ISSN: 2178-7727
DOI: 10.64856/acta.scientiae.8383

La Resolución de Problemas en la Enseñanza y Aprendizaje de la Variación: Creencias de Profesores de Matemáticas en Formación Inicial

Cristian Camilo Fúneme Mateus[a]

[a] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación, Bogotá, Colombia.

RESUMEN

Contexto: La resolución de problemas es considerada en la educación matemática actual como un eje fundamental para los procesos de aprendizaje, especialmente en objetos transversales como la variación. Sin embargo, el cómo integrarla eficazmente en la formación docente es un problema abierto. **Objetivos**: La caracterización de las creencias de profesores de matemáticas en formación inicial, de una universidad colombiana, sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la variación. **Diseño**: Desde un enfoque cualitativo, este estudio se fundamenta teórica y metodológicamente en las herramientas y estrategias de análisis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, adoptando su perspectiva pragmática que reconoce a las creencias como disposiciones para la acción. **Participantes:** 30 futuros profesores de matemáticas en formación inicial. **Análisis de datos**: A través de la elaboración de configuraciones epistémicas se describen las prácticas de diseño y análisis realizadas por los futuros profesores al trabajar problemas relacionados con la variación, luego se recolectan las justificaciones que dan los docentes a sus prácticas y se identifican sus creencias. **Resultados**: Se caracterizan cuatro posturas alusivas al papel de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la variación: (1) eje central, (2) finalidad, (3) parte del proceso y (4) etapa final. **Conclusiones**: Existe una diversidad considerable en la interpretación de la resolución de problemas por parte de los futuros docentes, lo que evidencia la necesidad de profundizar en cómo articular los desarrollos teóricos actuales con la práctica educativa real.

Palabras clave: Creencias; Profesores de matemáticas; Resolución de problemas; Variación.

Corresponding author: Cristian Camilo Fúneme Mateus.
Email: ccfunemem@udistrital.edu.co

Teaching and Learning Variation and Problem Solving: Beliefs of Pre-Service Mathematics Teachers

ABSTRACT

Background: Problem solving is currently regarded in mathematics education as a cornerstone of learning processes, particularly for transversal topics such as variation. Nevertheless, how to integrate it effectively into teacher preparation remains an open issue. **Objectives**: To characterize the beliefs of preservice mathematics teachers at a Colombian university about the use of problem solving in teaching and learning variation. **Design**: Adopting a qualitative approach, this study is theoretically and methodologically grounded in the analytical tools and strategies of the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction, embracing its pragmatic perspective that views beliefs as dispositions for action. **Participants**: Thirty preservice mathematics teachers. **Data collection and analysis**: Epistemic configurations were constructed to describe the design and analysis practices employed by the participants when working on variation-related problems. The justifications they offered for these practices were then collected to identify their underlying beliefs. **Results**: Four stances regarding the role of problem solving in the teaching–learning process of variation emerged: (1) central axis, (2) goal, (3) part of the process, and (4) final stage. **Conclusions**: Preservice teachers display considerable diversity in their interpretations of problem solving, highlighting the need to further align current theoretical developments with actual educational practice.

Keywords: Beliefs; Preservice mathematics teachers; Problem solving; Variation.

Ensino e a Aprendizagem da Variação e a Resolução de Problemas: Crenças de Professores de Matemática em Formação Inicial

RESUMO

Contexto: A resolução de problemas é considerada, na educação matemática atual, como um eixo fundamental para os processos de aprendizagem, especialmente em objetos transversais como a variação. Contudo, a questão de como integrá-la eficazmente na formação docente permanece aberta. **Objetivos**: Caracterizar as crenças de professores de matemática em formação inicial, de uma universidade colombiana, sobre o uso da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da variação. **Design**: A partir de uma abordagem qualitativa, este estudo fundamenta-se teórica e metodologicamente nas ferramentas e estratégias de análise do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e instrução Matemática, adotando sua perspectiva pragmática, que reconhece as crenças como disposições para a ação. **Ambiente e participantes**: 30 futuros professores de matemática em formação inicial. **Coleta e análise de dados**: Por meio da elaboração de configurações epistêmicas, descrevem-se as práticas de desenho e análise realizadas pelos futuros professores ao trabalharem problemas relacionados à variação. Em seguida, coletam-se as justificativas que os professores dão às suas práticas e identificam-se suas crenças. **Resultados**: Foram caracterizadas quatro posturas relativas ao papel da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da variação: (1) eixo central, (2) finalidade, (3) parte do processo e (4) etapa final. **Conclusões**: Existe uma considerável diversidade na interpretação da resolução de problemas pelos futuros docentes, o que evidencia a necessidade de aprofundar como articular os atuais desenvolvimentos teóricos com a prática educativa real.

Palavras-chave: Crenças; Professores de matemática; Resolução de problemas; Variação.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas ha sido reconocida ampliamente en la educación matemática como un proceso esencial para desarrollar habilidades críticas, analíticas y reflexivas en los estudiantes (Santos, 2024). De hecho, diversas investigaciones han subrayado que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de problemas no solo mejora la comprensión conceptual, sino que también estimula procesos de razonamiento y creatividad en contextos reales y significativos (Miranda y Mamede, 2022). De esta forma, la resolución de problemas trasciende el simple acto de resolver ejercicios y se convierte en un proceso central para fomentar el pensamiento matemático.

La importancia que ha adquirido la resolución de problemas ha llevado a que, desde hace varias décadas, numerosos estudios enfaticen en la necesidad de integrar su estudio en la formación inicial y continua de los docentes de matemáticas (Santos y Reyes, 2019; Schoenfeld, 2022). Esta incorporación busca que los futuros profesores desarrollen competencias que les permitan crear escenarios didácticos desafiantes y enriquecedores, donde los problemas sean verdaderos ejes articuladores del aprendizaje matemático. Sin embargo, la transferencia efectiva de estos principios a las prácticas formativas de los futuros docentes requiere mucho más que solo su incorporación teórica en los planes curriculares (Parra y Breda, 2017).

En este sentido, los programas de formación inicial docente desempeñan un papel clave en la integración asertiva de la resolución de problemas en las prácticas didácticas, pues en ellos se establecen diversas creencias que guiarán, en gran medida, las prácticas de los futuros profesores en los escenarios educativos reales (Wellberg, 2024). No obstante, el cómo está ocurriendo la vinculación de la resolución de problemas en la formación del profesor no es clara.

Es decir, a pesar del amplio consenso sobre la relevancia educativa de la resolución de problemas, aún no existe igual acuerdo respecto al cómo debe desarrollarse en la formación inicial docente ni tampoco sobre cómo su uso está demarcando las creencias y prácticas didácticas de los futuros profesores (Cai y Hwang, 2023). Por esto, es necesario explorar cuáles son las creencias alusivas a la implementación de la resolución de problemas que construyen los futuros profesores y cómo estas afectan su selección, diseño y aplicación de tareas matemáticas en contextos reales.

Más aún, es importante obtener información respecto a cómo las creencias alusivas a la resolución de problemas condicionan o favorecen el diseño y ejecución de situaciones para la enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos específicos. Por ejemplo, se ha encontrado que la variación es un objeto matemático que representa un desafío particular para el trabajo centrado en la resolución de problemas, porque su complejidad conceptual lleva a los docentes a centrarse en aspectos algorítmicos y procedimentales desarticulados que apartan al estudiante de una comprensión significativa (Cantoral et al., 2023).

En este marco, la presente investigación aborda la caracterización de las creencias de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial de una universidad colombiana acerca del uso de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la variación. Iniciando por la presentación de los aspectos teóricos y metodológicos que permiten el estudio de las creencias desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), esto acompañado de algunos elementos conceptuales de la resolución de problemas y de la variación que son tenidos en cuenta. Se finaliza con la presentación del análisis de las creencias y las respectivas conclusiones de la investigación.

ASPECTOS TEÓRICOS

El estudio de las creencias en el ámbito de la educación matemática ha sido extenso y diversificado, esto ha llevado a que exista un gran número de posturas que divergen respecto a su terminología, métodos y finalidades (Goldin et al., 2009). Así, al estudiar las creencias no resta otra opción que tomar una postura teórica que resulte coherente con las consideraciones epistémicas y ontológicas que se asuman respecto a la matemática y su didáctica (Törner, 2002). Este es el caso de la presente investigación, en la cual se adopta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), al considerar que su perspectiva pragmática y antropológica se ha consolidado en la educación matemática como un referente que proporciona herramientas conceptuales y metodológicas sólidas para el análisis de la actividad didáctico-matemática en sus múltiples dimensiones y con la resolución de problemas como eje central (Godino, 2024). Los aspectos de esta postura se detallan a continuación, conceptualizando la resolución de problemas y el significado de la variación que se toma como referencia.

Conceptualización e identificación de las Creencias en el EOS

El EOS es un sistema teórico que asume una posición antropológica y pragmatista de la matemática (Godino, 2024), esto implica que "la actividad de las personas en la resolución de problemas se considera el elemento central en la construcción del conocimiento matemático" (Godino et al., 2020, p. 6). Entendiendo a la *actividad* como la puesta en acción de sistemas de prácticas mediante los cuales se da respuesta a una situación o problema y en donde intervienen sistemas organizados de objetos culturalmente compartidos (Godino, 2021). Mientras que un *problema* es una "situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución" (Lester, 1980, p. 287).

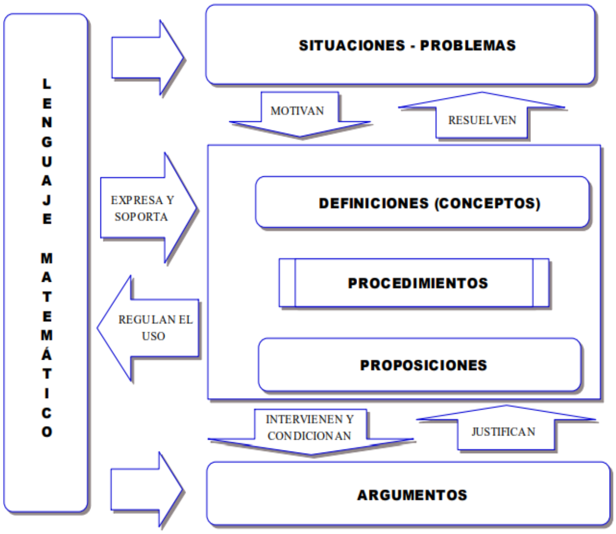
Esto permite declarar que la actividad en torno a un problema lleva a actuaciones o expresiones matemáticas que son denominadas *prácticas matemáticas* (Godino, 2024). En estas prácticas puede estar involucrada únicamente una persona (práctica personal) o un grupo de personas (práctica institucional) (Godino y Batanero, 1994). Las expresiones que apoyan, regulan o intervienen en las prácticas matemáticas, ya sean de carácter material o inmaterial, son denominadas en el EOS como *objetos matemáticos* (Godino et al., 2020).

Los objetos matemáticos son símbolos de unidades culturales dinámicas y en constante modificación (Asenova, 2021). En este sentido, el *significado* atribuido a un objeto matemático es "la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto" (Godino, 2021, p. 8) que establecen los sujetos implicados en una práctica. Siendo de particular importancia los denominados *objetos matemáticos primarios*: problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, pues a través de ellos se articulan los significados en las prácticas matemáticas (Godino et al., 2007).

De hecho, ante la variedad de escenarios, circunstancias o contextos espacio-temporales y socioculturales en los que se desarrollan las prácticas matemáticas, los cuales generan múltiples procesos de semiosis (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2016), en el EOS se ha desarrollado la Configuración epistémica de objetos primarios (Figura 1) como una herramienta que permite visibilizar, estructurar, analizar y discutir los significados emergentes de una práctica matemática.

Figura 1

Configuración epistémica de objetos primarios. (Font et al., 2010, p. 8)



En las prácticas matemáticas hay medios de expresión que conllevan relaciones de dependencia relativa entre las expresiones y los contenidos (Eco, 1979), lo que otorga un componente estructural a los objetos matemáticos. Este puede ser sistemático (relaciones entre varios objetos) o unitario (un objeto como un todo) (D'Amore y Godino, 2007). Así, en las prácticas matemáticas los objetos emergen con distintas funciones: representación, instrumento, regulador, explicación y justificación (Godino et al., 2020).

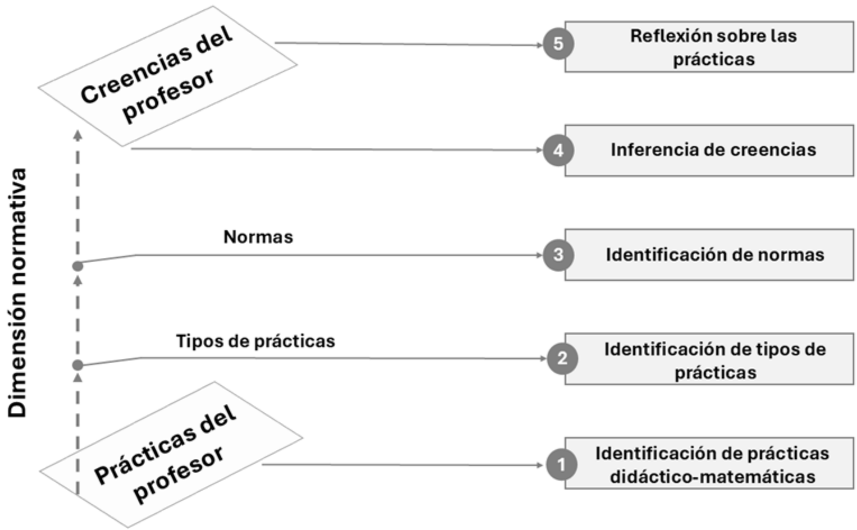
Precisamente, en el ámbito de los objetos de regulación y justificación, en el EOS, aparecen las creencias. Si bien la discusión sobre la naturaleza de las creencias no ha llegado a un consenso y han transitado entre enmarcarlas netamente en el ámbito cognitivo (Thompson, 1992; Goldin, 2002), o verlas como objetos de naturaleza exclusivamente afectiva (Nespor, 1987; DeBellis y Goldin, 2006), en el EOS se les reconoce como objetos que permiten conectar los dos aspectos.

En general, en el EOS se parte de considerar la posición pragmatista de la matemática para plantear que las creencias son las disposiciones para la acción, con lo cual se convierten en principios que emergen de la experiencia personal con la intención de estimular e inducir prácticas matemáticas que den estabilidad a la configuración cognitiva de una persona (Godino et al., 2007). Es decir, tienen un componente afectivo al interaccionar con emociones, actitudes y valores para estimular la actividad matemática (Fúneme, 2023), pero también poseen un ámbito cognitivo al estar relacionadas de forma mutuamente dependiente con los significados de los objetos matemáticos que emergen en la práctica matemática (Beltrán y Godino, 2020).

Esta posición permite un acercamiento a las creencias de una persona a través del análisis del diseño e implementación de las prácticas, especialmente desde de la reflexión sobre ellas, pues mediante la justificación que los profesores construyen emergen los principios que las estimulan o condicionan (Beltrán y Godino, 2017). Una descripción detallada de cómo se puede dar este proceso es presentada por Acevedo y Pino-Fan (2024), quienes plantean que se debe partir de la identificación y descripción de las prácticas del profesor a través de la configuración de objetos primarios, para luego avanzar hacia la reflexión (Figura 2).

Figura 2

Acercamiento a creencias. (Acevedo y Pino-Fan, 2024)



En el primer momento se busca la identificación de las prácticas didáctico-matemáticas de los profesores, entendiéndolas como las acciones o manifestaciones con las cuales abordan el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Pino-Fan et al., 2022). Para acercarse a ellas se cuenta con la configuración epistémica de objetos primarios como un instrumento que permite visualizar los objetos matemáticos a los que recurre el docente en sus prácticas y los significados que pretende alcanzar (Asenova et al., 2024).

Luego, en el segundo momento se clasifican las prácticas en: (1) *Planificación* de las situaciones o proceso de enseñanza y aprendizaje; (2) *Motivación*, prácticas que buscan la involucración de los estudiantes en la actividad matemática; (3) *Asignación de tareas*, en donde se dirigen y gestionan las prácticas de los estudiantes; (4) *Regulación* mediante reglas y readaptaciones del proceso de enseñanza y aprendizaje; (5) *Evaluación* del estado de aprendizaje de los estudiantes; y (6) *Reflexión* de todo el proceso vivido (Acevedo y Pino-Fan, 2024).

Ahora bien, para relacionar las prácticas didáctico-matemáticas con las creencias se requiere identificar las normas que subyacen a las acciones y expresiones de los profesores, pues estas revelan los elementos que tienen en cuenta para regular sus prácticas (D'Amore et al., 2007). Estas normas están en correspondencia con las seis facetas del proceso de enseñanza y aprendizaje que se declaran en el EOS: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Esta relación se analiza en el tercer momento, en el cual se identifican las normas asociadas a las prácticas de acuerdo con la clasificación de Godino et al. (2009):

- Normas epistémicas: regulación de conocimiento matemático a través de su descomposición en los seis objetos primarios.
- Normas cognitivas: regulación de las prácticas de los estudiantes.
- Normas afectivas: regulación de las manifestaciones de emociones, actitudes, creencias o valores de los estudiantes sobre los objetos de la actividad matemática.
- Normas interaccionales: regulación de la interacción entre estudiantes, estudiantes y profesor, estudiantes, docente y las situaciones de aprendizaje.
- Normas mediacionales: regulación del uso de recursos materiales, tecnológicos, espaciales y temporales.

- Normas ecológicas: regulación de la relación con el ámbito contextual, social, político, económico, curricular, entre otros que enmarcan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con la identificación de prácticas y normas, el investigador cuenta con los elementos necesarios para establecer regularidades o patrones en las acciones y expresiones de los docentes con lo cual, en el cuarto momento, procede a la inferencia inicial de las creencias. Esta inferencia tiene como objetivo el encuentro entre investigador y profesores para dialogar en torno a sus prácticas y así establecer con mayor certeza las creencias.

En este proceso de acercamiento a las creencias, los cuatro primeros momentos recaen sobre el investigador y están orientados por completo por los principios e instrumentos del EOS. En cuanto al quinto momento, es el punto de identificación final de las creencias y en él juega un papel fundamental el cómo se guía la reflexión, por esto Ledezma et al. (2022) proponen como proceso de emergencia de las creencias al análisis reflexivo desde: (1) *confrontación* con el análisis de las prácticas; (2) *apertura*, cuando el docente recibe comentarios y cuestionamientos por parte de otras personas; (3) *argumentación*, en donde el profesor ante los comentarios y preguntas alusivas a sus prácticas plantea explicaciones de lo que consideró para desarrollarlas; y (4) *conclusión*, en las que se evalúa conjuntamente lo sucedido.

La resolución de problemas en el EOS

La resolución de problemas (RP) ha sido objeto de estudio de la educación matemática por lo menos desde inicios del siglo XX, época en la que se marcaron claramente dos líneas de investigación: (1) el desarrollo de heurísticas, métodos o esquemas para la RP y (2) la RP como desencadenante de la actividad matemática.

Sin lugar a duda en la primera línea de investigación se han destacado los trabajos de Polya (1945), Schoenfeld (1982) y Mason et al. (1982) quienes postularon modelos que aún hoy en día se citan frecuentemente. El éxito de sus modelos radicó en que pasaron de abordar la RP exclusivamente desde el trabajo del matemático, hacia el estudio de cómo vincularla al proceso de enseñanza. Esto les permitió conectar sus ideas con las necesidades de los docentes de las instituciones educativas de diferentes niveles formativos.

En la segunda línea el foco de análisis es distinto, los investigadores se centran en la enseñanza y aprendizaje como un proceso multidimensional en el que la RP es el eje central de la actividad matemática de estudiantes, docentes e investigadores. Acá se encuentran como dos grandes referentes iniciales a

Gagné (1965) y Brousseau (1986), quienes rechazaron la búsqueda de modelos a seguir en la RP y propusieron en su lugar que la libertad de pensamiento y acción deben ser los protagonistas en la clase de matemáticas, desligándola del control absoluto del docente como trasmisor de información y posicionándola como un fenómeno de investigación y discusión para la educación matemática. En esta línea se enmarcan gran parte de las teorías modernas como la Modelación matemática (Kaiser y Schwarz, 2010), la Etnomatemática (D'Ambrosio, 2014), la Teoría de la Objetivación (Radford, 2018), entre muchas otras que problematizan el aprendizaje y enseñanza de la matemática reconociendo la importancia de la RP.

Las dos líneas de investigación en RP han aportado diferentes elementos a la educación matemática (Fúneme et al., 2023). Por ello, en el EOS se reconocen sus avances para considerar la RP como un macroproceso a partir del cual surge la actividad matemática. Esto permite, además, concebirla como una estrategia que ayuda a dar sentido a los objetos matemáticos, sus técnicas, procedimientos y en general a sus significados (Font et al., 2013).

También se reconoce que las prácticas matemáticas que emergen en los salones de clase requieren de una planificación por parte del profesor, de forma que se pueda acompañar, gestionar e incentivar el aprendizaje de los estudiantes. Por esto las situaciones-problemas que se ofrecen al estudiante deben ser elaboradas cuidadosamente por el docente para que generen interacciones entre pares, diversas posibilidades de acercamientos exploratorios y sobre todo comunicación, validación y negociación de significados. Es decir, la RP es entendida como un macroproceso que promueve una actividad matemática dialógica-colaborativa entre estudiantes y docente, empleando los instrumentos, técnicas y prácticas dadas por el contexto sociocultural (Godino et al., 2020).

La variación matemática

Desde la prehistoria el ser humano se ha preocupado por el estudio del cambio (Collette, 2000), pero es solo hasta mediados del siglo V que se empiezan a identificar los problemas matemáticos asociados a la variación, específicamente con el surgimiento del estudio de lo inconmensurable. De hecho, solo hasta la época medieval se inicia un abordaje matemático riguroso y general de ella, el cual desencadenó en el estudio del movimiento desde concepciones infinitesimales y en el posterior estudio de las tangentes, máximos y mínimos desde lo que se reconoce hoy en día como: la derivada y la integral (Cantoral y Farfán, 2004).

En este sentido, la variación se puede entender como el cambio o evolución de magnitudes, objetos o fenómenos en relación con otras magnitudes, variables o parámetros. Este concepto de variación no se limita únicamente al cambio cuantitativo en magnitudes numéricas, sino que también incluye la comprensión cualitativa del comportamiento dinámico de fenómenos matemáticos y de las relaciones que permiten entender cómo una cantidad puede depender de otra (Leung, 2023).

Más aún, la variación matemática forma parte de una estructura amplia que incluye diversas formas de cambio, modelando una infinidad de situaciones donde se presenta algún tipo de transformación, sus formas de representación y de cuantificación (Cantoral et al., 2023). Esto lleva a considerar a la variación como un objeto que permite el estudio matemático de situaciones en las que están presentes las relaciones funcionales, las tasas de cambio y los procesos de optimización, entre otros (Moreno, 2021).

La conexión de la variación con formas de representación algebraica y con objetos del cálculo como la derivada, suelen llevar a los procesos de enseñanza y aprendizaje a un énfasis estrictamente formal y algebraico. No obstante, esto aleja el estudio de la variación de formas de pensamiento dinámicas que permiten percibir el cambio y lo constante en procesos en los que, de manera explícita o implícita, el tiempo juega un rol esencial (Vasco, 2006).

Es decir, en el estudio de la variación es importante identificar la relación entre los elementos variables y los invariantes para generar como resultado la modelación de lo observado, construyendo formas de representación matemática que puedan ser tratadas mediante elementos métricos, numéricos, espaciales y aleatorios. Para esto se requiere del reconocimiento de cómo los cambios en una(s) variable(s) generan cambios simultáneos en otras, además de la identificación de la forma de la relación y su cuantificación (Cantoral et al., 2023).

Así, se reconoce en esta investigación tres significados de referencia de la variación:

- La variación como el cambio o evolución de magnitudes, objetos o fenómenos en relación con otras magnitudes, variables o parámetros (Leung, 2023).
- La variación como el reconocimiento y la cuantificación del cambio en diversas clases de situaciones que involucran magnitudes continuas y discretas (Cantoral et al., 2023).

- La variación matemática como modelación del cambio (en relaciones funcionales y de covariación) y su cuantificación en contextos que involucran magnitudes discretas y continuas (Bonilla et al., 2015).

METODOLOGÍA

Este trabajo se inscribe dentro del paradigma cualitativo y se desarrolla como un estudio de caso con el cual se busca comprender en profundidad las creencias que sustentan las prácticas de resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la variación. El grupo participante fue seleccionado de forma intencional y está conformado por treinta futuros profesores de matemáticas que están en el tramo final de su carrera de formación inicial en una universidad pública de Colombia. Específicamente, son estudiantes que cursan un espacio de formación denominado: Didáctica de la variación, en el que deben diseñar, aplicar y evaluar situaciones de aprendizaje para abordar la variación en los diferentes niveles educativos de la educación colombiana.

Para captar la complejidad del fenómeno, se combinaron técnicas de recolección de datos complementarias: análisis documental de planes de clase producidos por los futuros profesores y entrevistas semiestructuradas basadas en el análisis de esos diseños de clases para el estudio de la variación. Los datos obtenidos se sometieron a un proceso de codificación deductiva, basada en la configuración epistémica de objetos primarios del EOS, la tipología de prácticas didáctico-matemáticas y la clasificación de normas, seguido de un contraste con las categorías emergentes de creencias.

En cuanto a los instrumentos, considerando que la principal fuente de información fueron las planeaciones de clases y que se utilizó la configuración epistémica de objetos primarios para la identificación y sistematización de las prácticas de los futuros profesores, el instrumento empleado para identificar las creencias fue un cuestionario semiestructurado en el que cada pregunta está en relación con alguno de los tipos de normas definidos en el EOS:

- Normas epistémicas: ¿Qué elementos tuvo en cuenta para seleccionar el(los) problema(s) que presentó a los estudiantes? ¿Cómo decidió los momentos en que introducirá el concepto de variación y el procedimiento para cuantificarla?
- Normas cognitivas: ¿Qué dificultades cree que los estudiantes tengan para resolver el problema que les plantea? ¿Podría describirme cómo ayudaría a los estudiantes a superar esas

dificultades? ¿Por qué optó por evaluar el aprendizaje de esa manera?

- Normas afectivas: ¿Cree que al resolver el problema pueda surgir en los estudiantes alguna emoción positiva o negativa que influya en su aprendizaje? En caso de que surgiera alguna emoción negativa ¿Haría algo en particular para gestionarla?
- Normas cognitivo-afectivas: En su opinión, ¿hay algún factor cognitivo o afectivo que influya en que los estudiantes se beneficien de la Resolución de Problemas al estudiar la variación?
- Normas interaccionales: ¿Por qué organizó a los estudiantes para resolver el problema de forma ___ (individual o grupal)? ¿Cuáles son sus criterios para decidir cuándo intervenir directamente, cuándo preguntar y cuándo dejar que los estudiantes continúen sin orientación en la solución del problema?
- Normas mediacionales: ¿Por qué incluyó la resolución de un problema en este momento de la clase?
- ¿Cree que el uso o no uso de las herramientas tecnológicas favorece la comprensión y resolución del problema?
- Normas ecológicas: ¿Cree que factores externos como las políticas educativas condicionaron de alguna manera su forma de trabajar la resolución de problemas en la clase?
- Si tuviera que rediseñar el problema ¿Cree que sería pertinente agregar algún aspecto del contexto sociocultural? Si la respuesta es afirmativa: ¿Me podría dar un ejemplo de cómo lo haría?

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La exposición del análisis de datos y resultados inicia con la descripción de las planeaciones de las clases realizadas por los futuros profesores a través de sus configuraciones epistémicas. A partir de esta reconstrucción, se identifican y categorizan los tipos de prácticas docentes emergentes detallando el contexto de implementación de la resolución de problemas. Sobre estas prácticas se analizan las normas que las regulan (epistémicas, cognitivas, afectivas, interaccionales, mediacionales y ecológicas). Finalmente, se interpretan las creencias mediante su conexión con las normas y prácticas previamente identificadas.

Identificación de prácticas didáctico-matemáticas

Cada uno de los 30 futuros profesores diseñó una planeación para abordar la enseñanza y aprendizaje de la variación en educación universitaria.

En dichas planificaciones se identificaron cuatro tipos de diseños, los cuales difieren en cuanto al problema o situaciones propuestas, pero coinciden en su estructura. Las estructuras identificadas se describen a continuación.

Para iniciar, se encontraron doce planeaciones en las cuales la resolución de problemas aparece como la parte final del proceso de enseñanza y aprendizaje (Tabla 1). Este tipo de planeaciones se caracterizaron por partir de la explicación de una definición de variación instantánea, dada por el docente, después la ejemplificación algebraica de un procedimiento para la cuantificación de la variación en funciones y finalmente la solución de un problema por parte de los estudiantes.

Tabla 1

Ejemplo de objetos primarios en estructura de clase 1

Tipo	**Objetos**
Situaciones	Después de servir una taza de café, la temperatura T (°C) varía con el tiempo t (minutos) de acuerdo con el modelo: $T(t) = 80 + 15e^{-0.1t}$. Calcule la variación de la temperatura entre *t=2* y *t=6 min*. Luego determine la variación de la temperatura en *t=4 min*. Explique qué significa físicamente ese valor para la taza de café.
Lenguaje	Algebraico, numérico, gráfico y verbal.
Definiciones	La variación es la medida del cambio de una función.
Procedimientos	*1. Cuantificación de la variación promedio:* Selección de datos e incógnitas; Sustitución de datos en modelo; Cálculo de variación promedio como una razón de cambio: $\frac{T(6)-T(4)}{6-4}$; Respuesta al problema. *2. Cuantificación de la variación instantánea:* Selección de datos conocidos e incógnitas; Derivación de modelo; Sustitución de datos; Respuesta al problema.
Proposiciones	- La variación promedio se calcula como una pendiente. - La derivada indica qué tan rápido cambia una variable en un punto.
Argumentos	- La variación promedio se obtiene del cálculo de la pendiente de la recta secante a una función. - La variación instantánea se obtiene a través del cálculo de la pendiente de la recta tangente a una función.

La segunda estructura (Tabla 2) corresponde a ocho planeaciones en las que la resolución de problemas aparece como una parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. En estas planeaciones los futuros profesores proponen comenzar con una explicación de la definición de variación instantánea a través de una situación problema que es representada en gráficos de GeoGebra, sin resolverla, luego la ejemplificación de la cuantificación a través de un problema en el que se cuenta con un modelo algebraico, después otro en el que se debe determinar el modelo y finalmente la resolución de ejercicios algebraicos en la clase y la entrega de varios problemas para el trabajo autónomo.

Tabla 2

Ejemplo de objetos primarios en estructura de clase 2

Tipo	**Objetos**
Situaciones	Durante la temporada de riego, una finca emplea un depósito de forma cónica invertida para almacenar agua de lluvia. El cono tiene 5 m de altura y un radio de 2 m. Un sistema de bombeo hace ingresar agua al depósito a un caudal constante de 0.04 m^3/s. ¿A qué velocidad varía la altura del agua (en m/s) en el instante en que el nivel de agua alcanza 3 m de profundidad?
Lenguaje	Algebraico, numérico, gráfico y verbal.
Definiciones	La variación es el reconocimiento y cuantificación del cambio en relaciones funcionales que modelan problemas.
Procedimientos	*Cuantificación de la variación instantánea:* - Representación gráfica del problema. - Selección de datos e incógnitas. - Construcción de un modelo. - Derivación del modelo. - Sustitución de datos. - Respuesta al problema.
Proposiciones	En todo problema de variación se pueden encontrar modelos que representen el cambio.
Argumentos	- La representación gráfica de un problema permite visualizar lo cambiante y lo invariable. - La derivada es el objeto matemático que mide la variación instantánea.

La tercera estructura (Tabla 3) se identificó en tres planeaciones que emplearon la resolución de problemas de variación como la finalidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. En este caso los futuros profesores no dan definición de la variación, en su lugar, definen un problema de variación instantánea como aquel en el que se desea conocer el cambio en un punto, luego dan un esquema de resolución de este tipo de problemas y proceden a dar varios ejemplos como aplicarlo; por último, cierra con un conjunto de problemas que entrega a los estudiantes para que los resuelvan de forma autónoma.

Tabla 3

Ejemplo de objetos primarios en estructura de clase 3

Tipo	Objetos
Situaciones	Durante una campaña publicitaria se infla un globo esférico que servirá como anuncio flotante. El sistema de bombeo introduce aire a una rapidez constante de 0.05 m^3/s. ¿A qué velocidad varía el radio del globo cuando este alcanza un radio de 1.2 m? Indique paso a paso el proceso de solución.
Lenguaje	Algebraico, numérico, gráfico y verbal.
Definiciones	Un problema de variación instantánea es aquel en el cual se desea calcular la razón de cambio de las variables involucradas en un punto o momento específico.
Procedimientos	*Solución de un problema de variación instantánea*: - Representación gráfica del problema. - Selección de datos e incógnitas. - Construcción de un modelo. - Derivación del modelo. - Sustitución de datos. - Respuesta al problema.
Proposiciones	- Sin la representación gráfica no se puede entender el problema. - La variación, rapidez, razón de cambio y velocidad son lo mismo en estos problemas. - Siempre hay que derivar y reemplazar.
Argumentos	La derivada se creó para resolver problemas de variación.

En la cuarta y última estructura identificada (Tabla 4), se ubicaron siete planeaciones que visualizan la resolución de problemas como el eje central de la enseñanza y aprendizaje de la variación. Ese grupo de profesores plantea un problema y espera que los estudiantes lo resuelvan (en grupos de 3 integrantes) sin definiciones, procedimientos o explicaciones iniciales, dando la oportunidad a los estudiantes de utilizar cualquier herramienta (libros, computadores, celulares, etc.) para consultar y establecer una solución al problema. Proponen, además, que su función sería reunir los avances parciales para institucionalizar progresivamente conceptos y procedimientos.

Tabla 4

Ejemplo de objetos primarios en estructura de clase 4

Tipo	Objetos
Situaciones	En una feria científica se lanza verticalmente desde el suelo un cohete de agua. Las mediciones indican que cuando: *t=0 s* la altura del cohete es *0 m*; *t=3 s* el cohete está a *36 m* sobre el suelo; *t=6 s* vuelve a tocar el suelo. Si la altura $h(t)$ del cohete se ajusta adecuadamente a una función cuadrática del tiempo *t*. ¿Con qué rapidez cambia la altura del cohete cuando *t=4 s*? ¿En qué momento la altura del cohete es máxima? ¿Cuál es la variación de la altura en ese momento?
Lenguaje	Algebraico, numérico, gráfico y verbal.
Definiciones	La variación instantánea es la medida de la razón de cambio instantánea.
Procedimientos	*Solución a problema de variación:* Consulta de información; Negociación de conceptos y procedimientos; Ejecución de procedimientos consultados; y Respuesta del problema.
Proposiciones	En el punto máximo la rapidez de cambio es cero.
Argumentos	- La variación instantánea es la pendiente de la recta tangente. - En el punto máximo de una función la recta tangente es horizontal, su pendiente es cero.

Identificación de tipos de prácticas didáctico-matemáticas

A partir de los objetos que se identificaron en cada estructura se hace posible clasificar los tipos de prácticas que se buscan con cada diseño. En el caso de la primera estructura (Tabla 5) se encuentran mayoritariamente prácticas de regulación, pues el docente enfoca sus esfuerzos en establecer reglas conceptuales y procedimentales para abordar la variación instantánea. Adicionalmente, la resolución de problemas se asocia a las prácticas de evaluación.

Tabla 5

Tipos de prácticas en estructura de clase 1

Código	Práctica	Tipo
P1	Definición de variación instantánea	Regulación
P2	Ejemplificación de percepción de la variación instantánea	Motivación
P3	Ejemplificación de medida de variación en funciones	Regulación
P4	Evaluación mediante resolución de problemas	Evaluación

En el caso de la segunda estructura, la regulación nuevamente es el tipo de práctica predominante (Tabla 6). Sin embargo, la resolución de problemas toma un papel distinto, pues también se asocia a prácticas de motivación y asignación de tareas. Esto considerando que los futuros profesores buscan captar la atención de los estudiantes a través de situaciones cotidianas, con lo cual buscan que la presencia de la RP sea transversal en el desarrollo de la planeación y por tanto en el proceso de enseñanza y aprendizaje esperado.

Tabla 6

Tipos de prácticas en estructura de clase 2

Código	Práctica	Tipo
P5	Definición de variación instantánea	Regulación
P6	Asociación de la definición con un problema	Motivación
P7	Representación gráfica de la definición y el problema	Motivación
P8	Ejemplo de RP de variación instantánea	Regulación
P9	Ejemplo de modelación y RP de variación	Regulación
P10	Asignación de ejercicios algebraicos de práctica	Asigna tareas
P11	Asignación de problemas de estudio	Asigna tareas

La tercera estructura de planeación se centra en regular la forma de reconocer, solucionar e interpretar problemas de variación instantánea. Por esto se considera que las prácticas asociadas a la RP son de regulación de un conjunto de reglas de acción que el profesor pretende instalar en el grupo de estudiantes (Tabla 7). El único tipo de práctica didáctico-matemática adicional que aparece en la planeación es la asignación de tareas, sin embargo, en la planeación no se busca el desarrollo de esta práctica en el aula, lo que se espera es que sea un trabajo autónomo del estudiante.

Tabla 7

Tipos de prácticas en estructura de clase 3

Código	Práctica	Tipo
P12	Definición de problema de variación instantánea	Regulación
P13	Presentación de esquema de solución	Regulación
P14	Ejemplo de RP de variación instantánea	Regulación
P15	Asignación de problemas de estudio	Asigna tareas

Finalmente, en el cuarto tipo de planeación las prácticas del profesor parten de la asignación de tareas y luego buscan la regulación de los avances y dificultades de los estudiantes, hasta lograr institucionalizar los conceptos y procedimientos que fueron puestos en juego. Es decir, en este caso la resolución de problemas aparece a lo largo de la planeación con la intención de que el estudiante desarrolle su actividad matemática y el profesor pueda regular el conocimiento que se pretende alcanzar.

Tabla 8

Tipos de prácticas en estructura de clase 4

Código	Práctica	Tipo
P16	Asignación de problema	Asigna tareas
P17	Validación de resultados parciales al problema	Regulación
P18	Recolección de soluciones al problema	Regulación
P19	Institucionalización de conocimiento emergente del problema	Regulación

Identificación de normas

Cada una de las prácticas identificadas dan cuenta de los criterios y normas que emplean los futuros profesores para realizar la planeación de la enseñanza y aprendizaje de la variación, esto se resume en la Tabla 9. En el caso del primer tipo de planeación las normas que predominan son de carácter epistémico, pues se centran en el significado y procedimientos de la variación, aunque desde las acciones del docente. Por esto, se encuentra que las normas hacen alusión a la RP como un tipo de práctica de carácter evaluativo.

En la segunda estructura de planeación existe una mayor diversidad de clases de normas, pues se mezclan elementos del significado de la variación (epistémicas), consideraciones del aprendizaje de los estudiantes (cognitivas) e instrumentos que pueden favorecer la actividad matemática de RP (mediacional). En este contexto, los futuros profesores buscan la gestión de la RP como una forma de ejercitación de algoritmos dados por el docente en búsqueda de un proceso de comprensión “sencillo”.

En la tercera estructura la RP hace parte, principalmente, de prácticas de carácter cognitivo y está relacionada con el trabajo autónomo del estudiante. Su finalidad es que todas las acciones que el profesor realiza sean captadas y replicadas por los estudiantes. Por último, en la cuarta estructura la RP se asocia con la preocupación de los futuros profesores por gestionar mediaciones e interacciones que promuevan el trabajo de los estudiantes y la regulación del profesor de la enseñanza y aprendizaje de la variación.

Tabla 9

Tipos de normas en planeaciones

Estructura	Práctica	Normas	Tipo
Tipo 1: RP como etapa final	P1	Se debe iniciar con la definición de variación	Epistémica
	P2	Se debe buscar el interés de los estudiantes	Afectiva
	P3	Es necesario dar procedimientos	Epistémica
	P4	La RP permite evaluar el aprendizaje	Epistémica
Tipo 2: RP como parte del proceso	P5	Se debe iniciar con la definición de la variación	Epistémica
	P6 y P7	Los estudiantes necesitan múltiples representaciones de la variación	Cognitiva
	P7	El software dinámico permite visibilizar la variación	Mediacional
	P8 y P9	Es necesario dar procedimientos	Epistémica
	P10 y P11	El estudiante debe practicar algoritmos antes de resolver problemas	Cognitiva
Tipo 3: RP como finalidad	P12	No es necesario definir la variación	Epistémica
	P13	El estudiante necesita modelos de RP	Cognitiva
	P14	El profesor debe dar ejemplos de RP	Regulación
	P15	El estudiante debe practicar el modelo de RP de forma autónoma	Cognitiva
Tipo 4: RP como eje central	P16	La enseñanza y aprendizaje de la variación se logra con un problema	Cognitiva
	P17	El rol del profesor es la validación del aprendizaje	Interaccional
	P18 y P19	La institucionalización es una fase final del aprendizaje en la RP	Mediacional

Inferencia de creencias

Debido a que el interés principal de este artículo es abordar las creencias alusivas a la forma en que se considera la RP en la enseñanza y aprendizaje de la variación, de las normas inferidas se seleccionan únicamente las relacionadas con la RP. Específicamente, se infiere que para los 12 futuros profesores que emplearon la primera estructura de planeación, la creencia principal es que la RP es una forma de evaluación del aprendizaje. Para los 8 que diseñaron el segundo tipo de planeación la RP es una práctica autónoma del estudiante con la cual ejercita algoritmos dados por el docente, pero debe estar presente en toda la planeación, así sea una práctica del profesor. Los 3 futuros profesores que optaron por la tercera estructura creen que la RP es un tipo de práctica que se puede aprender a partir de modelos de solución y los 7 que diseñaron la cuarta estructura creen que la RP es la actividad desencadenante de la enseñanza y aprendizaje de la variación.

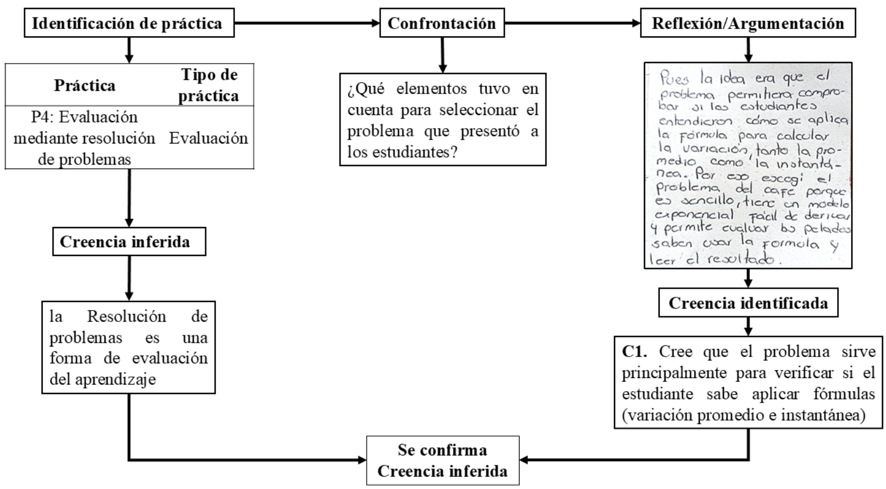
Reflexión de los futuros profesores

Para profundizar en las creencias inferidas y verificar cuáles de ellas en realidad pertenecen a los futuros profesores, en la etapa final se desarrolla el proceso de reflexión. Esta etapa parte de la confrontación de las ideas que fueron plasmadas en las planeaciones con las prácticas identificadas por el investigador. Luego, se aplicó el cuestionario (presentado previamente) de manera que en las respuestas se identifican los argumentos y reflexiones que dan cuentan de la lista final de creencias.

Para ejemplificar este proceso, en la Figura 3 se presenta cómo a partir de la respuesta al primer interrogante del cuestionario, dada por uno de los futuros profesores que empleó la primera estructura de planeación, se determina que se infirió de manera correcta la creencia según la cual la resolución de problemas es una forma de evaluación.

Figura 3

Creencia en reflexión alusiva a estructura 1



Como resultado de este tipo de análisis se lograron identificar 14 creencias (Tabla 10) en las reflexiones de los futuros profesores que emplearon el primer tipo de planeación. En ellas se observa que recurren a los diferentes tipos de normas para justificar que la RP es una actividad personal que se desarrolla con el fin de evaluar el aprendizaje. Además, consideran que en la RP pueden emerger emociones positivas y negativas, por esto debe aparecer al final de una clase, de forma que los estudiantes ya tengan los conocimientos básicos necesarios para afrontar problemas y también para que el profesor pueda supervisar la comprensión del grupo de clase.

Tabla 10

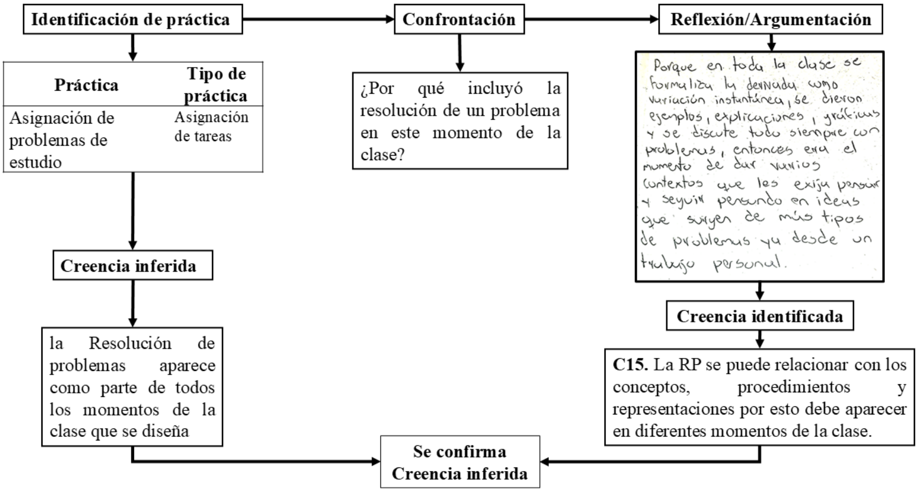
Creencias en planeación Tipo 1: RP como etapa final

Creencias	Tipo
C1. El problema sirve principalmente para verificar si el estudiante sabe aplicar fórmulas (variación promedio e instantánea). **C2.** Primero va la explicación formal y luego el problema como comprobación de lo enseñado.	Epistémica
C3. Las dificultades en la RP son sobre todo procedimentales (derivación, regla de la cadena, interpretación de unidades). **C4.** La ayuda en la RP debe ser magistral y guiada (repasar pasos, dar pistas puntuales, modelar la solución). **C5.** La RP es una estrategia de evaluación válida: quien resuelve “entendió”.	Cognitiva
C6. Los factores afectivos (ansiedad/confianza) median el beneficio de la RP, pero no reconfiguran su función evaluativa.	
C7. Las emociones inciden: el acierto refuerza la seguridad y el error frustra. **C8.** Se debe normalizar el error en la RP y dar retroalimentación tranquila para gestionar emociones negativas.	Afectiva
C9. El trabajo en la RP debe ser individual para obtener evidencia personal de aprendizaje (evitar “que copien”). **C10.** El docente debe intervenir cuando muchos tienen dificultades.	Interaccional
C11. El problema se sitúa al final porque su función es comprobar lo visto. **C12.** La tecnología no es esencial en la RP de variación; la clave es el dominio de los cálculos.	Mediacional
C13. Las políticas educativas tienen poca influencia en la forma de utilizar la RP. **C14.** Emplear un contexto cercano (clima o comida) en la RP da un valor adicional a la evaluación.	Ecológica

Las reflexiones de los futuros profesores que elaboraron planeaciones alineadas con la segunda estructura confirman que la creencia central que orientó su diseño fue correctamente inferida, pues sitúan la RP como parte constitutiva de cada uno de los momentos del proceso de enseñanza y aprendizaje de la variación (Figura 4). Pues justifican consistentemente que sus decisiones didácticas surgen de la necesidad de mantener activa la RP en todos los momentos.

Figura 4

Creencia en reflexión alusiva a estructura 2



Estos futuros profesores plantearon 9 creencias (Tabla 11) en las que se plantea que la RP se relaciona constantemente con conceptos, procedimientos y representaciones que no se pueden presentar simultáneamente y por esto debe aparecer en distintos momentos de la clase. No obstante, asumen que los problemas de variación se abordan solo después de formalizar la derivada y requieren de un acompañamiento constante de la visualización dinámica mediante gráficos interactivos, además de una secuencia progresiva para mitigar la ansiedad típica del trabajo con tasas. Inclusive, intentan legitimar sus ideas con interpretaciones de los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación de Colombia como exigencias que imponen la RP como la manera en que se debe desarrollar la competencia matemática.

Tabla 11

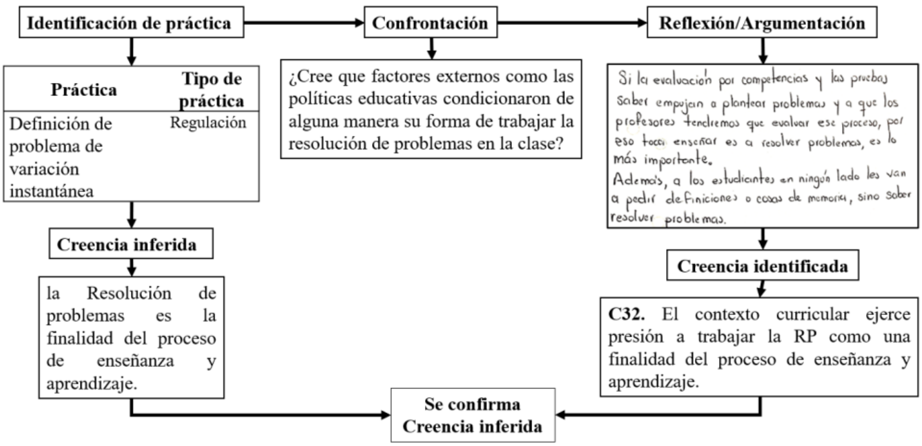
Creencias en planeación Tipo 2: RP como parte el proceso

Creencias	Tipo
C15. La RP se puede relacionar con conceptos, procedimientos y representaciones por esto debe aparecer en todo momento de la clase.	Epistémica
C16. Los estudiantes tienen dificultades para identificar variables que dependen del tiempo. **C17.** Los problemas dinámicos permiten superar los obstáculos.	Cognitiva
C18. La RP de variación genera ansiedad, debe trabajarse por fases.	Afectiva
C19. Aunque la colaboración en parejas ayuda a comprender los problemas, solo el trabajo individual da evidencias del aprendizaje. **C20.** El trabajo con RP requiere acompañamiento del profesor.	Interaccional
C21. Los problemas de variación solo los pueden trabajar los estudiantes una vez se formaliza el concepto de derivada.	Mediacional
C22. El trabajo de la variación debe ser según la RP, es una exigencia del Ministerio de Educación. **C23.** El contexto es importante, por eso un problema es realista.	Ecológica

En el tercer grupo las reflexiones son coherentes con las prácticas y normas identificadas, con lo cual se confirma la creencia central inferida previamente: la RP debe constituir la finalidad de la enseñanza y del aprendizaje (Figura 5).

Figura 5

Creencia en reflexión alusiva a estructura 3



Específicamente, manifestaron 10 creencias (Tabla 12) en las que la RP de variación se concibe como un ejercicio riguroso y esencialmente individual en el que cada tarea debe obligar al estudiante a leer la situación, modelarla matemáticamente, derivar y justificar cada paso, lo cual se puede enseñar como un modelo de resolución. Con esa creencia, plantearon que la comprensión emerge del entrenamiento práctico antes de formalizar la definición de variación y que cualquier dificultad que aparezca la superan mediante ejemplos guiados y metacognición explícita respecto al uso del modelo. Además, para ellos, el motor afectivo de la RP es el placer intrínseco de encontrar una solución y visualizar la utilidad de la variación, por ende, contextualizar un problema se vuelve irrelevante, al igual que los factores personales o sociales.

Tabla 12

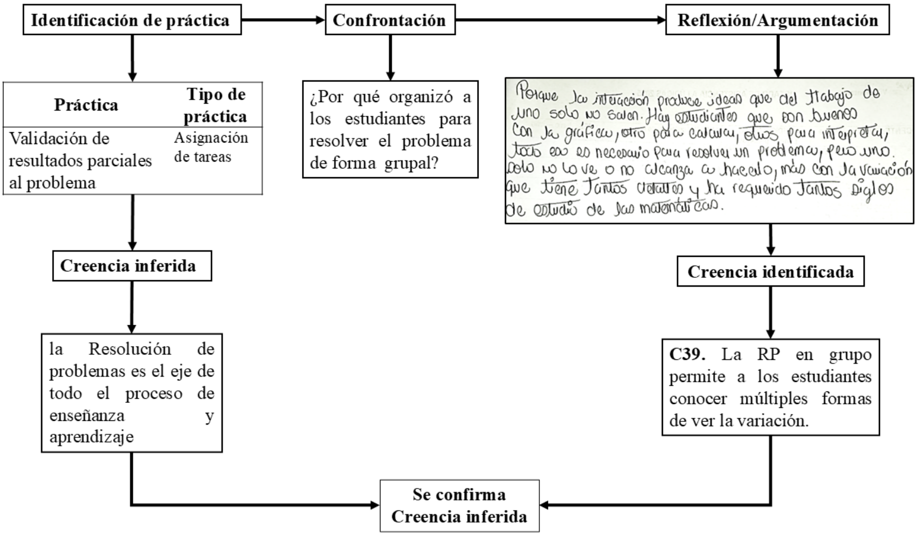
Creencias en planeación Tipo 3: RP como finalidad

Creencias	Tipo
C24. Los problemas de variación deben exigir: leer, modelar, derivar y justificar. **C25.** La definición de variación puede esperar, primero se entrena el método de RP y luego se formaliza.	Epistémica
C26. Las dificultades se superan mediante ejemplos y metacognición (qué piden, qué cambia, cómo aislar la tasa de variación). **C27.** Con un buen modelo de RP los estudiantes pueden superar las dificultades solos.	Cognitiva
C28. El placer de resolver problemas y ver la utilidad de la variación es la emoción más importante.	Afectiva
C29. Para apropiarse del método de RP de variación se requiere de un esfuerzo personal. **C30.** El estudiante solo necesita escuchar la explicación del modelo de RP y practicar, el trabajo en grupos solo distrae.	Interaccional
C31. El uso de las tecnologías daña el razonamiento que debe desarrollar un estudiante de la RP de variación, él debe abstraer la variación.	Mediacional
C32. El contexto curricular ejerce presión para trabajar la RP como una finalidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. **C33.** Los factores personales y sociales deben apartarse del aula, de lo contrario nadie podría resolver un problema de variación.	Ecológica

Finalmente, en las reflexiones del grupo cuyos diseños permitieron inferir la creencia en que la RP se ve como eje central de la enseñanza y aprendizaje de la variación, predominan argumentos relacionados con normas interaccionales (Figura 6).

Figura 6

Creencia en reflexión alusiva a estructura 4



A través de diez creencias sostienen que un problema bien planteado funciona como un detonante que hace emerger todos los aspectos de la variación y exponen las dificultades reales que los estudiantes deben aprender a enfrentar. Por esto, creen que la RP no solo ejercita cálculos, sino que desarrolla la argumentación, alimenta la curiosidad y creatividad, manteniendo motivados a los estudiantes.

Precisamente, ante la necesidad de mantener a los estudiantes involucrados en la RP, este grupo de futuros profesores cree que la comunicación entre estudiantes genera confianza y permite contrastar múltiples miradas de la variación para validar las ideas emergentes; por lo cual, la RP se debe trabajar en un entorno colaborativo. Para ellos, el profesor debe focalizar sus intervenciones y dinamizar el aprendizaje con la RP de contextos familiares, de manera que el conocimiento matemático se relacione con la cotidianidad y prepare al estudiante para afrontar los desafíos sociales y políticos contemporáneos.

Tabla 13

Creencias en planeación Tipo 4: RP como eje central

Creencias	Tipo
C34. Un buen problema hace emerger todos los aspectos de la variación.	Epistémica
C35. El objetivo de la RP precisamente es que emerjan dificultades y que el estudiante aprenda a afrontarlas.	Cognitiva
C36. Con la RP de variación el estudiante desarrolla su capacidad para argumentar.	Afectiva
C37. La RP fomenta la curiosidad, la creatividad y mantiene a los estudiantes motivados.	Afectiva
C38. La comunicación con los compañeros genera confianza, por eso la RP debe trabajarse en grupos. **C39**. La RP en grupo permite a los estudiantes conocer múltiples formas de ver la variación. **C40**. El trabajo en grupo permite al estudiante validar sus ideas. **C41**. Con la RP el profesor puede focalizar sus acciones y dinamizar el aprendizaje de la variación.	Interaccional
C42. En la RP los estudiantes deben tener acceso a todas las herramientas.	Mediacional

De esta manera, a través de la reflexión de los futuros docentes sobre sus diseños, se encuentra que lo inferido a partir de la clasificación de prácticas y normas reflejan las creencias que orientaron las planeaciones. Más aún, no se identificaron incoherencias o conflictos entre lo propuesto en los diseños, las prácticas identificadas y las creencias expresadas en la reflexión. Con esto, se considera que el proceso desarrollado permite clasificar las creencias de los futuros profesores sobre el papel de la RP en la enseñanza y aprendizaje de la variación en cuatro tipos: El primer grupo entiende la RP como evaluación y la sitúa al final de la secuencia de trabajo en el aula; el segundo grupo concibe la RP como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo cual aparece al inicio, durante y al cierre de la planeación; el tercer grupo, que hace de la RP la finalidad, prioriza el método de resolución (leer, modelar, derivar y justificar) antes que la formalización de conceptos; y por último, en el cuarto grupo se considera a la RP como eje estructurante que permite que emerjan conceptos, argumentos, procedimientos y normas de interacción.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un ejemplo de articulación de dos propuestas emergentes en el marco teórico-metodológico del EOS para la identificación, estructuración y análisis de las creencias (Ledezma et al., 2022; Acevedo y Pino-Fan, 2024). Como resultado, se logró identificar las creencias centrales que consideraron los futuros profesores de matemáticas, de un programa de formación inicial en Colombia, para diseñar sesiones de clase que emplean la resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la variación: (1) etapa final, (2) parte del proceso, (3) finalidad y (4) eje central. Adicionalmente, se detallaron 45 creencias que describen de forma específica los aspectos epistémicos, cognitivos, afectivos, mediacionales, interaccionales y ecológicos de cada una de las cuatro consideraciones.

El análisis desarrollado permitió estudiar tanto las prácticas discursivas como las operativas para obtener una visión amplia y muy cercana de lo que realmente piensan y hacen los profesores de matemáticas, como es sugerido en múltiples investigaciones (Moreno y Azcarate, 2003; Speer, 2005; Calleja, 2022). Esto permitió visibilizar que, aunque todos los participantes estaban en un mismo entorno formativo, las creencias personales terminan por orientar prácticas totalmente diversas respecto a la resolución de problemas. Resultado que resalta la importancia de reflexionar y discutir las prácticas didáctico-matemáticas de profesores en formación inicial, pues en ellas se hacen explícitas las creencias que condicionan la interpretación y forma de aplicación del conocimiento emergente de la educación matemática.

Respecto a la variación, la identificación y clasificación de las prácticas didáctico-matemáticas reveló que los futuros profesores la incorporan en sus planeaciones de clase de manera distinta. Dos grupos la consideran sólo como una cuantificación del cambio, otro agregó la importancia de su percepción antes que su medición y el restante evadió su conceptualización. Esto muestra que las creencias epistémicas que se posean sobre los objetos matemáticos involucrados en las prácticas condicionan fuertemente las prácticas de diseño de situaciones de enseñanza y aprendizaje basadas en la resolución de problemas, pues desde el significado pretendido por los docentes se previeron las prácticas regulativas y las normas de interacción en las planeaciones.

Para finalizar, el análisis de creencias expuesto ofrece un proceso replicable que puede robustecer el conocimiento que se tiene en la comunidad científica de la educación matemática respecto a los factores que propician o limitan la transformación de las prácticas tradicionales de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Esto reconociendo que al ampliar la explicación de los criterios y normas que motivan las acciones de los profesores, se puede también investigar, diversificar y consensuar prácticas formativas que permitan a los futuros profesores transformar las creencias que obstaculizan y limitan su desarrollo profesional.

AUTHORS' CONTRIBUTIONS STATEMENTS

CCFM concibió y desarrolló la investigación, organizando la parte teórica, el diseño metodológico, así como la recolección y análisis de datos. Finalmente, CCFM escribió el presente artículo publicado como resultado de la investigación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están disponibles previa solicitud al autor CCFM.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación es financiada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el marco del programa *Convoca UD (Pr2-2025)* de Apoyo a proyectos de investigación, investigación-creación e innovación.

REFERENCIAS

Acevedo, G., & Pino-Fan, L. (2024). A proposal for the study of mathematics teachers' beliefs through the analysis of their practices. *Mathematics Education Research Journal*, *37*, 1–25. https://doi.org/10.1007/s13394-024-00496-y

Asenova, M. (2021). *Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica*. Pitagora.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño, M., Fúneme, C., Iori, M., & Santi, G. (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Magisterio.

Beltrán, P., & Godino, J. (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, *56*(2), 92–116.

Beltrán, P., & Godino, J. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, *50*(1), 1–20.

Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D. & Bohórquez, L. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. *Avances de investigación en educación matemática: AIEM*, (7), 73–93.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. En R. Leikin, (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp. 115-145). Springer.

Calleja, J. (2022). Changes in mathematics teachers' self-reported beliefs and practices over the course of a blended continuing professional development programme. *Mathematics education research journal*, *34*(4), 835–861.

Cantoral, R., Espinoza, L. y Gaete, C. (2023). Exponential behaviour and variational practices in Chilean newscasts: a socioepistemological view. *ZDM Mathematics Education*, *55*(1), 147–161.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. Thomson.

Collette, J. (2000). *Historia de las matemáticas I y II*. Siglo Veintiuno editores.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, *7*(2), 100–107.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *28*(2), 49–77. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2007.p49-77.id386

D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191–218.

DeBellis, V., & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 131–147.

Eco, U. (1979). *A theory of semiotics*. Indiana University Press.

Font, V., Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89–105.

Fúneme, C. (2023). Una interpretación del papel de las creencias en algunos modelos de conocimiento del profesor. *Paradigma*, *44*(2), 190–211.

Fúneme, C., Linares, L., & Cáceres, L. (2023). Conocimiento didáctico-matemático de profesores colombianos sobre los procesos de generalización y particularización en la resolución de problemas. *Paradigma*, *44*(Edição Temática: EOS. Questões e Métodos), 194–220.

Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. Holt, Rinehart and Winston.

Godino, J. (2021). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *1*(1), 1–21.

Godino, J. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3–15.

Godino, J., Burgos, M., & Wilhelmi, M. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(1), 147–164. 147 https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias*, *27*(1), 59–76. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132207

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. En G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics Education?* (pp. 59–72). Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs–no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß, & W. Schlöglmann (eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results* (pp. 9–28). Sense Publishers.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76.

Ledezma, C., Sol, T., Sala, G., & Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics*, *10*(18), 3339.

Lester, F. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286–323). National Council of Teachers of Mathematics.

Leung, A. (2023). A pedagogical reflection on the interplay between variation and invariant: Variational thinking. *Asian Journal for Mathematics Education*, *2*(3), 261–273.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Pearson Prentice Hall.

Miranda, P., & Mamede, E. (2022). Appealing to creativity through solving and posing problems in mathematics class. *Acta scientiae*, *24*(4), 109-146.

Moreno, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM Mathematics Education*, 53, 621–633. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, *21*(2), 265–280.

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal of Curriculum Studies*, *19*(4), 317–328.

Parra, Y., & Breda, A. (2017). La enseñanza de o desde la resolución de problemas matemáticos: concepciones de profesores de Matemática en formación. *Acta Scientiae*, *19*(2), 277–295.

Pino-Fan, L., Castro, W., & Font, V. (2022). A Macro tool characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *Internacional Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(5), 1407–1432. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Radford, L. (2018). On theories in mathematics education and their conceptual differences. In B. Sirakov, P. De Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. 4* (pp. 4055–4074). World Scientific Publishing Co.

Sáenz-Ludlow, A. & Zellweger, S. (2016). Classroom mathematical activity when it is seen as an inter-intra double semiotic process of interpretation. En A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a Tool for Learning Mathematics* (pp. 43–68). Sense Publishers.

Santos, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM Mathematics Education*, *56*, 211–222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8

Santos, M., & Reyes, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 182–201.

Schoenfeld, A. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F. Lester, & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research* (pp. 27–37). Franklin Institute Press.

Schoenfeld, A. (2022). Why are learning and teaching mathematics so difficult? In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 1–35). Springer.

Speer, N. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 361–391. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2745-0

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 127–146). Macmillan.

Törner, G. (2002). Mathematical beliefs - a search for a common ground. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 73–94). Kluwer Academic Publishers.

Vasco, C. (2006). *Didáctica de las Matemáticas. Artículos Selectos. 1a edición*. Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Wellberg, S. (2024). An examination of pre-service mathematics teachers' course-taking, beliefs, and preferred assessment practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09640-8