matemática*.

Balacheff, N. (1995). *Conception, connaissance et concept*. *In* Balacheff, N. *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (p. 159–162). IMAG.

Brousseau, G. (2006). A etnomatemática e a teoria das situações didáticas. *Educação Matemática Pesquisa*, *8*(2), 267-281.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des Mathématiques*, Kluwer.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherchesen Didactiquedes Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Burton, D. M. (2007). *The History of Mathematics: an introduction*. McGraw-Hill.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Educação, C. e. T. d. E. d. C. I. *Instituto Federal de. Programa de Unidade Didática – PUD*. 2023. Https://ifce.edu.br/fortaleza/cursos/superiores/licenciatura/matematica/pdf/ementas-s6-licenciatura-em-matematica.pdf.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics: from the birth of numbers*. Norton.

Ferreira, R. (2015). *Números mórficos*. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia*, *1*, 97-112.

Lakatos, I. (1980). *The Methodology of Scientific Research Programmes*. Cambridge University Press.

Lopes, T. B., Palma, R. C. da, & Sá, P. F. de. (2018). Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 159-181. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p159-181

Marohnic, L., Kovacic, B., & Radisic, B. (2013). O nultockama polinoma oblika xn-x-1. *Osjecki matematicki list*, *13*, 1–13.

Oliveira, R. R. de. & Alves, F. R. V. (2019). Uma Investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci Amparada na Engenharia Didática: uma Aplicação da Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae*, *21*(3), 170-193. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id3940

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. (Doctorat thesis). 327 f. Tese (Doutorado) – Université Joseph Fourier.

Padovan, R. (2002). *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*. Taylor & Francis.

Pais, L. C. (2011). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 3ed. Autêntica.

Popper, K. (1985). *Conjectures et réfutations – La croissance du savoir scientifique*. Payot.

Spivey, Z. M. (2019). *The Art of Proving Binomial Identities*. Taylor and Francis.

Spreafico, E. V. P. (2014). *Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos*. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas - IME.

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., & Catarino, P. M. M. C. (2022). Combinatorial Interpre-tation of Numbers in the Generalized Padovan Sequence and Some of Its Extensions. *Axioms*, *11*(11). https://doi.org/10.3390/axioms11110598

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., & Catarino, P. M. M. C. (2020). Uma Engenharia Didática no Processo de Investigação da Generalização da Sequência de Padovan: Uma Experiência em um Curso de Licenciatura. *Acta Scientae*, *22*(6), 109-136. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5795

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., & Catarino, P. M. M. C. (2019). Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática. *Indagatio Didactica*, *11*(4), 261-279. https://doi.org/10.34624/id.v11i4.10641