ISSN: 2178-7727
DOI: 10.64856/acta.scientiae.8308

Uso de errores matemáticos para atender dificultades y reforzar el aprendizaje de ecuaciones lineales

Karen Porras Lizano[a]
Jeremías Ramírez Jiménez[b]
Dennis Sequeira Lizano[c]

[a] Universidad Nacional de Costa Rica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Matemática, Heredia, Costa Rica
[b] Universidad Nacional de Costa Rica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Matemática, Heredia, Costa Rica
[c]Ministerio de Educación Pública, Liceo Regional de Flores, Heredia, Costa Rica.

RESUMEN

Antecedentes: Utilizamos los errores matemáticos como una oportunidad de aprendizaje. **Objetivo:** Describimos la aplicación de una de las actividades con errores matemáticos de una propuesta de enseñanza que atendió las dificultades y promovió el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales con una incógnita. **Diseño:** Mediante un enfoque cualitativo, específicamente un estudio de casos. **Entorno y Participantes**: Elegimos 18 estudiantes costarricenses del último año de educación secundaria, nivel más próximo a la educación superior. **Recopilación y Análisis de datos:** Se recolectó información a través de las producciones escritas de los participantes y realizamos un análisis de contenido, utilizando la categorización creada desde la teoría. **Resultados**: Aunque los estudiantes mostraron capacidad para identificar errores y proponer correcciones, algunas soluciones presentaron fallas en el razonamiento relacionadas con el uso del simbolismo algebraico o con la interpretación del signo igual en una ecuación. Asimismo, se identificaron dificultades en la manipulación de fracciones y radicales. No obstante, en varias respuestas se observaron indicios de comprensión conceptual al identificar y corregir errores presentes en las ecuaciones planteadas. **Conclusiones**: Consideramos que es crucial generar situaciones de aprendizaje que incorporen el uso de los errores como oportunidades para el aprendizaje, al incluirlos en el desarrollo de actividades en el aula de matemática, pues esto puede beneficiar a los estudiantes y brindar información sobre algunas medidas para mejorar el aprendizaje.

Palabras clave: aprendizaje; dificultades; errores matemáticos; atención de errores; pedagogía del error.

Autor de correspondencia: Karen Porras Lizano. Correo: karen.porras.lizano@una.cr

Use of mathematical errors to address difficulties and reinforce learning about linear equations

ABSTRACT

Background: We use mathematical errors as learning opportunities. **Objective:** This study describes the implementation of one of the activities with mathematical errors from a teaching proposal that addressed the difficulties and promoted the learning of the topic of linear equations with one unknown. **Design:** Through a qualitative approach, specifically with a case study. **Setting and Participants:** We chose 18 Costa Rican students in their final year of secondary education, the closest level to higher education. **Data collection and analysis:** The information was collected through the written productions of the participants, then a content analysis was carried out, using the previously constructed categorization from theory. **Results:** Although the students demonstrated the ability to identify errors and propose corrections, some solutions revealed weaknesses in reasoning related to the use of algebraic symbolism and the interpretation of the equal sign in an equation. We also identified difficulties in the manipulation of fractions and radicals. Nevertheless, several responses provided evidence of conceptual understanding, when the students identify and correct errors in the equations presented. **Conclusions:** We consider that it's crucial to generate learning situations that promote the use of errors as learning opportunities, by including them in the development of activities inside the mathematics classroom because these situations could benefit students and provide information on measures for their improvement in learning.

Keywords: learning; difficulties; mathematical errors; error management, error pedagogy.

Uso dos erros matemáticos para abordar dificuldades e reforçar a aprendizagem de equações lineares

RESUMO

Contexto: Utilizamos os erros matemáticos como uma oportunidade de aprendizagem.

Objetivo: Descrevemos a aplicação de uma das atividades com erros matemáticos de uma proposta de ensino orientada a atender dificuldades e promover a aprendizagem do tema de equações lineares com uma incógnita. **Design:** Foi utilizada uma abordagem qualitativa, especificamente um estudo de caso. **Cenário e participantes:** Participaram 18 estudantes costarriquenhos do último ano do ensino médio, o nível mais próximo do ensino superior. **Coleta e Análise de Dados:** As informações foram coletadas por meio das produções escritas dos participantes e realizamos uma análise de conteúdo, utilizando a categorização criada a partir da teoria. **Resultados:** Embora os estudantes tenham demonstrado capacidade de identificar erros e aplicar correções, algumas das soluções apresentaram falhas de raciocínio relacionadas ao uso do simbolismo algébrico ou ao significado do sinal da igualdade em uma equação. Também foram identificadas dificuldades na manipulação de frações e radicais. No entanto, em várias respostas observaram-se indícios de compreensão conceitual ao identificar e corrigir erros presentes nas equações propostas. **Conclusões:** Acreditamos que é fundamental criar situações de aprendizagem que promovam o uso do erro como uma oportunidade de aprendizagem, incluindo-o no desenvolvimento de atividades na aula de matemática. Isso pode beneficiar os alunos e fornecer informações sobre as medidas que podem ser tomadas para melhorar a aprendizagem.

Palavras-chave: aprendizagem; dificuldades; erros matemáticos; atenção do erro, pedagogia do erro.

INTRODUCCIÓN

La matemática es de gran utilidad, en las ciencias exactas y naturales, ciencias sociales y tecnología, entre otras, las cuales sirven de herramienta para dar solución a diversos problemas del mundo real (Mulero et al., 2013). En particular, el álgebra se considera un área necesaria y de gran utilidad, pues se concibe como un medio eficaz de expresión de los pensamientos matemáticos, en especial en las ecuaciones, donde se establecen relaciones entre variables, patrones y estructuras algebraicas, entre otros (Socas, 2011). Por otro lado, Rico (1995) señala que es común cometer equivocaciones, por lo que los errores pueden presentarse en cualquier momento del aprendizaje, visualizando al estudio de errores como un tema de interés permanente, en especial en la educación matemática, ya que constituye una posibilidad para la adquisición y afianzamiento del conocimiento (Rico, 1995). Entendemos el error desde la perspectiva de Godino et al. (2004), al afirmar que constituye una acción o producción realizada por el estudiante, que no es válida desde el punto de vista educativo, de forma que, para lograr un aprendizaje adecuado, las respuestas incorrectas se consideran como dificultades e –incluso– fracasos.

A pesar de lo anterior, los errores matemáticos suelen considerarse elementos perjudiciales y, en muchos casos, no reciben una atención didáctica adecuada (Mancera y Basurto, 2015). Además, algunas investigaciones reportan que existen dificultades manifestadas a través de los errores que cometen los estudiantes al realizar tareas algebraicas, en particular cuando ingresan al nivel superior (Gamboa et al., 2019; García, 2015; Olivar et al., 2018), lo que resulta llamativo considerando la cantidad de años de formación y dominio de conceptos matemáticos relevantes que deberían de poseer los estudiantes en este nivel. Por último, Rodríguez et al. (2012) mencionan que existen múltiples investigaciones centradas en conocer cuáles son las dificultades y errores que tienen los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y, además, las causas que los originan. Sin embargo, los mismos autores señalan que en pocas ocasiones se hace referencia a cómo hacerlos útiles para conseguir un mejor entendimiento de los contenidos.

Por tanto, con esta investigación se pretendió describir la aplicación de una de las actividades de una propuesta de enseñanza, donde se usó los errores matemáticos para atender las dificultades y promover el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales con una incógnita. Se considera relevante realizar investigaciones que estudien diversos aspectos del conocimiento algebraico, como los errores que cometen los estudiantes en el último año de educación secundaria, puesto que son de suma importancia para sus niveles educativos posteriores (García et al., 2011; Kayani e Ilyas, 2014; Pianda, 2018). Además, estas investigaciones tienen la finalidad de utilizar los errores como una oportunidad de aprendizaje, al incluirlos en el aula de matemática, lo que podría beneficiar a los estudiantes y brindar información sobre medidas para su superación (García, 2015).

MARCO TEÓRICO

La idea de un error está asociada con determinar la verdad, la cual se busca examinando los errores mediante la crítica racional y la autocrítica (Rico, 1997). En este sentido, el error es una muestra de un conocimiento parcialmente desarrollado en el que se tienen percepciones inadecuadas de ciertos objetos matemáticos, mediante el uso de procedimientos equivocados desde un punto de vista matemático (Olmedo et al., 2015; Rico, 1997). Además, para Parra (2021) las dificultades en el aprendizaje matemático pueden concebirse como "una carencia, conocimiento deficiente, incompleto o contrariedad, que es causa de uno o varios errores matemáticos" (p. 22), las cuales se deben a diversas situaciones que se entrelazan y comprenden desde una planificación deficiente, hasta la propia naturaleza de la matemática (Herrera, 2010).

Desde la perspectiva constructivista los errores no se visualizan como una falta a castigar o un fallo a lamentar (Astolfi, 1999). Por el contrario, son características interesantes de las dificultades que manifiestan los estudiantes. Por eso, el docente debe interesarse por ellos, dado que los errores son indicadores del progreso y comprensión conceptual de los estudiantes. A pesar de la importancia de los errores en el aprendizaje, la investigación actual se ha centrado en trabajar los errores desde una perspectiva más general. Por ejemplo, con respecto al aprendizaje algebraico, la investigación hallada ha tratado "de captar las dificultades de los estudiantes en todos los aspectos que conlleva el aprendizaje del lenguaje algebraico" (Pérez et al., 2019, p. 85), concretamente al conceptualizar, simbolizar, generalizar o razonar algebraicamente (Pérez et al., 2019). Algunas muestras de aportes en esta línea son el trabajo de Bolaños y Lupiáñez (2021), además de Parra (2021). Sin embargo, al ser un campo de investigación muy amplio, se dificulta observar a profundidad los errores y dificultades de un tema específico (Pérez et al., 2019), como las ecuaciones lineales. Por tanto, se hace necesario realizar estudios centrados en los errores y dificultades propiamente del objeto matemático en cuestión (Pérez et al., 2019; Hall, 2002), como se propone en este trabajo, con la finalidad de promover estrategias de corrección y solventar las dificultades que los estudiantes presentan en forma específica.

Categorías de errores en la resolución de ecuaciones lineales

En este apartado se presenta una síntesis teórica de los errores en la resolución de ecuaciones lineales, producto de una adaptación de las categorizaciones de Movshovitz-Hadar et al. (1987), Hall (2002), Pérez et al. (2019), Rodríguez (2015) y Rosas (2013). Específicamente, clasificamos los errores en: errores del álgebra que están en la aritmética, errores algebraicos propios de las ecuaciones y errores de procedimiento al resolver ecuaciones.

Errores del álgebra que están en la aritmética

Aquí se ubican los errores que son consecuencia de las dificultades que no se resolvieron en el aprendizaje de la aritmética y repercuten en el conocimiento algebraico (Rodríguez, 2015). Según Pérez et al. (2019), entre estos errores se distinguen tres tipos de errores (a) errores al efectuar operaciones básicas con números enteros, (b) errores al efectuar operaciones básicas con números racionales y (c) errores en la propiedad distributiva.

Con respecto a los *errores al efectuar operaciones básicas con números enteros* puede existir dificultad para realizar sumas, restas, multiplicación y división con números enteros positivos y negativos. Por ejemplo, $3x = -5 + 3 \Rightarrow 3x = -8$. Los *errores al efectuar operaciones básicas con números racionales* se refieren a realizar de forma incorrecta los algoritmos al operar fracciones, por ejemplo $\frac{5x}{2} + \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow \frac{6x}{5} = 2$. Por último, sobre los *errores en la propiedad distributiva*, se deben al realizar esta propiedad en forma incompleta o incorrecta, como en el ejemplo $3(x + 5) = 2 \Rightarrow 3x + 5 = 2$.

Errores de concepto debidos a las características propias del simbolismo algebraico

Durante la educación primaria y parte de la educación secundaria del estudiante, los métodos de solución de algunos ejercicios se enfocan en realizar operaciones aritméticas, es decir, trabajar con números, de forma tal que el resultado final también es un número. Sin embargo, al iniciar el tema de las ecuaciones lineales con una incógnita, las operaciones se vuelven más estructuradas, dependientes de los conocimientos y procedimientos algebraicos, cuya estructura no es tan evidente para los estudiantes, generando confusión (Hall, 2002; Movshovitz-Hadar et al., 1987). Este tipo de error es de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética (Rodríguez, 2015). Estos errores se clasifican de la siguiente forma: (a) errores cuando se confunde un término con una incógnita y un término constante, (b) errores al utilizar de forma incorrecta del signo igual (=) y (c) errores al aplicar convenciones de notación algebraica.

Sobre los *errores que ocurren cuando se confunde un término con una incógnita y un término independiente*, Rosas (2013) menciona el caso donde se considera las letras o incógnitas como etiquetas, y no como una relación de equivalencia entre variables y números. En este caso, el error consiste en sumar un término con una incógnita con uno constante, en otras palabras, se opera términos no semejantes. Es decir, el estudiante suma un término con una incógnita con uno que no la tiene, lo que representa una simplificación de términos no semejantes (Pérez et al., 2019). Por ejemplo, $5(2x+1)=7 \Rightarrow 5(3x)=7$.

En cuanto a los errores al utilizar de forma incorrecta el signo igual, *estos* corresponden al no usar el símbolo de la igualdad como una relación simétrica, y más precisamente, una relación de equivalencia (Rosas, 2013). Es decir, "=" en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal (Rodríguez, 2015). Por ejemplo, al resolver la ecuación $2x+1=7+x$, el estudiante parte de que debe realizar operaciones en algún lado de la ecuación, y realiza $2x+1=7+x \Rightarrow 2x+1=7+x-1 \Rightarrow 2x+1=x+6$.

Por último, en el caso de *los errores al aplicar convenciones de notación algebraica*, se identifican diferentes situaciones, por ejemplo, mientras en la aritmética la concatenación representa suma, en el álgebra denota producto. Además, se utilizan ciertos símbolos para las operaciones fundamentales, como la multiplicación, en el álgebra para de representarse con una equis "×" a representarse con el símbolo "·" y el uso de la x para la representación de variables (Rosas, 2013). Más precisamente, al resolver, $2x =$

$24 \Rightarrow x = 4$, debido a que el estudiante supone que la expresión $2x$ representa un número cuyo dígito de las unidades es x, por lo que cancela el dígito 2 a ambos lados de la ecuación y por ello, obtiene una igualdad con los dígitos de las unidades.

Errores de procedimiento al resolver ecuaciones

Al utilizar los algoritmos de resolución de ecuaciones confunden y mezclan las operaciones que se deben realizar. Aquí presentamos las clasificaciones: (a) errores debido al mal uso del método de balanza, (b) errores debido a una transposición incorrecta, (c) errores debido a la aplicación de las operaciones inversas en forma incorrecta, (d) errores debido a la falta de compresión de los algoritmos, (e) errores debido a la falta de verificación de la solución, y (f) errores debido a datos mal utilizados.

Para Pérez et al. (2019), los *errores debido al mal uso del método de balanza* se deben al intentar aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad, pero incorrectamente sólo se hace en uno de los lados. Por ejemplo: $7x - 8 = 3 \Rightarrow 7x - 8 + 8 = 3$.

En *errores debido a una transposición incorrecta*, se presenta dificultad en el intercambio de sumandos, es decir, la incapacidad de comprender la transposición de términos, como cambiar de lado-cambiar de signo (Rosas, 2013). Este tipo de error surge cuando no se reconoce el orden de prioridad o jerarquía de las operaciones y se realizan inconsistencias al trasponer términos de un lado a otro del igual (Hall, 2002; Pérez et al., 2019). Por ejemplo: $\frac{3x}{2} + 6 = 4 \Rightarrow 3x + 6 = 8$, donde se comete un error al multiplicar por 2, o también en el caso siguiente, $\frac{x}{2} + 3 = 5 \Rightarrow x + 3 = 2 \cdot 5 \Rightarrow x + 3 = 10$, donde se observa que el denominador 2 se ha transpuesto en la parte derecha de la ecuación antes del valor de 3, se multiplica dicho valor por 5 y se obtiene como resultado 10, por lo que se incurre en un error en el orden prioritario de las operaciones involucradas en la ecuación.

Los *errores debido a la aplicación de las operaciones inversas en forma incorrecta* se deben a que no se comprende el concepto y objetivo de cada una de las operaciones algebraicas y su operación inversa (Hall, 2002: Pérez et al., 2019). Un ejemplo es: $4x = 1 \Rightarrow x = 1 - 4$.

De acuerdo con Hall (2002), l*os errores debido a la falta de compresión de los algoritmos* se presentan cuando los estudiantes no comprenden que, para solucionar una ecuación lineal, uno de los métodos es la repetición de dos procesos, deducción y reducción. El primer proceso (deducción) consiste en aplicar la misma operación algebraica a ambos lados de la ecuación para mantener la igualdad. El segundo (reducción) implica reemplazar una ecuación algebraica por otra equivalente, al realizar las operaciones necesarias con términos semejantes en ambos extremos de la ecuación. Esto se ejemplifica a continuación: $3x + 7 = 2x \Rightarrow 3x + 7 - 2x = 2x - 2x\ (deducción) \Rightarrow x + 7 = 0\ (reducción)$. Los estudiantes se pueden confundir sin saber en qué paso se encuentran y lo que están trabajando. De hecho, es probable que ni siquiera hayan notado que el algoritmo que se utiliza para resolver ecuaciones cuenta solamente con dos pasos que se repiten cierta cantidad de veces.

Con respecto a los *errores debido a la falta de verificación de la solución,* Movshovitz-Hadar et al. (1987) considera que estos errores se presentan cuando cada paso de la realización de una tarea es correcto, pero el resultado final no corresponde a una solución plausible. En otras palabras, la posible solución no cumple con una o varias hipótesis requeridas, que son independientes del proceso algorítmico para obtener la posible solución. También, puede darse al omitir condiciones necesarias al resolver una ecuación. Por ejemplo, todo denominador de una fracción debe ser diferente de cero.

Por último, los *errores debido a datos mal utilizados* son producto de alguna discordancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante. Es decir, dichos errores surgen al juntar los datos o bien, al procesarlos. Por ejemplo, olvidar un dato importante para la solución de un problema, así como también errores en la transcripción o traducción del lenguaje semántico a expresiones algebraicas con números, operaciones y variables (Movshovitz-Hadar et al., 1987; Rosas, 2013).

Finalmente, en la Tabla 1 resumimos los tipos de errores en la resolución de ecuaciones lineales:

Tabla 1

Categorías de errores en la resolución de ecuaciones lineales

Categoría	Tipo de error
CE1. Errores del álgebra que están en la aritmética.	E1.1 Errores al efectuar operaciones básicas con números enteros. E1.2 Errores al efectuar operaciones básicas con números racionales. E1.3 Errores en la propiedad distributiva.
CE2. Errores debidos al	E2.1 Errores debido a confundir el término de la incógnita y el término independiente.

Categoría	Tipo de error
simbolismo algebraico.	E2.2 Errores debido al uso incorrecto del signo igual (=). E2.3 Error debido a convenciones de notación algebraica.
CE3.Errores de procedimiento.	E3.1 Error debido al mal uso del método de balanza. E3.2 Errores debido a una transposición incorrecta. E3.3 Errores debido a la aplicación de las operaciones inversas en forma incorrecta. E3.4. Errores debido a la falta de comprensión de los algoritmos. E3.5 Errores debido a la falta de verificación de la solución. E3.6 Errores debido a datos mal utilizados.

Fuente: Movshovitz-Hadar et al. (1987), Hall (2002), Pérez et al. (2019), Rodríguez (2015), Rosas (2013) y elaboración propia.

Pedagogía del error: una propuesta de enseñanza para el tratamiento y rectificación de los errores

Al entender el proceso de enseñanza como una secuencia de acciones de actuación pedagógica que influyen en el aprendizaje del estudiante (Calzado, 2004), y el error como un componente inseparable de la vida y el proceso de aprendizaje, se pueden generar estrategias de enseñanza y hacer que los errores sean útiles, en el sentido de que permiten mejorar el aprendizaje (Torre, 2004). Bajo estas consignas, surge la Pedagogía del Error. Esta es una propuesta de enseñanza encargada de analizar los conocimientos construidos por los estudiantes que, a través de los errores que cometen, permite diagnosticar cuáles son los conceptos o contenidos en los que presentan dificultades y necesitan ser mejorados, con el fin de brindarles una ayuda adecuada, con la finalidad de erradicarlos o bien, disminuir su aparición (Torre, 2004). Entonces, en lugar de crear un distanciamiento con los errores, se puede profundizar en su lógica, para sacarles provecho en la mejora de ellos (Astolfi, 1999). Asimismo, cuando se busca corregir un error, se previene la aparición de estos en un futuro. Por eso, Torre (2004) propone tres fases de tratamiento de los errores matemáticos, las cuales se presentan a continuación:

1. Detección de errores: Esta fase es de suma importancia, debido a que, mientras no se localicen y se tome conciencia de estos, es imposible seguir adelante.
2. Identificación de los errores: En esta fase, se procura hacer un diagnóstico de los errores, con el fin de proporcionar información suficiente para su posterior rectificación.

3. Rectificación de errores: Aquí, el proceso pretende provocar un cambio en el conocimiento del estudiante y, a diferencia de un enfoque tradicional de enseñanza, en la pedagogía del error se involucran los errores dentro de su corrección.

Una vez identificada la existencia de errores en la clase de matemática, el siguiente paso consiste en identificar la manera en que a estos se les puede subsanar. Para esto Torre (2004) propone una serie de estrategias y actividades que son las siguientes:

- **a)** Ficha-registro de errores: Esta estrategia se fundamenta principalmente en la observación y registro sistemático de los errores en los que incurren los estudiantes con más frecuencia.
- **b)** Corregir o mejorar un ejercicio: Con apoyo de la estrategia anterior, se pueden introducir los errores más frecuentes en ejercicios, textos o bien, solicitar a los estudiantes que, de forma individual o en grupo, localicen, identifiquen y corrijan.
- **c)** Segunda oportunidad: Se trata de dar al estudiante una segunda oportunidad para presentar los trabajos o ejercicios, una vez que el profesor le haya entregado las observaciones correspondientes.
- **d)** Corrección cooperativa: Entendiendo el aprendizaje como un proceso social-constructivo, esta estrategia se fundamenta en la rectificación de los errores a través del apoyo del profesor y los otros estudiantes.
- **e)** Revisión de ejercicios incorrectos: Esta estrategia contribuye a la identificación de ciertos procesos, desde su planteamiento hasta su ejecución.
- **f)** A la caza del error del profesor: Consiste en que el docente plantea un juego con distintos tipos de ejercicios con errores y estos deben ser encontrados por los estudiantes. Si el estudiante descubre el error, puntúa a su favor y en caso contrario, puntúa el profesor.
- **g)** Autorreflexión-metacognición: Consiste en una estrategia de análisis del mismo fracaso, en el caso de resultados inesperados (bajos resultados). Aquí se hace útil recurrir a una descripción de los errores cometidos, pensar cómo ocurrieron y a qué se debieron.

Con los sustentos teóricos expuestos, se evidencia la importancia de integrar los errores dentro de la enseñanza de la matemática y la existencia de diversas estrategias para hacerlo, a través de una propuesta metodológica: la Pedagogía del Error. Es decir, se propone un proceso de enseñanza que inicia con la caracterización y diagnóstico de las dificultades de los estudiantes, para después ejecutar acciones de aprendizaje de una manera activa, con la intención de contribuir al desarrollo del conocimiento matemático significativo de los estudiantes, específicamente sobre las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

METODOLOGÍA

Tipo de investigación y participantes

El enfoque fue cualitativo (Hernández-Sampieri et al., 2010), sustentado en un paradigma interpretativo. Específicamente el diseño de la investigación fue un estudio de caso colectivo (Cohen et al., 2007), debido a que se analizaron las percepciones personales de los informantes y se exploraron los significados subyacentes, al comprender en profundidad los errores que los estudiantes de undécimo año cometieron al resolver ecuaciones lineales con una incógnita, y su posterior integración en la propuesta de enseñanza (Gil et al., 2017). En el estudio participó una clase de 18 estudiantes de la provincia de Heredia, en Costa Rica, pertenecientes a un mismo grupo del último grado de educación secundaria en el 2022, cuya edad promedio fue de 17 años y con un contexto socioeconómico medio-bajo. La selección del grupo se realizó mediante un muestreo por conveniencia, dado el acceso institucional para la realización del trabajo de campo y la disposición del docente responsable del curso para colaborar con la investigación. Se eligió este nivel educativo por ser el más próximo al ingreso a la educación superior, e idealmente se esperaba que tuvieran los conocimientos algebraicos básicos, necesarios y fundamentales que establece la formación en educación secundaria previo a su ingreso a la educación superior (García, 2010; Chávez, 2018).

Instrumentos de recolección de la información

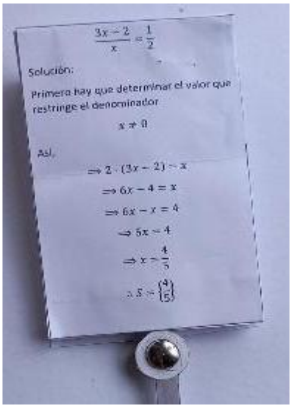
Para la recolección de la información se utilizaron distintos instrumentos. En primer lugar, se aplicó un cuestionario diagnóstico (pre-test) con el propósito de identificar los errores matemáticos que los estudiantes manifestaban al resolver ecuaciones lineales con una incógnita. Este instrumento fue diseñado considerando los contenidos y habilidades establecidos en los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012). Posteriormente, se implementó una propuesta de enseñanza compuesta por actividades de aprendizaje diseñadas a partir de los errores identificados en el pre-test. Finalmente, se analizaron las producciones escritas de los estudiantes durante la aplicación de las actividades, las cuales constituyeron la principal fuente de información para el análisis cualitativo de los resultados.

Actividad de errores matemáticos y trabajo de campo

En la actividad *A poner en equilibrio la balanza* (ver Anexo 2) presentamos ecuaciones lineales con errores, y representadas mediante balanzas desequilibradas por fallos en su resolución. Las ecuaciones se ilustraron tanto de forma algebraica como con el uso de material manipulable del juego balanza matemática (ver Figura 1). Esto facilitó la representación de las ecuaciones y su resolución paso a paso hasta completar la solución. La actividad formó parte de tres actividades de aprendizaje planteadas en una propuesta de enseñanza, que se estableció como parte de una investigación previa (Sequeira, 2024). Las actividades fueron validadas por dos investigadores de este estudio y 4 profesores expertos.

Figura 1

Materiales manipulativos brindados en la actividad



El trabajo de campo fue realizado en varias etapas. La primera etapa consistió en el diseño de la propuesta de enseñanza. Primero, aplicamos un cuestionario pre-test y categorizamos la información, con el fin de comprender los tipos de errores cometidos de acuerdo con cada categoría de análisis y su frecuencia. Con esta información, se estableció una correspondencia entre los errores identificados en la prueba y los enfoques que utilizarían en cada una de las actividades de la propuesta de enseñanza, en particular, en la actividad *A poner en equilibrio la balanza*. Más precisamente, los resultados sirvieron para elaborar los ejercicios con errores que se plantearon en cada una de las actividades, los ejercicios fueron propuestos bajo tres niveles o etapas de complejidad. Asimismo, con la actividad planteada procuramos corregir algún error, o mejorar la solución de un ejercicio, mediante la utilización de la corrección cooperativa. Además, esta actividad se aplicó según las estrategias propuestas por Torre (2004), logrando así las fases de detección, identificación y rectificación de errores de la pedagogía del error (Torre, 2004).

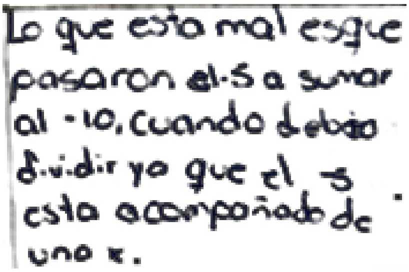
Como segunda etapa, tenemos la aplicación de la actividad. Se proporcionó a los estudiantes el material necesario, este consistió en las instrucciones detalladas de la actividad de este estudio y el material manipulable requerido. La actividad fue aplicada en grupos de máximo tres personas. Los estudiantes identificaron los errores, e intentaron dar una solución a las ecuaciones planteadas, corrigiendo o evitando los errores. Asimismo, se les animó a corregir estas ecuaciones utilizando balanzas manipulables, comentando sobre los errores detectados en cada una de las soluciones planteadas. Para el desarrollo de la actividad se contó con un espacio de 80 minutos del tiempo de clase.

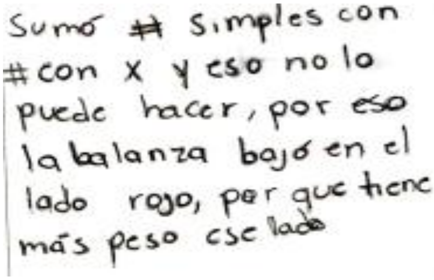
Análisis de la información

El análisis de la información se realizó mediante un proceso de análisis de contenido, el cual permitió identificar y clasificar los errores presentes en las producciones escritas de los estudiantes. Para ello, se utilizaron como categorías de análisis las clasificaciones de errores descritas en el marco teórico, particularmente las propuestas por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Hall (2002), Pérez et al. (2019), Rodríguez (2015) y Rosas (2013). Estas categorías permitieron codificar las respuestas de los estudiantes y analizar la presencia de distintos tipos de errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. El proceso consistió en identificar fragmentos de las producciones escritas que evidenciaban errores o indicios de comprensión conceptual, clasificarlos según la categoría correspondiente e interpretar su significado en relación con los objetivos de la investigación. Concretamente, se utilizaron como unidades de análisis temáticas (Krippendorff, 1990) los fragmentos de texto que brindaban explicaciones o interpretaciones que indicaran una posible mejora en relación con los errores identificados en el cuestionario pre-test. Por ejemplo, en el ejercicio $-5x = -10 \Rightarrow x = -10 + 5$, se observa un error correspondiente a la categoría de transposición incorrecta. En este caso, el grupo G1 identificó el error y posteriormente propuso una solución correcta, corrigiendo el procedimiento inicialmente planteado, como se muestra en la Figura 2a.

Figura 2

Ejemplos de indicadores de mejoría de los errores propuestos en la actividad.





(a) Frase de la solución del grupo 1. (b) Frase de la solución del grupo 8.

Otro ejemplo, es la respuesta del grupo G8 al plantear la solución del ejercicio $8x + 5 = 6x + 2 \Rightarrow 13x = 8$ que contiene un error *debido al confundir el término con una incógnita y un término constante* (ver Figura 2b). En la respuesta de los estudiantes, se observa que la frase hace alusión a una reducción incorrecta de términos semejantes y en cuya justificación, se relaciona con el material manipulativo propuesto en la actividad.

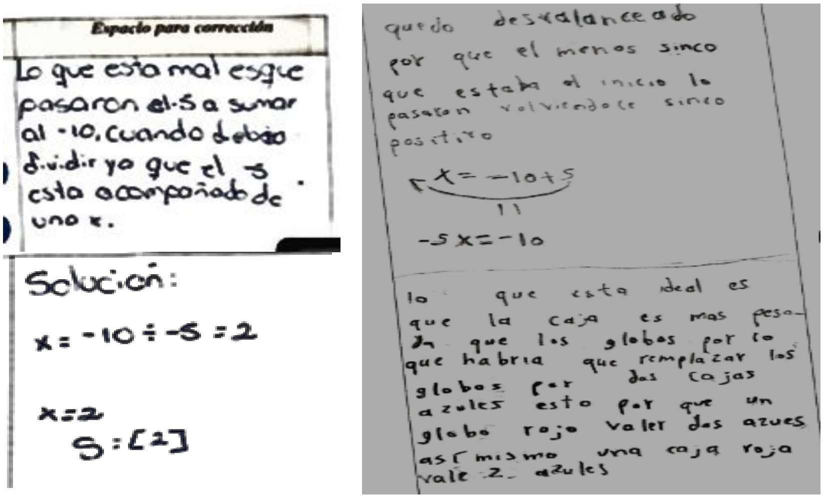
Con el fin de fortalecer la consistencia del análisis, la categorización fue revisada por todos los investigadores del estudio. Posteriormente, las discrepancias en la clasificación fueron discutidas hasta alcanzar consenso en la interpretación de los datos.

RESULTADOS

A continuación, se muestra el análisis de los resultados obtenidos en las soluciones de las preguntas planteadas en la actividad. Con respecto a los ejercicios del nivel 1 de la actividad, presentamos a los estudiantes el ejercicio 1: $-5x = -10 \Rightarrow x = -10 + 5$, con un error *debido a una transposición incorrecta.* Las imágenes de la Figura 3 hacen referencia a las respuestas proporcionadas por los grupos G1 y G6, respectivamente.

Figura 3

Solución del ejercicio 1 del nivel 1 de la actividad



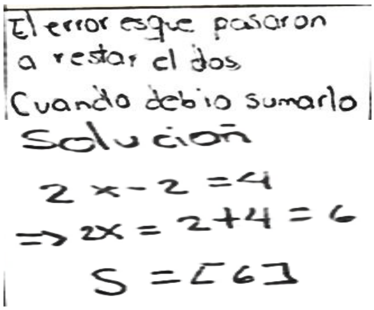
(a) Solución del grupo 1. (b) Solución del grupo 6.

En la Figura 3(a) se observa que los estudiantes identificaron el error planteado, al señalar que el -5 no debería *trasponerse* utilizando la operación de suma, sino como una división. Esto puede interpretarse como un indicio de comprensión del error *debido a una transposición incorrecta*, al identificar que la operación aritmética entre la constante -5 y la variable era una multiplicación, y en consecuencia, para resolver la ecuación correctamente era necesario trasladar al otro lado el término, utilizando la operación inversa, en este caso, la división. De forma similar, en la Figura 3(b), los estudiantes del grupo G6 lograron identificar el error planteado. El cual estaba relacionado con trasponer el término -5 al lado derecho de la ecuación como una suma, aunque no detallaron con claridad el proceso de solución en su respuesta (Pérez et al., 2019). No obstante, brindaron la frase: *un globo rojo vale a dos azules, así como una caja roja vale dos azules* y posteriormente, detallaron que el valor de la variable x era igual a 2, lo cual correspondía a la solución correcta de la ecuación.

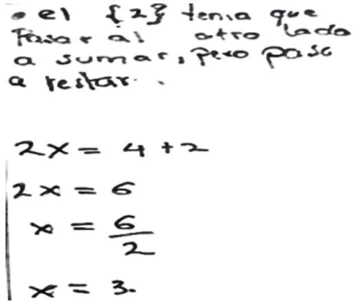
Para el ejercicio 2, se propuso a los estudiantes analizar el *error al aplicar operaciones inversas en forma incorrecta* (Pérez et al., 2019; Hall, 2002). El ejercicio propuesto era $2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 2$. En la Figura 4 se muestran las respuestas de los grupos G1 y G7, respectivamente.

Figura 4

Solución del ejercicio 2 del nivel 1 de la actividad



(a) Solución del grupo 1.



(b) Solución del grupo 7.

En la Figura 4(a) se observa cómo los estudiantes identificaron el *error* que se comete en la solución de la ecuación original, y brindaron una solución corregida. Sin embargo, en el último procedimiento que realizaron no se consideró el coeficiente de la variable x. Además, dieron el conjunto solución sin haber despejado la variable completamente, es decir, aún era necesario efectuar más procedimientos para lograr el conjunto solución y finalizar el proceso. A pesar de no cometer errores adicionales, la solución proporcionada es incorrecta. Por otro lado, la forma de escritura del conjunto solución al utilizar corchetes "[ ]", en lugar de llaves "{ }", nos brinda indicios que los estudiantes no tenían claridad de su uso, o no entienden el significado de conjunto solución. La Figura 4(b) muestra cómo los estudiantes detectaron y corrigieron el error presente en la solución de la ecuación propuesta. En este caso, señalaron que *el 2 tenía que pasar al otro lado a sumar, pero pasó a restar*. Más precisamente, este grupo de estudiantes identificó efectivamente el error y resolvió la ecuación de forma correcta. Sin embargo, en su respuesta omitieron el conjunto solución.

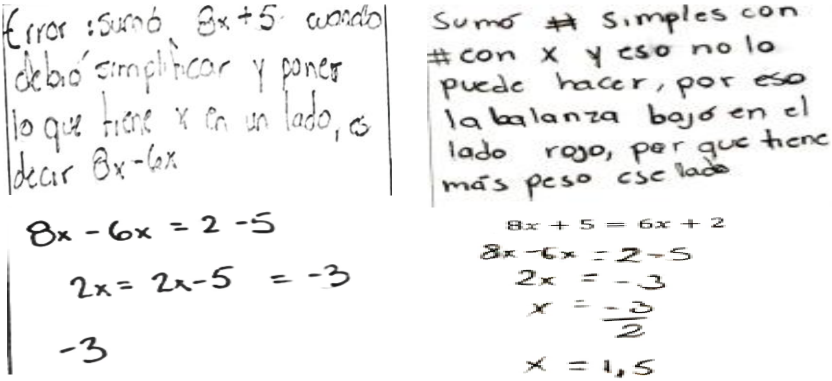
En el ejercicio 3, planteamos dos errores, el primero corresponde a la categoría error debido a *la confusión entre el término con la incógnita y término independiente* y el segundo fue un *error debido a una transposición incorrecta* (Pérez et al., 2019). El ejemplo propuesto es el siguiente:

$$8x + 5 = 6x + 2 \Rightarrow 13x = 8 \Rightarrow x = 8 - 13$$

En la Figura 5 se presentan las respuestas de los grupos G4 y G8, respectivamente.

Figura 5

Solución del ejercicio 3 del nivel 1 de la actividad



(a) Solución del grupo 4. (b) Solución del grupo 8.

En la Figura 5(a) los alumnos indicaron, en relación con el ejercicio 3, que se presentó la suma $8x + 5$ en el primer paso, cuando antes de realizar alguna operación debían *poner lo que tiene* x *de un lado*, haciendo referencia a que el orden utilizado para resolver la ecuación no era el adecuado. Continuando con la explicación, aunque en su solución lograron trasladar correctamente los términos con variables y constantes a lados opuestos y simplificaron adecuadamente, no completaron el último paso necesario: trasladar el número 2 al otro lado de la igualdad a dividir, para obtener la solución final correcta. Además, al no realizar una verificación del conjunto solución, se dio con una respuesta distinta al conjunto solución correcto del ejercicio (Movshovitz-Hadar et al., 1987). De forma similar, en la Figura 5(b) los estudiantes del grupo señalaron el error de *sumar números simples con números con* x, refiriéndose a la imposibilidad de sumar o restar variables con términos independientes (Pérez et al., 2019). En su solución, aunque no presentaron formalmente el conjunto solución, mostraron la solución correcta, tanto en su representación fraccionaria como decimal. Destacamos que ambos grupos se centraron en el primer tipo de error mostrado, dejando de lado el segundo error propuesto. Para esto, en la Figura 5 mostramos las respuestas de los grupos G4 y G8, respectivamente.

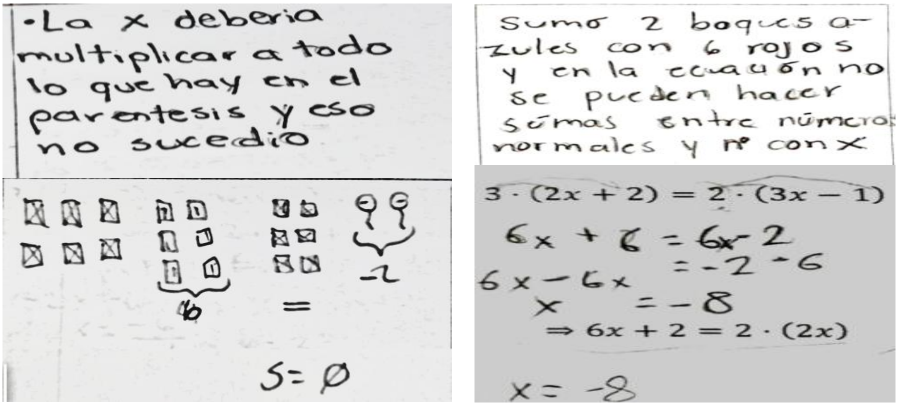
En cuanto a los ejercicios del nivel 2 de la actividad, en el *ejercicio 1* se presentó a los estudiantes dos tipos de errores en *la propiedad distributiva* y *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* (Pérez et al., 2019) de la siguiente manera:

$$3 \cdot (2x + 2) = 2 \cdot (3x - 1) \Rightarrow 6x + 2 = 2 \cdot (2x) \Rightarrow 8x = 4$$

En la Figura 6 se presentan las respuestas de los grupos G5 y G8, respectivamente.

Figura 6

Solución del ejercicio 1 del nivel 2 de la actividad



(a) Solución del grupo 5. (b) Solución del grupo 8.

En la Figura 6(a) los estudiantes intentaron describir el error mostrado. No obstante, aunque la explicación que proporcionaron no era del todo clara, los estudiantes hicieron énfasis en el error de la propiedad distributiva al mencionar que la *x debió multiplicar a todo lo que hay en el paréntesis* (Pérez et al., 2019). Por su parte, al dar solución al ejercicio, en lugar de presentar un procedimiento matemático formal, los estudiantes optaron por usar dibujos para representar su razonamiento. Ilustraron los elementos de una balanza, herramienta utilizada en la actividad. A través de esta representación gráfica y siguiendo las reglas del juego propuesto, su solución se puede traducir a la forma algebraica: $6x + 6 = 6x - 2$, lo que simplificaron a $6 = -2$. A partir de este razonamiento concluyeron que la solución del ejercicio es $S = \emptyset$. Esto permite observar que los estudiantes comprenden el concepto de conjunto solución de una ecuación, incluso en situaciones en las que este corresponde al conjunto vacío. Asimismo, la representación visual utilizada en la actividad les permitió identificar correctamente la respuesta del ejercicio. No obstante, estos resultados sugieren que algunos estudiantes presentan dificultades para expresar formalmente en lenguaje algebraico procedimientos que logran representar mediante recursos visuales o manipulativos. Este tipo de dificultades no es exclusivo de este contexto, ya que también se ha reportado en niveles universitarios, donde un alto porcentaje de estudiantes comete errores en contenidos que se supone dominan (Gamboa et al., 2019; Parra, 2021).

En la solución mostrada en la Figura 6(b), los estudiantes hacen referencia al error en *la propiedad distributiva,* que se comete en la segunda línea de la solución presentada. Indicaron que se sumó *bloques azules* con *bloques rojos*, señalando que no se podían sumar, pues representaban términos no semejantes. Ellos se centraron en proponer una solución algebraica, realizando un desarrollo correcto, hasta que en el último paso cometen un error. Para la expresión $6x - 6x$ obtuvieron incorrectamente el resultado x, cuando debería haber sido 0. A pesar de realizar la mayoría de los procedimientos de forma correcta, este error se debió a que en ocasiones incurrieron en *inferencias no válidas lógicamente*, donde se realizan deducciones inválidas desde el punto de vista matemático (Movshovitz-Hadar et al., 1987). Esto puede deberse a que –a veces– las variables se suelen considerar como etiquetas, y no se toma en cuenta la relación que hay entre ellas y las constantes que las acompañan (Rosas, 2013).

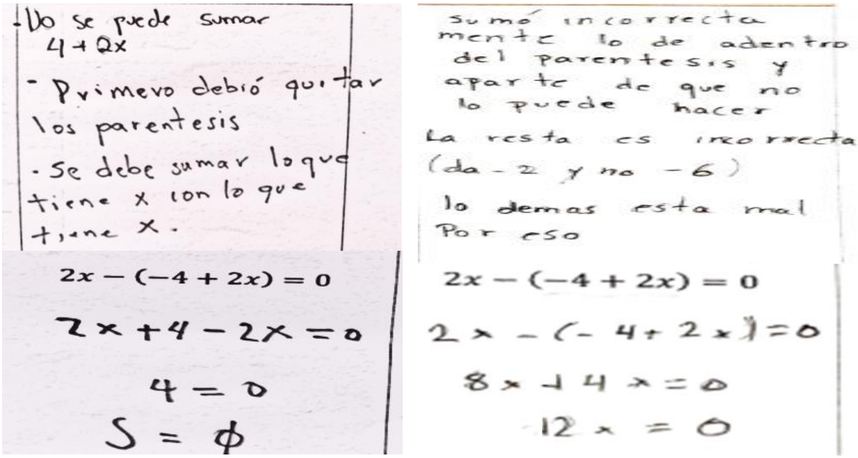
Seguidamente, para el ejercicio 2 del mismo nivel de complejidad, se muestra la solución que brindaron los grupos G4 y G9, respectivamente. En esta se consideró abordar *errores al efectuar operaciones básicas con números enteros* y el error de *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* (Pérez et al., 2019). El ejemplo presentado es el siguiente:

$$2x - (-4 + 2x) = 0 \Rightarrow 2x - (-6) = 0$$

En la Figura 7(a) los estudiantes mencionaron que el error cometido se relacionaba con el *orden en que se realizan las operaciones* (Hall, 2002), pues señalaron que, al resolver de forma correcta el ejercicio, el primer paso debía ser eliminar los paréntesis de la ecuación y luego simplificar los términos semejantes. Además, detallaron que se debía sumar únicamente *lo que tiene x con lo que tiene x*, destacando que en la solución presentada se cometía también el error al confundir la incógnita y el término independiente (Pérez et al., 2019).

Figura 7

Solución del ejercicio 2 del nivel 2 de la actividad



(a) Solución del grupo 4. (b) Solución del grupo 9.

En la Figura 7(b) los estudiantes identificaron ambos errores en esa línea de solución, y argumentaron que en esta se sumó incorrectamente los términos dentro del paréntesis, ya que no se podía hacer la suma, porque los términos no eran semejantes. Aunado a esto, mencionaron que, al realizar la suma $-4 + 2x$, se obtenía como resultado –6, en lugar de -2, haciendo alusión a un *error al realizar operaciones con números enteros* (Pérez et al., 2019). Por su parte, al hacer la solución del ejercicio 2, cometieron diversos errores. Al intentar eliminar los paréntesis de la ecuación, obtuvieron como resultado $8x + 4x$, como si la expresión a simplificar hubiera sido $2x\,(- - 4 + 2x)$. Estos errores pueden deberse a dificultades que no se resolvieron en el aprendizaje de la aritmética y repercuten posteriormente en el conocimiento algebraico (Rodríguez, 2015).

En el nivel 3 de la actividad, propusimos ecuaciones de primer grado que involucraban fracciones o números irracionales. Es importante mencionar que estos contenidos no corresponden propiamente al nivel de undécimo, sino que forman parte del conocimiento previo del estudiante (MEP, 2012). Algunos estudiantes expresaron su desconocimiento acerca del abordaje de este tipo de ecuaciones, y no proporcionaron respuestas. En la Figura 8 y Figura 9 se muestran las respuestas recopiladas del ejercicio 1 y 2 de este nivel que fueron brindadas por los grupos G1 y G7.

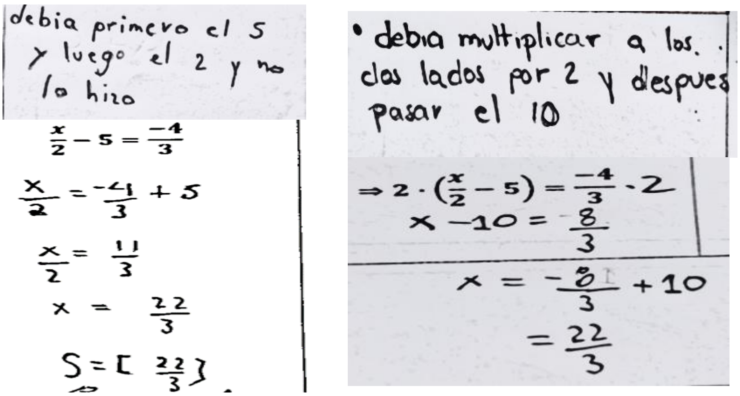
En el primer ejercicio, la solución que se les planteó a los alumnos para revisión presenta un *error en el método de balanza* (Pérez et al., 2019), el ejemplo propuesto es el siguiente:

$$\frac{x}{2} - 5 = \frac{-4}{3} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 5\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow\ x - 10 = \frac{-4}{3}$$

En la Figura 8 se presentan las respuestas de los grupos G1 y G7, respectivamente.

Figura 8

Solución del ejercicio 1 del nivel 3 de la actividad



(a) Solución del grupo 1. (b) Solución del grupo 7.

En la Figura 8(a) los estudiantes señalaron que el error en la solución se asociaba con la jerarquía de operaciones que se debían realizar (Pérez et al., 2019). Para esto propusieron una secuencia distinta en la solución: primero transponer los términos constantes al lado derecho para simplificarlos y luego el denominador de la variable como una multiplicación. Siguiendo estos pasos, lograron dar correctamente con el conjunto solución de la ecuación. No obstante, este lo brindaron entre corchetes “[ ]”, cuando en su lugar se utilizan llaves “{}”. Esto se puede relacionar con dificultades que presentan los estudiantes con respecto a características propias del simbolismo que establecen cierto uso para cada uno de los símbolos utilizados (Rodríguez, 2015). En la Figura 8(b) los estudiantes reconocieron el error en el *método de la balanza*, destacando que el fallo fue multiplicar por 2 en un solo lado de la igualdad y no a ambos (Pérez et al., 2019). Al corregir este error y aplicar un método distinto al del grupo G1, también pudieron dar con la solución correcta de la ecuación. A pesar de esto, no brindaron el conjunto solución ni realizaron la verificación de la solución encontrada.

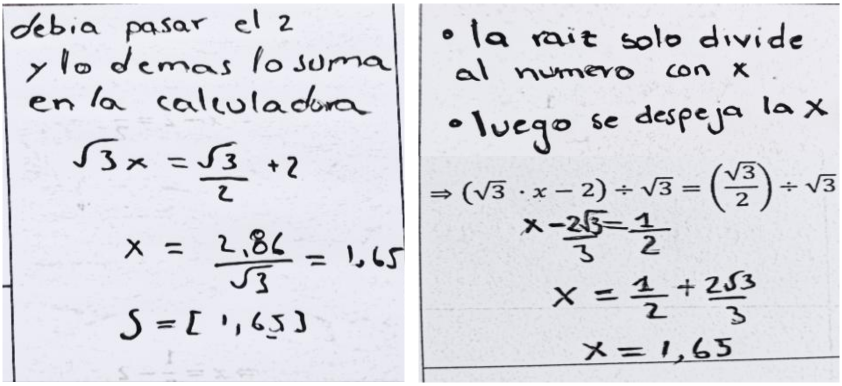
Una situación similar se presentó en el ejercicio 2 y último de la actividad, ya que los mismos grupos dieron un camino de solución distinto y realizaron otros procedimientos. Sin embargo, el resultado obtenido al final del proceso sí correspondía a la solución correcta del ejercicio. Este ejercicio fue diseñado para que los estudiantes reconocieran un error *en la propiedad distributiva*. El error específico que involucra dividir un paréntesis entre un mismo elemento o –alternativamente– multiplicarlo por el inverso de ese elemento (Pérez et al., 2019). Más precisamente, se planteó el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{3}\ \cdot x - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\ \cdot x - 2\right) \div \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \sqrt{3} \Rightarrow x - 2 = \frac{1}{2}$$

En la Figura 9(a) se puede ver que los estudiantes mencionaron que el error correspondía a incoherencias en el orden de las operaciones a seguir para dar con la solución del ejercicio (Hall, 2002). Específicamente, indicaron que *primero debió pasar a sumar el 2 y el resto se puede sumar en la calculadora*, haciendo alusión al proceso a seguir para dar con la solución. Para realizar la suma que incluía números con radicales utilizaron una calculadora científica, presentando los resultados con una aproximación decimal.

Figura 9

Solución del ejercicio 2 del nivel 3 de la actividad



(a) Solución del grupo 1. (b) Solución del grupo 7.

En contraste con lo mencionado anteriormente, en la Figura 9(b) señalaron que el error cometido fue que *se tenían que dividir los dos números con la raíz,* aludiendo a un *error de distributividad incompleta* (Pérez et al., 2019). Corrigieron este error y luego realizaron la transposición del término constante al lado opuesto, despejando la variable sin cometer inconsistencias. Por último, usaron la calculadora para simplificar la expresión y brindar una aproximación decimal de la solución.

Finalmente, destacamos que en todos los resultados antes mencionados, no encontramos indicios de que los estudiantes realizaran la verificación de la solución obtenida, para determinar el conjunto solución válido de la ecuación.

CONCLUSIONES

En este trabajo, describimos la aplicación de una de las actividades de una propuesta de enseñanza que atendió las dificultades y promovió el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales con una incógnita. Un aporte de este estudio radica en la necesidad de comprender los errores que cometen los estudiantes en el último año de educación secundaria, puesto que son de suma importancia para sus niveles educativos superiores (García et al., 2011; Kayani e Ilyas, 2014; Pianda, 2018). Los resultados mostraron, aunque no de forma generalizada, que la incorporación del análisis y corrección de errores en la actividad de este estudio permitió revelar el estado de conocimiento de los participantes (Del Puerto et al., 2006).

En la actividad se presentaron resultados variados en la comprensión y aplicación de conceptos y procedimientos algebraicos. Aunque en algunos de los ejercicios los participantes mostraron capacidad para identificar errores y aplicar correcciones, algunas soluciones presentaban fallas en el razonamiento seguido por los estudiantes (Movshovitz-Hadar et al., 1987). Los errores cometidos estaban relacionados con el uso del simbolismo algebraico o el significado del signo igual (=) en una ecuación (Rodríguez, 2015; Rosas, 2013), entre otros. También, es posible resaltar dificultades persistentes en la manipulación de fracciones y radicales, donde se observó una menor cantidad de respuestas por parte de los participantes. Sumado a esto, destacamos la falta de verificación de la posible solución obtenida, como método para encontrar el conjunto válido de la ecuación. Concretamente, esto podría deberse a la formación previa recibida, posiblemente centrada únicamente en ecuaciones definidas en el conjunto de los números racionales y en la falta de realización de la verificación de la posible solución. Esta falta de conocimiento plantea un desafío, tanto para el aprendizaje actual como su aplicación futura en cursos de educación superior, ya que en estos se asume que el estudiante posee y domina los conocimientos previos necesarios para esto (Gamboa et al., 2019; Parra, 2021).

Con respecto a las fases de tratamiento de los errores matemáticos de Torre (2004), cumplimos con las tres fases *detección-identificación-rectificación* de errores. Esto se evidencia en que detectamos e identificamos errores previamente, cuyos resultados permitieron el diseño y aplicación de una actividad coherente con estos. Es importante resaltar que la actividad fue construida con el objetivo de corregir o disminuir este tipo de errores, realizándose tanto a partir de la corrección cooperativa como en la revisión de ejercicios resueltos de forma incorrecta. En la actividad, los estudiantes disfrutaron una experiencia lúdica para identificar y corregir errores en ecuaciones lineales. Además, al utilizar una balanza manipulable, visualizaron el equilibrio de la balanza como comparación con la aplicación de operaciones en ambos lados de las ecuaciones, y cómo los errores influían en su equilibrio. A su vez, se evidenció que la adopción de estrategias didácticas, que enfocan los errores como oportunidades para el aprendizaje, desarrollan habilidades críticas y analíticas en matemáticas. Durante toda la sesión, se observó un alto nivel de interés y participación por parte de los estudiantes, lo que creó un ambiente propicio para el aprendizaje. Si bien algunos estudiantes presentaron mayores desafíos que otros, obtuvimos una mejora notable en la comprensión y resolución de ecuaciones de primer grado en algunos de los estudiantes, desde un enfoque más reflexivo y crítico hacia el aprendizaje.

Tras los hallazgos obtenidos, consideramos que es crucial generar oportunidades de aprendizaje que incorporen el uso de los errores como parte del proceso de enseñanza en el aula de matemática, lo que puede beneficiar a los estudiantes y brindar información relevante para mejorar su aprendizaje (García, 2015). En este sentido, el uso intencional de errores en actividades de aprendizaje puede constituirse en una estrategia didáctica valiosa para promover procesos de reflexión matemática y favorecer una comprensión más profunda de los procedimientos algebraicos.

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

KPL, JRJ y DSL concibieron la idea presentada. KPL y DSL desarrollaron la teoría y metodología. KPL, JRJ y DSL diseñaron los instrumentos que permitieron recoger la información. DSL recopiló, analizó los datos y redactó las conclusiones. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados y revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE LOS DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor o la autora correspondiente KPL, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Astolfi, J. (1999). *"Error", un medio para enseñar.* Díada Editora. https://es.scribd.com/document/55636596/El-error-un-medio-para-ensenar

Bolaños, H. y Lupiáñez, J. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia, 35*(1), 1-18. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Calzado, D. (2004). *Un modelo de formas de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje en la formación inicial del profesor* [Tesis Doctoral, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona]. https://online.fliphtml5.com/srapt/ntny/

Chávez, R. (2018). *Competencias para resolver operaciones algebraicas en la prueba de conocimientos básicos que sustentan los aspirantes a ingresar a la Universidad San Carlos de Guatemala* [Tesis de Maestría, Universidad Panamericana de Guatemala]. http://www.repositorio.usac.edu.gt/9182/1/9182.pdf

Cohen L., Manion L. & Morrison K. (2007). *Research methods in education.* Routledge, Taylor and Francis Group. https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.4324/9780203029053/research-methods-education-keith-morrison-lawrence-manion-louis-cohen

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 38*(4), 1-13. https://digital.cic.gba.gob.ar/handle/11746/4668

Gamboa, R., Castillo, M. e Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación, 19*(1), 104-136. http://dx.doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. https://www.researchgate.net/publication/320505917

García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/43529

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. Lupiáñez, M. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática – 2011.* (pp. 145-155). Universidad de Granada. https://surl.li/kxomay

Gil, J., León, J. y Morales, M. (2017). Los paradigmas de investigación educativa, desde una perspectiva crítica. *Revista Conrado, 13*(58)*,* 72-74. https://scispace.com/pdf/los-paradigmas-de-investigacion-educativa-desde-una-4vrqaaqrbj.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. En J. Godino (Ed.), *Didáctica de la Matemática para Maestros* (pp. 5-154). Editorial GAMI. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Hall, R. (2002). *An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. Philosophy of mathematics education journal, 15*(1), 1-67. https://www.exeter.ac.uk/research/groups/education/pmej/pome15/hall_errors.pdf

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill. https://openlibrary.org/books/OL25444654M/Metodolog%C3%ADa_de_la_investigaci%C3%B3n

Herrera, M. (2010). *Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales.* En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 247-255). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/4547/

Kayani, M. e Ilyas, S. Z. (2014). Is algebra an issue for learning mathematics at pre-college level? *Journal of Educational Research, 17*(2), 100-106. https://www.proquest.com/scholarly-journals/is-algebra-issue-learning-mathematics-at-pre/docview/1786827925/se-2

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Ediciones Paidós Ibérica.

Mancera, E. y Basurto, E. (2015). *Errar es un placer: El uso de errores para el desarrollo del pensamiento matemático*. 3D Editorial.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio en matemáticas para la educación general básica y el ciclo diversificado.* https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education, 18*(1), 3-14. https://doi.org/10.2307/749532

Mulero, J., Segura, L. y Sepulcre, J. (2013). *Percepción de nuestros estudiantes acerca de las matemáticas en la vida diaria*. En N. Pellin (Ed), XI Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria: Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e investigación para alcanzar la excelencia académica. (pp. 2144-2157). Instituto de Ciencias de la Educación (ICE). http://hdl.handle.net/10045/44212

Olivar, S., Flores, W. y Alvarado, F. (2018). Errores algebraicos en tareas de descomposición factorial por estudiantes universitarios de Nicaragua. *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas, 1*(1), 9-27. https://doi.org/10.30698/recsp.v1i1.1

Olmedo, N., Galdínez, M., Peralta, J. y Di Bárbaro, M. (2015*). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra.* En T. Gutiérrez (Ed), XIV Conferencia Interamericana en Educación Matemática (pp. 1-13). CIAEM.http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/877/367

Parra, E. (2021). *Errores matemáticos en el área de álgebra básica que manifiestan estudiantes del curso Matemática Fundamental, de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Costa Rica]. https://agd.una.ac.cr/share/s/cwmpKvCDSbqX_deQ9yM4fQ

Pérez, M., Diego, J., Polo, I. y González, M. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA*, *13*(2), 84-103. http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/v13i2.7613

Pianda, D. (9-11 mayo, 2018). *Categorización de errores típicos en ejercicios matemáticos cometidos por estudiantes de primer semestre de la Universidad de Nariño [Ponencia].* En XIV Coloquio Regional de Matemáticas y IV Simposio de Estadística (pp. 254-263). Universidad de Nariño. http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/4598

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* (pp. 69-108). Grupo Editorial Iberoamericano. http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon*, *38*(1), 185-198. http://funes.uniandes.edu.co/2354/

Rodríguez, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/41014

Rodríguez, S., Cañadas, M., Molina, M. y Castro, E. (2012). *Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico.* En J. Sagula (Ed.), *Simposio de Educación Matemática*. (pp. 1214-1234). Edumat. http://funes.uniandes.edu.co/1930/

Rosas, O. (2013). *Matemática Recreativa como estrategia de enseñanza-aprendizaje en la resolución de ecuaciones algebraicas de problemas literales* [Tesis de Maestría, Tecnológico de Monterrey]. https://repositorio.tec.mx/handle/11285/619609

Sequeira, D. (2024). *El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Costa Rica]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.20772.33921

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, 77*(1), 5-34. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3781349

Torre, S. (2004). *Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras*. Magisterio del Río de La Plata. https://www.academia.edu/25112968/APRENDER_DE_LOS_ERRORES

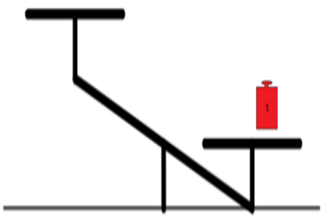
ANEXOS

1. Cuestionario pre-test y post-test

Para poder acceder al instrumento del cuestionario pre-test y post-test que nos permitió recolectar parte de la información necesaria para la construcción de la actividad 1, les invitamos a escanear e ingresar al siguiente código QR contiguo a este párrafo.

2.Actividad 1 de la propuesta de enseñanza: *A poner en equilibrio la balanza*

Con esta actividad se pretende que los estudiantes logren identificar los errores de una ecuación lineal ya resuelta e ilustrada mediante una balanza, que muestre dónde pierde su equilibrio al realizar un movimiento erróneo. Para eso, los estudiantes utilizarán el método de balanza para resolver ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Por su parte, esta se encuentra dividida en tres niveles de complejidad, donde los materiales suministrados por el docente son indispensables, además de las reglas que permitirán relacionar el juego *A poner en equilibrio la balanza* con cada uno de los procesos que se realizan para resolver una ecuación lineal con una incógnita.



Para poder acceder a la actividad total lo invitamos a escanear e ingresar al siguiente código QR.