ISSN: 2178-7727
DOI: 10.64856/acta.scientiae.8448

Do Virtual ao Conceitual: o uso da Computação Gráfica na aprendizagem de Matrizes

Luana Pereira Villa Real[a]
Ana Marli Bulegon[a]

[a] Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT)
Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria - Brasil

RESUMO

Contexto: A crescente presença da computação gráfica no cotidiano evidencia a necessidade de articular conceitos matemáticos escolares a aplicações tecnológicas reais, especialmente no Ensino Médio, onde conteúdos como Transformações Geométricas e Matrizes são pouco explorados em situações significativas. **Objetivos:** Investigar como os conceitos de Transformações Geométricas utilizados na Computação Gráfica contribuem para a aprendizagem das operações com Matrizes e analisar a compreensão dos estudantes ao utilizar recursos digitais. **Design:** Estudo qualitativo de natureza aplicada, estruturado em uma Unidade de Aprendizagem fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa e nos Três Momentos Pedagógicos. **Ambiente e participantes:** A pesquisa foi desenvolvida com 30 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Santo Ângelo/RS, distribuídos em duas turmas, que participaram integralmente das atividades. **Coleta e análise de dados:** Utilizaram-se questionários pré e pós-teste, registros escritos, diário de campo, produções no *software* GeoGebra e análise estatística (teste de McNemar) para verificar avanços conceituais. **Resultados:** Os estudantes demonstraram maior compreensão das operações com Matrizes ao relacioná-las às Transformações Geométricas no GeoGebra, indicando engajamento, autonomia e aprendizagem significativa, com diferença estatisticamente significativa entre pré e pós-teste ($p = 0{,}002$). **Conclusões:** O uso articulado do GeoGebra e da Computação Gráfica potencializa o ensino de Matrizes, favorece a visualização conceitual, promove aprendizagens significativas e indica caminhos promissores para integrar tecnologia e Matemática no Ensino Médio.

Palavras-chave: Transformações Geométricas; Matrizes; GeoGebra; Computação Gráfica; Aprendizagem Significativa.

From the Virtual to the Conceptual: The Use of Computer Graphics in Learning Matrices

ABSTRACT

Context: The growing presence of computer graphics in everyday life highlights the need to articulate school mathematical concepts with real technological applications, especially in High School, where contents such as Geometric

Corresponding author: Luana Pereira Villa Real. Email: luvillareal93@gmail.com

Transformations and Matrices are little explored in significant situations. **Objectives:** To investigate how the concepts of Geometric Transformations used in Computer Graphics contribute to the learning of operations with Matrices and to analyze the students' understanding of using digital resources. **Design:** Qualitative study of an applied nature, structured in a Learning Unit based on the Theory of Meaningful Learning and the Three Pedagogical Moments. **Environment and participants:** The research was developed with 30 students from the 3rd year of high school in a public school in Santo Ângelo/RS, distributed in two classes, who fully participated in the activities. **Data collection and analysis:** Pre- and post-test questionnaires, written records, field diary, productions in the GeoGebra software and statistical analysis (McNemar's test) were used to verify conceptual advances. **Results:** The students demonstrated a greater understanding of the operations with Matrices when relating them to the Geometric Transformations in GeoGebra, indicating engagement, autonomy and significant learning, with a statistically significant difference between pre and post-test ($p = 0.002$). **Conclusions:** The articulated use of GeoGebra and Computer Graphics enhances the teaching of Matrices, favors conceptual visualization, promotes meaningful learning and indicates promising ways to integrate technology and Mathematics in High School.

Keywords: Geometric Transformations; Arrays; GeoGebra; Computer Graphics; Meaningful Learning.

INTRODUÇÃO

Atualmente, nos deparamos em todos os lugares com imagens digitais, elas já fazem parte do nosso cotidiano e são encontradas em boa parte das rotinas que desenvolvemos em nosso dia a dia. Inúmeros são os lugares em que as imagens digitais são facilmente encontradas, por exemplo, na televisão, no cinema, no celular, nos jogos eletrônicos, nos sites da internet, entre outros. Porém antes dessas imagens serem visualizadas por nós, existe todo um processo de criação e é exatamente nesse momento que encontramos a função da Computação Gráfica. Como suporte teórico da Computação Gráfica, utilizam-se conceitos de Matemática como Matrizes e suas operações e Transformações Geométricas.

Dante (2013) explica que as imagens são na verdade formadas por pequenos pontos, elementos de uma Matriz. Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala da imagem, na verdade está mudando a posição dos pontos que formam a imagem. Isso tudo é feito por operações com Matrizes e na Computação Gráfica é o que se chama de Transformações Geométricas.

Porém, muitos Livros Didáticos (LD) do Ensino Médio não abordam esse conteúdo de Transformações Geométricas; outros, no entanto, abordam o conceito, mas não apresentam a sua aplicabilidade. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006), indicam que o estudo de Transformações Geométricas no plano é mais uma oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos de forma complementar no estudo algébrico e geométrico. Portanto, as Transformações Geométricas podem ser representadas algebricamente na forma de operações com Matrizes.

A escolha do tema fundamentou-se no fato de que os conteúdos de Transformações Geométricas nem sempre são abordados em aulas de Matemática no Ensino Médio, apesar de ser um tema de grande importância em inúmeras áreas do conhecimento como na Medicina, na Arquitetura, na Construção civil, entre outras, assim como possíveis áreas do conhecimento de muitos estudantes após a conclusão do Ensino Médio.

De um modo geral os conceitos de Matemática, estudados no Ensino Médio, são ensinados com base nos Livros Didáticos que priorizam o desenvolvimento algébrico dos conceitos. Entretanto, alguns professores baseiam-se na contextualização e aplicação dos conceitos para ensiná-los. No caso deste trabalho interessa-nos verificar como os conceitos de Transformações Geométricas, usados na Computação Gráfica, podem contribuir para a aprendizagem de operações com Matrizes?

O objetivo geral deste trabalho foi analisar as contribuições dos conceitos de Transformações Geométricas, utilizados na Computação Gráfica, para a aprendizagem de operações com Matrizes. A fim de atingir o objetivo de pesquisa e responder o problema foi desenvolvido uma Unidade de Aprendizagem (UA), estruturada de acordo com a metodologia dos Três Momentos Pedagógicos (TMP) (Delizoicov; Angotti & Pernambuco, 2011), cujas atividades propostas fizeram uso do *software* GeoGebra.

Os conceitos que embasam o trabalho, a metodologia utilizada e os resultados obtidos são apresentados a seguir.

O ENSINO DE MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC)

Os estudantes costumam apresentar dificuldades na aprendizagem dos conceitos estudados nas áreas de Ciências da Natureza e Matemática, de acordo com os índices do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), acerca dos resultados da aprendizagem de Matemática no Brasil. Os índices apresentados neste programa indicam que a área da Matemática tem maior índice de reprovação do que outras áreas. Essas dificuldades de aprendizagem podem ser percebidas na dificuldade de resolução dos problemas propostos, na pobreza conceitual, na falta de contextualização e na incapacidade de aplicar os conceitos estudados em situações do cotidiano (Fiolhais & Trindade, 2003, p.259). Fazer com que os estudantes compreendam a estrutura e/ou o processo implícito nas leis/fenômenos do cotidiano e possam gerar uma aprendizagem significativa necessita trabalhar com seu significado. Além disso, torná-lo crítico e fascinado pelos fenômenos e técnicas do seu cotidiano de maneira que possam intervir nele é uma das tendências do ensino na atualidade juntamente o uso das TIC (Robótica, Realidade aumentada, Jogos digitais, Pesquisa e interação na Web, ensino on-line, entre outros).

Uma das possibilidades de mudar esses resultados seria modificar as atividades de aprendizagem de Matemática e torná-las mais dinâmicas, para que possam despertar nos estudantes maior autonomia e protagonismo pelo seu estudo, uma vez que a Matemática está presente no nosso cotidiano.

Além disso, na atualidade, a realidade da maioria dos estudantes do Ensino Médio é a imersão na tecnologia digital. Ela está presente em toda a parte: na rua, nas escolas, nos clubes, nos bares, nos restaurantes, etc. Os estudantes têm acesso a ela por meio dos laboratórios de informática das escolas, computadores pessoais e tecnologias móveis como celulares e *tablets*.

Na sociedade contemporânea, com o advento dos computadores pessoais e pela rápida mudança nas tecnologias e nos meios de comunicação, o conhecimento base, na generalidade das áreas, rapidamente se expande e altera-se. Com isso, torna-se imprescindível preparar os estudantes para lidar com a proliferação e explosão das informações e outras rápidas mudanças tecnológicas e para adaptar-se aos diferentes campos profissionais. Além disso, o mercado de trabalho precisa de pessoas que sejam capazes de pesquisar, questionar, que saibam realizar suas tarefas com competência, que tenham iniciativa e sejam capazes de solucionar problemas. Tais habilidades necessitam que as pessoas tenham desenvolvido e façam uso de capacidades de pensamento crítico (Halpern, 1999, p.69). Tais capacidades permitem ao indivíduo resolver problemas e tomar decisões racionais (Halpern, 1999, p.69).

Por outro lado, as TIC surgem no século XX como recursos de inovação na Educação formal e informal. Essas, possibilitam integrar multimídias, móveis e fixas, capazes de atender aos propósitos educacionais da contemporaneidade, que pressupõem fluidez, interatividade e acessibilidade ao conhecimento, no âmbito proposto e as especificidades do ensino da área das Ciências e Matemática. De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) gerais para a Educação Básica, em seu capítulo I (no item VII), determina que as formas para organização curricular – assegurem o:

> Estímulo à criação de métodos didático-pedagógicos utilizando-se recursos tecnológicos de informação e comunicação, a serem inseridos no cotidiano escolar, a fim de superar a distância entre estudantes que aprendem a receber informação com rapidez utilizando a linguagem digital e professores que dela ainda não se apropriaram. (Brasil, 2010, p.18).

De acordo com os PCN, as TIC englobam "[...] os diferentes meios de comunicação (jornalismo impresso, rádio e televisão), os livros, computadores etc." (Brasil, 1998, p. 135), e tem por finalidade a aquisição, o armazenamento, o processamento e a distribuição da informação por meios eletrônicos e digitais, como rádio, televisão, telefone e computadores, entre outros surgem no século XX como recursos de inovação na educação formal e informal. Essas possibilitam integrar multimídias, móveis e fixas, capazes de atender aos propósitos educacionais da contemporaneidade, que pressupõem fluidez, interatividade e acessibilidade ao conhecimento.

Deve-se ter claro, no entanto, que a utilização desses instrumentos tecnológicos visa despertar a curiosidade e o interesse no tema específico. Buscam o aprimoramento da aprendizagem e a utilização adequada dos meios tecnológicos disponíveis. Procuram, também, tornar o estudante um participante ativo na construção do conhecimento.

As formas de aprendizagem tradicionais perdem espaço e sentido em um contexto de inovações e transformações permanentes e, assim, torna-se indispensável a apropriação das TIC, contextualizadas ao âmbito escolar de maneira a explorar as potencialidades das diversas ferramentas atualmente disponíveis, como: *softwares*, *blogs, webquests, wikis,* comunidades virtuais, mapas conceituais, bibliotecas virtuais, redes sociais e ambientes virtuais de aprendizagem (AVA), como opções possível para a o ensino e a aprendizagem de estudantes da Educação básica, utilizada simultaneamente com contextos presenciais.

Quando focamos na ideia de "práticas pedagógicas inovadoras" estamos pensando na aula interativa, passando por questões que dizem respeito: à programação do tempo de aula; às atividades utilizadas em aula, despertando o interesse dos estudantes para o estudo e a pesquisa; à estruturação da aula com o olhar para os resultados de aprendizagem e, preferencialmente, para a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de talentos para as áreas do conhecimento de Ciências e Matemática.

USO DE *SOFTWARES* NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Atualmente, os materiais digitais, como os *softwares* educativos, são considerados como recursos auxiliares nas diversas áreas de ensino. Devido ao avanço tecnológico, os estudantes estão cada vez mais conectados e utilizando diversos recursos digitais. Dessa forma, para despertar o interesse dos educandos pelos estudos e facilitar a aprendizagem, os professores têm escolhido *softwares* educativos para auxiliar em suas atividades e potencializar a aprendizagem dos conceitos ensinados. Os PCN afirmam que "o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de *softwares*, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo" (Brasil, 1998, p.44).

Entre tantos *softwares* educativos para o ensino de Matemática, o *software* GeoGebra (http://www.geogebra.org/) é o que a maioria dos professores utiliza, pois é de fácil navegação e instalação, além de ser gratuito. De acordo com Brandt & Montorfano (2007), o *software* GeoGebra é um instrumento alternativo na prática pedagógica e pode conferir maior precisão e rapidez em determinadas ações. Esse recurso tecnológico deve levar os estudantes a compreenderem suas construções geométricas assegurando-lhes os conhecimentos já adquiridos em sala de aula e a promover novas descobertas.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aponta a importância de utilizar conceitos de Transformação Geométrica para "analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras. "(Brasil, 2016, p. 101). Este documento indica ainda que a aprendizagem sobre este tema é importante para "interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras". (Brasil, 2016, p.93). Outro destaque da BNCC para o tema Transformações Geométricas é que:

> Movimento e posição estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados. O uso de mapas, GPS e de outros recursos implica a observação e estudo desse par de ideias. Atividades investigativas com *softwares* dinâmicos que inter-

> relacionem movimento e posição podem também promover o desenvolvimento dessas ideias, importantes em cartografia e na movimentação diária do cidadão comum. Por vivermos em um mundo conectado com celulares às mãos, aparelhos de geolocalização, TVs a cabo, câmeras de vigilância etc., o estudo do movimento e posição tem muitas finalidades em diversas áreas (Brasil, 2016, p. 97).

Diante disso, a aprendizagem sobre os conceitos de Transformações Geométricas mostra-se relevante. De posse desse conhecimento os estudantes podem ainda alterar a posição ou o tamanho de uma figura geométrica original, formar outra figura geometricamente igual ou equivalente, entre outros.

Historicamente, a representação de conjuntos de números em forma de matrizes apareceu no século XIX, embora os chineses já resolvessem alguns tipos de problemas de cálculos efetuados sobre uma tabela, por volta de 2500 a.C. (Dante, 2013). Em 1850, o matemático inglês Arthur Cayley (1821 – 1895), um dos pioneiros no estudo desses cálculos, passou a divulgar o nome "Matriz", iniciando demonstrações de suas aplicações (Moura, 2014). Arthur Cayley desenvolveu um trabalho sobre a relação entre Transformações Geométricas e Matrizes, quando tentou verificar se a lei da propriedade comutativa da operação de multiplicação era válida sempre, ou seja, se seria possível existir uma Álgebra na qual $a \cdot b$ fosse diferente de $b \cdot a$. Arthur Cayley encontrou na Álgebra das Matrizes uma possível resposta para seu questionamento.

O surgimento das Matrizes está ligado às transformações do tipo $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ onde a, b, c, d são números reais e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (x', y'). A transformação precedente fica completamente determinada pelo quatro coeficientes a, b, c, d ,de modo que ela pode ser simbolizada por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ao qual chamamos de matriz (quadrada, de ordem 2). A história da multiplicação entre Matrizes se deve à composição das Transformações Geométricas. Portanto, considerando as transformações, segundo Eves (2004) afirma que se na transformação $\begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$ pode-se mostrar, por meio da álgebra elementar, que o resultado é a transformação $\begin{cases} x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases}$. Isso leva a seguinte definição de produto de duas Matrizes: $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}$. Portanto, a definição de produto de Matrizes surgiu da composição de duas Transformações Geométricas.

Os PCN do 3º ciclo (Brasil, 1998, p. 65) apontam a importância da Transformação Geométrica para "resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução". E os do 4º ciclo (Brasil, 1998, p. 81) indicam que servem para "interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano".

Os PCN apontam também que as Transformações Geométricas são importantes para a sala de aula e principalmente na utilização de recursos didáticos e destacam que

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico" para este estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos etc. (Brasil, 1998, p. 124).

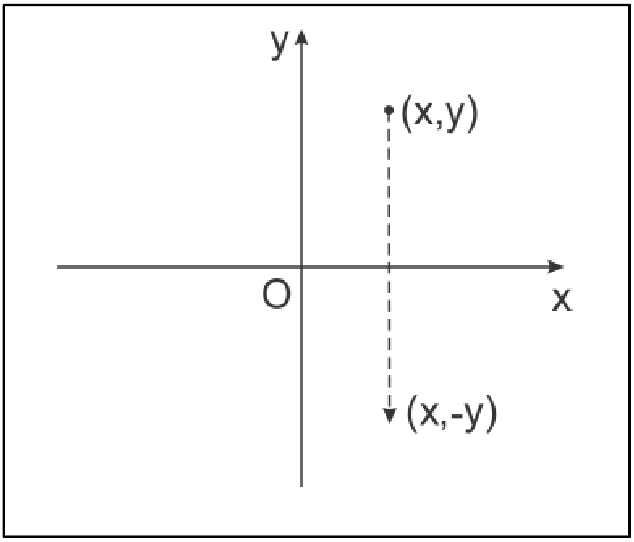
As Transformações Geométricas no plano abordadas nos livros didáticos do Ensino Médio são: **reflexão, escala, translação e rotação** e a utilização do recurso didático do *software* GeoGebra pode servir para desenvolver cada transformação e sua representação matricial. Neste trabalho as Transformações Geométricas cisalhamento e homotetia não foram abordadas. A seguir descrevemos a transformação geométrica do tipo reflexão. Os demais tipos de transformações geométricas foram construídos com os estudantes de forma análoga a essa.

TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA: REFLEXÃO

O texto a seguir teve por base os livros: Dante (2013)[1] e Gonçalves (2013)[2]. A transformação reflexão em torno de um eixo, ou espelhamento, aplicada a um objeto, produz um novo objeto que é como se o objeto anterior fosse visto reproduzido por um espelho, posicionando no eixo em torno do qual se faz o espelhamento. No caso de uma reflexão 2D (2 Dimensões), o espelho pode ser considerado sobre o eixo vertical ou horizontal.<u>Reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$:</u> A transformação $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ dada por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})$ é denominada de reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ (Figrua 12). Na forma Matricial, tem-se que: $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{y} \end{pmatrix}$. Neste caso, diz-se que a Matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M_1}$ representa a transformação reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ (Figura 1).

Figura 1

Transformação reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ *(Gonçalves, 2013).*



---

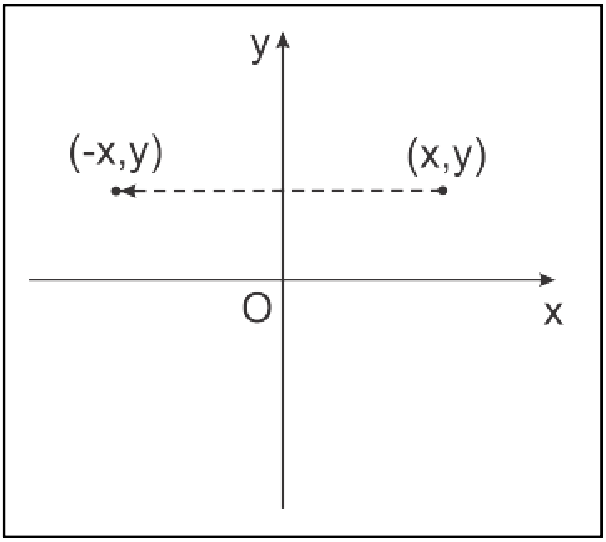
[1] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[2] GONÇALVES, Haniel Soares. **A importância das matrizes e transformações lineares na computação gráfica.** 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Reflexão em relação ao eixo y: A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-x, y)$ é denominada de reflexão em relação ao eixo y (Figura 13). Na forma Matricial, tem-se que: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Neste caso, diz-se que a Matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_2$ representa a transformação reflexão em relação ao eixo y (Figura 2).

Figura 2

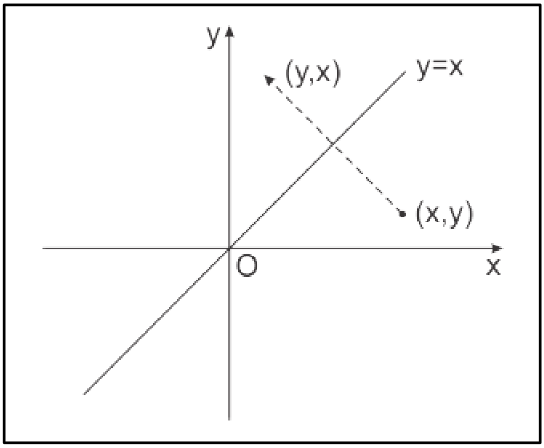
Transformação reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$ *(Gonçalves, 2013)*



Reflexão em relação à reta $y = x$: A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$ é denominada de reflexão em torno da reta $y = x$ (Figura 3). Na forma Matricial, tem-se que: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Neste caso, diz-se que a Matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_3$ representa a transformação reflexão em relação à reta $y = x$ (Figura 3).

Figura 3

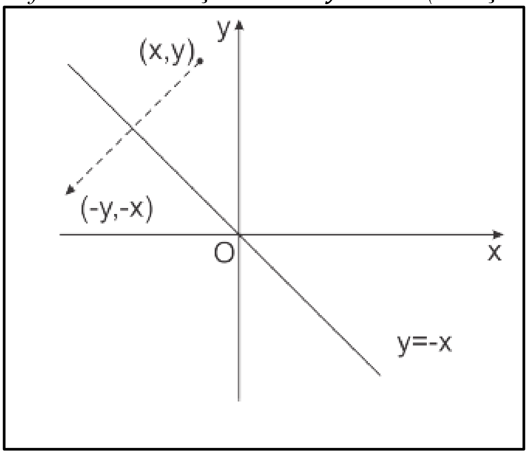
Reflexão em relação à reta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ (Gonçalves, 2013).



<u>Reflexão em relação da reta $y = -x$:</u> A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-y, -x)$ é denominada de reflexão em relação à reta $y = -x$ (Figura 4). Na forma Matricial, tem-se que: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$. Neste caso, diz-se que a Matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M_4$ representa a transformação reflexão em relação à reta $y = -x$ (Figura 4).

Figura 4

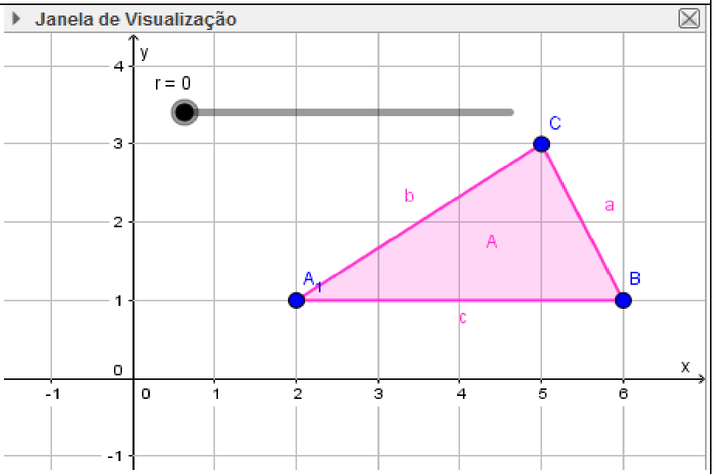
Reflexão em relação à reta $y = -x$ (Gonçalves, 2013)



Os quadros 1, 2, 3 e 4 (a seguir) apresentam algumas reflexões que fizemos utilizando o *software* GeoGebra e as representações Matriciais, para apresentá-las aos estudantes.

Quadro 1

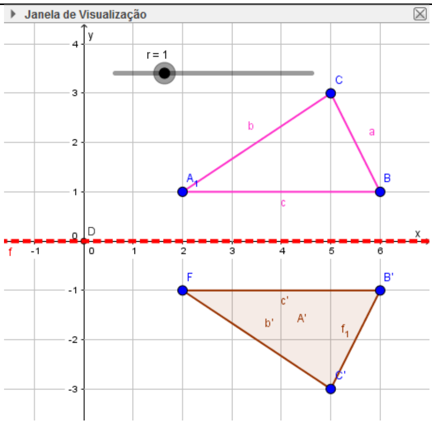
*Representação Geométrica e matricial do Triângulo **A** Construído pelas autoras e Dante (2013)*

Triângulo $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{r=0}$)	
Imagem desenvolvida no *software* GeoGebra	
Representação Matricial	Vértices da figura A: $A_1 = (2,1)$; $B = (6,1)$; $C = (5,3)$ A Matriz associada aos vértices dessa figura é: $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Os pontos (x, y), que compõem os vértices das figuras geométricas, foram expressas nas linhas e colunas das matrizes. O Quadro 2 representa geometricamente a reflexão do triângulo A em relação ao eixo x que obteve o triângulo A', desenvolvido no *software* GeoGebra.

Quadro 2

Representação Geométrica da reflexão do triângulo $\boldsymbol{A}$ *em relação ao eixo* $\boldsymbol{x}$
Construído pelas autoras e Dante (2013)

<table>
<tr><th colspan="2">Reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1})$</th></tr>
<tr><td>Imagem desenvolvida no software GeoGebra</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Representação Matricial</td><td>Vértices da figura A: $A_1 = (2,1);\ B = (6,1);\ C = (5,3)$

Vértices da figura A': $F = (2,-1); B' = (6,-1);\ C = (5,-3)$

A Matriz associada aos vértices das figuras:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
A reflexão que leva A em A' é indicada por:

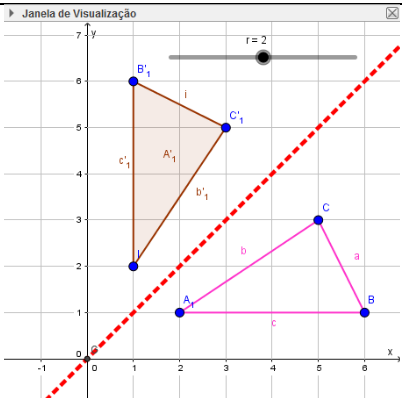
$$A \to A', \text{ ou seja, } A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
Observe que a reflexão é em relação ao eixo x. Obtém-se a matriz de A' multiplicando a matriz de A pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

O Quadro 3 representa geometricamente a reflexão do triângulo A em relação à reta $y = x$ que obteve o triângulo A'_1, desenvolvido no *software* GeoGebra.

Quadro 3

Representação Geométrica da Reflexão do triângulo $\boldsymbol{A}$ *em relação à reta* $\boldsymbol{y = x}$

	Reflexão em relação à reta $\boldsymbol{y = x}$ $(\boldsymbol{r = 2})$
Imagem desenvolvida no *software* GeoGebra	

No Quadro 4, a representação matricial da reflexão do triângulo A em relação à reta $y = x$ que obteve o triângulo A'_1 está representada.

Quadro 4

Representação Matricial da reflexão do triângulo $\boldsymbol{A}$ *em relação à reta* $\boldsymbol{y = x}$ *DANTE (2013)*

Representação Matricial	Vértices da figura A: $A_1 = (2,1)$; $B = (6,1)$; $C = (5,3)$ Vértices da figura A'_1: $I = (1,2)$; $B'_1 = (1,6)$; $C'_1 = (3,5)$ A Matriz associada aos vértices das figuras: $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

	A reflexão que leva A em A'_1 é indicada por: $$A \rightarrow A'_1, \text{ ou seja, } A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$ $$\rightarrow A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$ Observe que a reflexão é em relação a uma reta. Obtém-se a matriz de A'_1 multiplicando a matriz de A pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou seja: $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Analogamente, as demais formas de representação geométrica em relação aos eixos x e y e as retas $y = x$ e $y = -x$ foram desenvolvidas no *software* GeoGebra e sua correspondente representação matricial. Como exemplo de transformação geométrica, a reflexão dos demais tipos: escala, translação e rotação, também foram trabalhadas. O tutorial com todas as transformações geométricas desenvolvidas nessa pesquisa pode ser encontrado no endereço: http://www.ufn.edu.br/site/ensino/mestrado/programa-de-posgraduacao-em-ensino-de-ciencias-e-matematica/producoes/.

COMPUTAÇÃO GRÁFICA

A Computação Gráfica é uma área da Ciência da Computação, que estuda e desenvolve técnicas e algoritmos para a geração de imagens digitais através do computador. De acordo com Dante (2013) o monitor de computador funciona como uma Matriz (tabela) com informações (pontos coloridos mostrados na tela, os *pixels*) armazenadas em linhas e colunas.

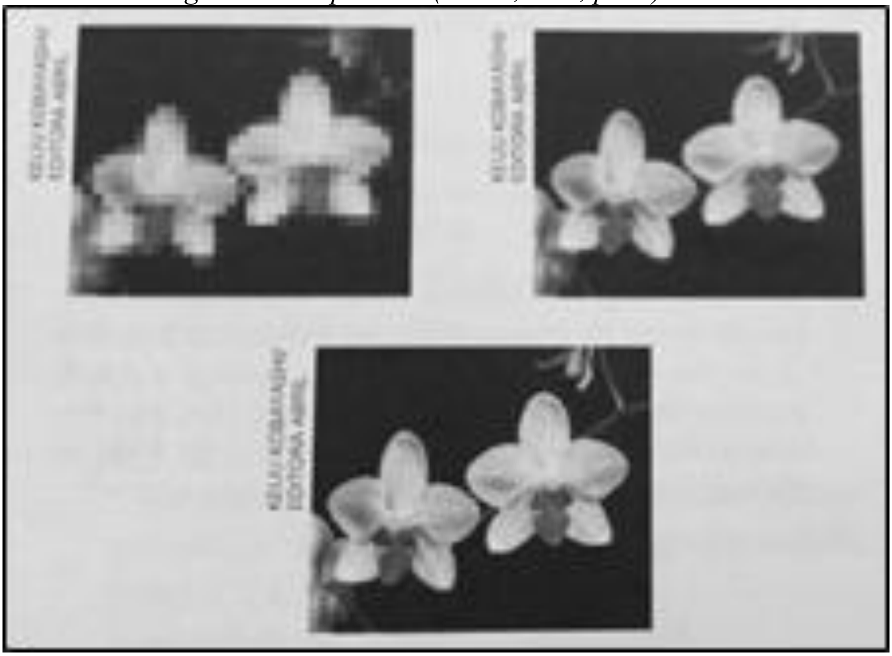
Gomes & Velho (1998, p. 1) definem que a Computação Gráfica é "um conjunto de métodos e técnicas para transformar dados em imagem através de um dispositivo gráfico". Nos dias atuais, a Computação Gráfica está presente em quase todas as áreas do conhecimento humano, desde o desenvolvimento de um projeto de novo modelo de automóvel até o desenvolvimento de jogos eletrônicos.

Na abordagem sobre Computação Gráfica os Livros Didáticos apresentam diversas imagens digitais de um mesmo objeto. Seu objetivo é mostrar que o encontro de uma linha com uma coluna, na tela, forma um nó, chamado de *pixel*[3]. Quanto maior o número de *pixels*, maior será a resolução da tela e a nitidez das imagens.

Nas Figuras 5 e 6, são apresentadas as mesmas imagens, porém com resoluções (nº *pixels*) diferentes. Nessas figuras, podem ser vistas imagens bem definidas (alta resolução) ou distorcidas (baixa resolução) (Figura 5). A resolução depende do número de *pixels*, isto é, quanto maior o número de linhas e colunas de uma imagem digital, maior será a quantidade de *pixels* e maior sua resolução e vice-versa. Na Figura 6, a primeira imagem tem 27 linhas e 33 colunas, enquanto a terceira imagem tem 1645 linhas e 2008 colunas, em conformidade com os estudos de (Dante, 2005).

Figura 5

Nitidez das imagens no computador (Dante,2013, p. 73)

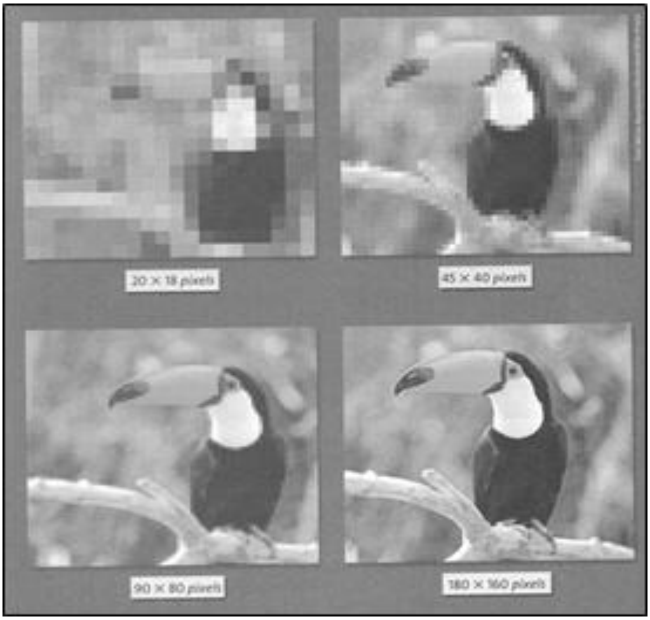


[3]Pixel - Um *pixel* é o menor ponto e o conjunto de milhares de *pixels* forma uma imagem digital.

Figura 6

Três diferentes resoluções

Fonte: Dante (2005, p. 240).



A imagem em uma tela de computador, segundo Dante (2013), é uma resolução de 800 x 600 tem 800 x 600 = 480000 *pixels* distribuídos em 800 colunas e 600 linhas. Quando um programa de gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala da imagem, está mudando a posição de *pixels* que a formam. Isso tudo é feito por operações de Matrizes; é o que se chama de Transformações Geométricas. Portanto, as imagens digitais criadas em computadores são obtidas por representações numéricas e transformadas através de operações de Matrizes, projetadas no monitor do computador.

UNIDADE DE APRENDIZAGEM (UA) SOBRE MATRIZES

Para estudar o assunto Transformações Geométricas, foi organizado um conjunto de atividades de ensino e aprendizagem com o uso do *software* GeoGebra. A escolha das atividades foi embasada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), de Ausubel (2003), e foram organizadas de acordo com a metodologia dos Três Momentos Pedagógicos (TMP), de Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2011).

A Aprendizagem Significativa, em concordância com Ausubel (2003), é um processo de interação entre o conhecimento novo e o prévio, ou seja, um processo por meio do qual a nova informação relaciona-se com aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, isto é, envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual se define como conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva do indivíduo (Moreira, 1999b). Segundo Ausubel, o armazenamento das informações no cérebro humano é um processo "altamente organizado, formando uma espécie de hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados a (e assimilados por) conceitos, a ideias, a proposições, mais gerais e inclusivos" (Moreira, 1999a, p. 13).

À medida que o conhecimento é desenvolvido e assimilado, na estrutura cognitiva do aprendiz, os subsunçores se alteram. A simples memorização de fórmulas e conceitos, por exemplo, é um tipo de aprendizagem em que novas informações são armazenadas de maneira arbitrária, não interagindo com as já existentes na estrutura cognitiva do estudante e pouco ou nada contribuindo para a elaboração e diferenciação conceitual (Moreira, 1999a), mas também pode modificar os subsunçores.

Essas alterações na estrutura cognitiva podem ocorrer de dois modos: por meio da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integradora. A Diferenciação Progressiva consiste no processo de atribuição de novos significados por meio da sucessiva utilização dos subsunçores já existentes, enquanto a Reconciliação Integradora, baseia-se em eliminar as diferenças aparentes e integrar os novos conhecimentos aos subsunçores existentes, além de gerar novos significados (Moreira, 2012).

A fim de que ocorra a aprendizagem significativa e novos conhecimentos sejam gerados, o ensino deve ser abordado do mais geral para o mais específico, de maneira a promover a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integradora. O mais geral não significa que é o conhecimento em sua forma final (formal, abstrata e sofisticada), mas o conceito mais geral para o mais específico, como por exemplo, apresentar o conceito de matrizes (mais geral) para depois trabalhar com os conceitos de operações com matrizes (mais específico).

Diante desses aspectos, algumas pesquisas apontam que a metodologia dos TMP (Delizoicov, Angotti & Pernambuco, 2011) mostrou-se eficaz para o desenvolvimento da aprendizagem significativa (Bulegon, 2011; Schons, 2017), tendo em vista que na **PI,** apresentam-se questões ou situações reais que os estudantes conhecem e presenciam e que estão envolvidas nos temas, para que sejam desafiados a expor o que estão pensando sobre as situações. A finalidade desse momento é propiciar um distanciamento crítico do estudante, ao se defrontar com as interpretações das situações propostas para discussão, e elaborar os subsunçores acerca do tema estudado. A segunda etapa: **OC,** é o momento em que os conceitos, necessários para a compreensão dos temas e da problematização inicial são estudados. A terceira etapa, a **AC,** é o momento que se destina a analisar o conhecimento que vem sendo incorporado pelo estudante. De acordo com Bulegon (2011), em cada etapa podem ser elaboradas atividades de ensino com diversos tipos de materiais didáticos como: atividades experimentais, aulas expositivas e dialogadas, debate, leitura de texto, listas de exercícios, *softwares*, hipertexto, hipermídia, objetos de aprendizagem, entre outros.

O Quadro 5 apresenta a estrutura da Unidade de Aprendizagem (UA) elaborada, bem como os recursos, tema e objetivos desenvolvidos em cada etapa.

Quadro 5

UA sobre Matrizes

Metodologia	Data	Tema	Objetivo	Recurso
PI	Atividade 1 (50 min)	- Informática; - Computação Gráfica;	Verificar a concepções prévias.	Questionário.
	Atividade 2 (50 min)	- Matrizes; - Transformações Geométricas.	Verificar o conhecimento de Matrizes e Transformações Geométricas.	Teste.
OC	Atividade 3 (50 min)	- Matrizes.	Definir o conceito de Matrizes;	Quadro branco; Canetão; Xerox; Apresentação em Slides.
	Atividade 4 10 períodos (50 min cada período)	- Transformações Geométricas. - *Software* GeoGebra;	Definir o conceito de Transformações Geométricas; Explicar o *software* GeoGebra; Demonstrar com o *software*	*Software* GeoGebra.

			GeoGebra a Transformações Geométricas.	
	Atividade 5 (50 min)	- Computação Gráfica.	Definir o conceito de Computação Gráfica.	Pesquisa.
AC	Atividade 6 (50 min)	- Transformações Geométricas; - Computação Gráfica; - *Software* GeoGebra.	Verificar sua compreensão quanto aos conceitos trabalhados nas atividades de ensino e as contribuições do *software* GeoGebra e das operações com Matrizes para resolução desses conceitos.	Questionário.
	Atividade 7 (50 min)	- Matrizes; -Transformações Geométricas; -Computação Gráfica.	Verificar a aprendizagem obtida após as atividades.	Teste.

Atividade 1: A primeira atividade foi realizada por meio de um questionário pré-teste, composto por 13 questões, sobre os temas de Informática e Computação Gráfica, para verificar se os estudantes têm um conhecimento prévio referente a esses temas.

Atividade 2: A segunda atividade foi realizada por meio de um pré-teste, composto por 8 questões sobre o conteúdo de Matrizes e Transformações Geométricas, para verificar o que os estudantes conhecem sobre esses conceitos. Para a realização desse teste, os educandos utilizaram lápis, caneta e papel.

Atividade 3: A terceira atividade foi realizada por meio de quadro branco, canetão, xerox. Apresentou-se o contexto histórico do surgimento das matrizes, a partir de slides; o conceito e tipos de matrizes, bem como as operações com Matrizes, no quadro branco.

Atividade 4: A quarta atividade começou com a definição do conceito de Transformações Geométricas, por meio do *software* GeoGebra. Em um primeiro momento, foi explicado sobre o funcionamento do GeoGebra, suas ferramentas e aplicabilidades.

Em seguida, construímos as Transformações Geométricas dentro do *software* supracitado, utilizando de figuras planas, como o triângulo e o quadrado, relacionando os pontos dos vértices dessas figuras às Matrizes. Depois disso, substituímos os triângulos e quadrados por figuras quaisquer, delimitando seu tamanho aos pontos marcados nas figuras anteriores e representamos em suas respectivas Matrizes. Assim sendo, os estudantes iniciaram a manipulação no GeoGebra, construindo as Transformações Geométricas e as Matrizes correspondentes. Essa atividade foi produzida no eXe Learning[4], que está disponível no site da UFN[5].

Atividade 5: Na quinta atividade os estudantes pesquisaram na WEB, no laboratório de informática da escola, o que é Computação Gráfica e como os conceitos de Matrizes e Transformações Geométricas podem ser identificados nessa temática.

Atividade 6: A sexta atividade foi realizada por meio do questionário pós-teste, composto por 8 questões, sobre o conceito de Transformações Geométricas, Computação Gráfica e *software* GeoGebra. Para a realização desse pós-teste, os educandos utilizaram lápis, caneta e papel, bem como utilizaram no pré-teste.

Atividade 7: A sétima atividade foi realizada por meio de um teste, composto por 8 questões, sobre todos os conteúdos trabalhados na UA sobre Matrizes.

---

[4] eXe Learning – É uma ferramenta de código aberto e com acesso gratuito.
Disponível para download nas versões dos sistemas operacionais Windows, Linux e Macintosh no endereço eletrônico: http://exelearning.org/. Os conteúdos produzidos com esta ferramenta podem ser exportados para vários formatos, entre eles o SCORM ou zip.
Além disso, cada unidade de aprendizagem criada com o eXe Learning pode ser salva no computador, gravada em alguma mídia e disponibilizada aos estudantes nos ambientes virtuais de aprendizagem.

[5] Disponível no site: http://www.ufn.edu.br/site/ensino/mestrado/programa-de-posgraduacao-em-ensino-de-ciencias-e-matematica/producoes/ (Ano 2017) - Luana Pereira Villa Real - Transformações geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos durante a aplicação das sete atividades de ensino e aprendizagem sobre Matrizes planejadas neste estudo, conforme descrito no Quadro 3. As atividades foram desenvolvidas com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Santo Ângelo/RS, no turno da manhã. A turma A contava com 19 estudantes e a turma B com 21, totalizando 40 participantes. No entanto, a amostra analisada foi composta por 30 estudantes, pois apenas estes concluíram integralmente todas as etapas e atividades previstas no experimento.

Os instrumentos utilizados na coleta dos dados foram os questionários e testes (antes e depois do desenvolvimento da UA), o diário da prática pedagógica, preenchido pela pesquisadora ao final de cada atividade, as respostas dos estudantes escritas em seus cadernos, recolhidas sempre no final de cada atividade, e o arquivo das atividades realizadas pelos estudantes no *software* GeoGebra, salvos sempre no final de cada atividade. Para preservar a identidade dos estudantes, eles foram identificados como E01 a E30.

A atividade 1 (questionário pré-teste), tinha o objetivo de verificar os conhecimentos prévios dos estudantes, referente ao tema de Informática e Computação Gráfica, uma vez que a segundo a Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS), o fator que mais influência na aprendizagem é o que o estudante já sabe. A partir da identificação do conhecimento dos estudantes, elaboramos atividades que estimulassem os conhecimentos já existentes ou criassem conhecimentos novos, nos estudantes.

Os resultados do questionário inicial (Pré-teste), mostram que os estudantes têm noções básicas de Informática, ou seja, manuseiam com ferramentas e *softwares*, mas usam a informática para navegação nas redes sociais e na WEB para pesquisas em geral. Quanto ao tema Computação Gráfica, os estudantes não tinham muito conhecimento.

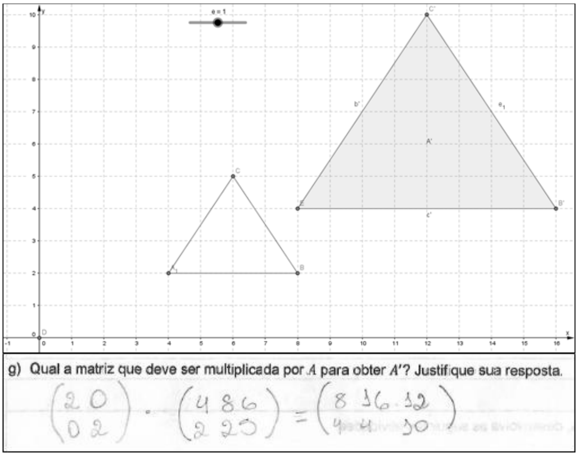
A atividade 3 trabalhou o conceito de Matrizes e suas operações. Este conceito foi explanado pela professora por meio de apresentação de slides, a partir do surgimento de Matrizes, sua definição e operações. No momento da realização de exercícios escritos, com a utilização dos materiais de consumo, lápis e papel, sobre esse tema, observou-se que os estudantes apresentaram dificuldades nas operações com Matrizes, pois eles questionaram com frequência como se resolvia a adição, subtração e multiplicação com Matrizes. Além disso, os estudantes tiveram dificuldades iniciais para compreender o conceito de Transformação Geométrica.

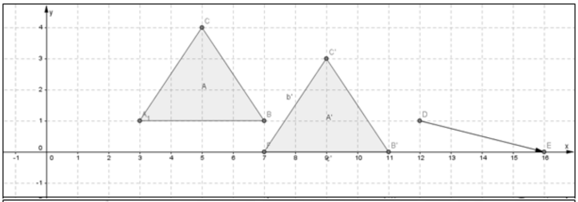
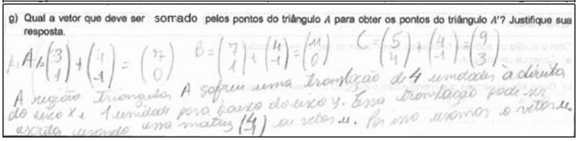
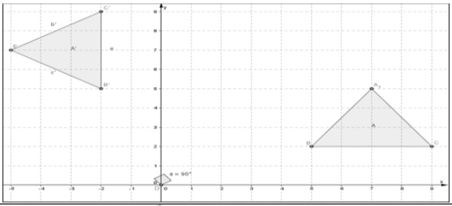
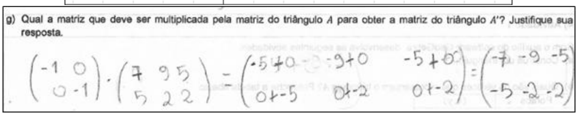
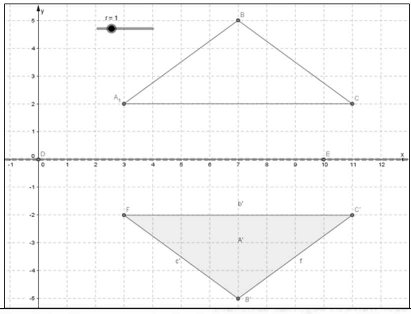
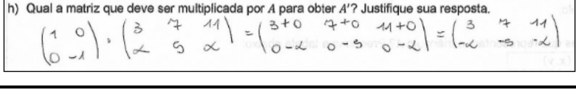
Neste sentido, os estudantes puderam testar as funcionalidades do *software* GeoGebra, construir e manipular as figuras planas (triângulo e quadrado) formadas, na atividade 4. A cada figura construída e manipulada, os estudantes escreviam Matrizes com os pontos dos vértices das mesmas. Nenhum estudante trocou a ordem da matriz, como a de 3x2 por 2x3.

Os educandos compreenderam que o número de colunas da matriz estava associado aos vértices de cada figura plana, por exemplo, o triângulo tem 3 vértices, então o número de colunas da matriz seria três. Temos como objetivo também, desenvolver a reflexão, escala, translação e rotação de figuras geométricas e identificar as operações com Matrizes. O Quadro 6, apresenta algumas demonstrações desenvolvidas pelos estudantes nesta atividade.

Quadro 6

Demonstração das atividades elaboradas pelos estudantes com o software GeoGebra

Escala - Ampliação


Translação

 g) Qual a vetor que deve ser somado pelos pontos do triângulo A para obter os pontos do triângulo A'? Justifique sua resposta. $A = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ A região Triangular A sofreu uma translação de 4 unidades à direita do eixo x e 1 unidade para baixo do eixo y. Essa translação pode ser escrita usando uma matriz $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ ou vetor u. Por isso usamos o vetor u.
Rotação

 g) Qual a matriz que deve ser multiplicada pela matriz do triângulo A para obter a matriz do triângulo A'? Justifique sua resposta. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7 & 9 & 5\\5 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5+0 & -9+0 & -5+0\\0+-5 & 0+-2 & 0+-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -9 & -5\\-5 & -2 & -2\end{pmatrix}$
Reflexão

 h) Qual a matriz que deve ser multiplicada por A para obter A'? Justifique sua resposta. $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 7 & 11\\2 & 5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+0 & 7+0 & 11+0\\0-2 & 0-5 & 0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 7 & 11\\-2 & -5 & -2\end{pmatrix}$

Na realização das atividades com o uso do *software* GeoGebra, verificou-se o engajamento, a motivação e a criatividade dos estudantes em utilizar o *software* e relacionar as imagens elaboradas com a construção de significados das Matrizes e suas operações. Comentaram ser positivo e interessante ter começado a construção do conhecimento de Transformações Geométricas pelas atividades com o *software*. Para eles, ter o contato com a imagem primeiro e depois com a identificação dos elementos que apontem o uso de operações com matrizes nas imagens tornou esse conhecimento significativo e permitiu compreender a relação das matrizes com os vértices das figuras e as inúmeras variações que as imagens podem obter no Plano. Percebeu-se em todas as atividades que alguns estudantes foram mais autônomos, mexendo nas ferramentas do *software* e foram realizando as construções com o auxílio do tutorial desenvolvido no GeoGebra, organizado no eXe Learning e disponível aos alunos. Outros, mais contidos, aguardavam a pesquisadora para realizar os passos das construções.

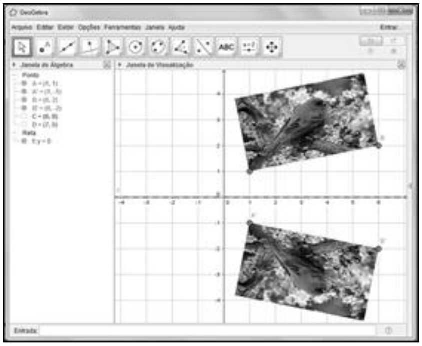
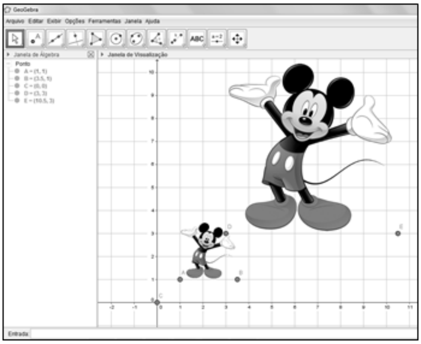
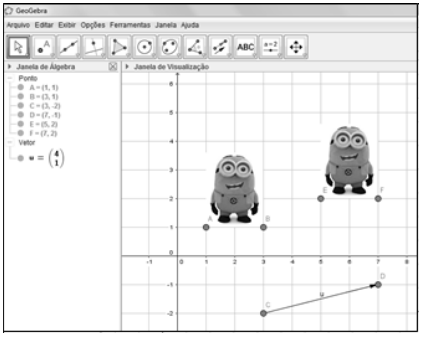
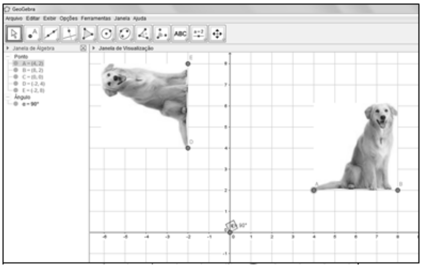
Diante desses resultados pode-se inferir que os estudantes têm facilidade de utilizar as ferramentas digitais, e essa adaptação auxilia na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Entretanto, observa-se que, muitas vezes, os educandos não utilizam as ferramentas digitais para o estudo e aprendizagem de Matemática em espaços extraclasse, se não recebem estímulos para tal.

Na atividade 5 os estudantes tinham que pesquisar na WEB sobre o conceito de Computação Gráfica. Posteriormente fez-se um debate sobre os achados a fim de enriquecer a pesquisa e desenvolver, nos estudantes, habilidades de análise, síntese e demonstrações de resultados. Segundo eles, foi a primeira vez que fizeram uma atividade de pesquisa na internet na escola e tiveram contato com um modo de fazer pesquisa na WEB. A partir do modo de fazer dessa atividade os estudantes puderam realizar outras pesquisas em espaços extraclasse, uma vez que a maioria deles tem acesso à internet em casa ou outros espaços fora da escola.

O Quadro 7 apresenta exemplos do uso do *software* GeoGebra no estudo das Transformações Geométricas que foram desenvolvidas pelos estudantes em sala de aula.

Quadro 7

Transformações Geométricas

Reflexão	Escala
	
Translação	Rotação
	

Nas atividades elaboradas pelos estudantes, foram utilizadas imagens diversas e associados pontos sobre elas no *software* GeoGebra. Ao mudar os pontos de lugar, os estudantes verificaram as Transformações Geométricas estudadas, além das Matrizes relacionadas a elas. Adiante, analisaram os pontos na "Janela de álgebra" e, em seus cadernos, elaboraram a matriz correspondente.

Como última atividade foi proposto aos estudantes que respondessem um questionário (atividade 6), para verificar sua compreensão quanto aos conceitos trabalhados em aula; as contribuições do *software* GeoGebra e das operações com Matrizes para resolução desses conceitos. Nas respostas percebe-se que os estudantes não tinham bem claro o conceito de Transformações Geométricas e com isso 94% dos estudantes responderam que "sim" o *software* GeoGebra facilitou a aprendizagem e justificaram "porque não sabia mexer no GeoGebra, e facilitou o aprendizado pois foi algo praticado e não só teórico", "porque assim fazendo e visualizando pessoalmente no computador é melhor para a aprendizagem do aluno" e "porque despertou mais meu interesse e é diferente do que fazemos em sala de aula".

E se o conceito de Transformação Geométrica contribui para a aprendizagem de operações com Matrizes, a maioria dos estudantes (94%) responderam "sim" e escreveram o porquê contribuiu na sua aprendizagem "porque no 2º ano aprendi apenas calcular as matrizes, e nas atividades propostas aprendi identificar o par ordenado de uma figura geométrica para depois construir a matriz e resolver as operações com matrizes, aprendi também o que era linha e coluna da matriz, a multiplicação e adição com matrizes", também escreveram "contribuiu sim, pois com as figuras consegui compreender melhor, como montar uma matriz e com a construção das transformações geométricas consegui aprender, com a matriz da figura original resolvendo as operações com matrizes dava o resultado da matriz da transformação geométrica". Diante desses relatos pode-se dizer que os conceitos de Transformação Geométrica contribuíram na aprendizagem de operações com Matrizes.

Para verificar os níveis de significância (p) das atividades desenvolvidas nessa UA, fez-se a análise dos resultados do pré-teste e do pós-teste, com o *software* SPSS a partir do teste estatístico de McNemar. Verificou-se que dos 30 estudantes que compõe o estudo, 26 tiveram resultados positivos, ou seja, aumentaram as notas no pós-teste, 3 tiveram resultados negativos e 1 não teve alteração. Devido ao valor-p[6] $= 0{,}002 < 0{,}05$, rejeitamos a hipótese nula e como consequência ocorreu uma diferença significativa quando analisados os resultados do pré-teste ($6{,}48 \pm 1{,}92$) e do pós-teste ($8{,}19 \pm 1{,}64$), o que nos permite concluir que os estudantes tiveram um avanço nos seus conhecimentos. Além disso, verificou-se que os estudantes tinham compreendido o conteúdo à medida em que figuras de revistas, jornais, sites etc., estavam sendo analisadas e identificavam qual o tipo de Transformação Geométrica tinha ocorrido.

---

[6] Quando o valor-p é superior ao nível de significância (normalmente 0,05) permite-nos aceitar a hipótese da normalidade da população.

Em síntese pode-se dizer que os estudantes tinham uma noção intuitiva de Matrizes, mas enfrentavam dificuldades na identificação e compreensão das Transformações Geométricas, como Reflexão, Escala, Translação e Rotação. Essa constatação orientou a construção das atividades didáticas acerca desse tema, que foram planejadas com base na TAS, atuando como organizadores prévios para facilitar a assimilação dos novos conceitos, a fim de que os estudantes conseguissem estabelecer relações entre seus conhecimentos prévios e os novos.

A utilização do *software* GeoGebra foi decisiva nesse processo, pois permitiu aos estudantes visualizarem concretamente os efeitos das operações matriciais sobre figuras geométricas, promovendo conexões entre os conhecimentos prévios e os novos saberes. Os resultados indicam que os estudantes desenvolveram uma aprendizagem significativa, demonstrando maior autonomia, engajamento e compreensão dos conteúdos abordados. Essa experiência reforça o potencial das tecnologias digitais e das metodologias críticas como ferramentas eficazes para o ensino de Matemática no Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, o objetivo principal foi analisar as contribuições dos conceitos de Transformações Geométricas, utilizadas na Computação Gráfica, para a aprendizagem de operações com Matrizes.

Esse tema foi escolhido, pois o estudo de Transformações Geométricas evidencia os conceitos de Matrizes, suas operações e a aplicabilidade destes em diversas áreas do conhecimento: na Medicina, na Arquitetura, na Construção civil e em diversas outras áreas, como na Computação Gráfica, tema presente no cotidiano dos estudantes da Educação Básica. Esse fato contribui para o desenvolvimento da aprendizagem significativa.

A análise das respostas dos estudantes no pré-teste possibilitou-se verificar que eles têm uma noção intuitiva de Matrizes e dos tipos de Transformações Geométricas, mas tinham dificuldades de identificá-las quando apresentadas em conjunto, primeira condição para ocorrência da aprendizagem significativa, segundo Ausubel: o aprendiz deve possuir os conceitos subsunçores necessários para as novas aprendizagens.

O modo como as atividades foram propostas na UA sobre Matrizes e o GeoGebra, enquanto recurso tecnológico utilizado para explorar as Transformações Geométricas e facilitar a visualização de conceitos e propriedades de Matrizes, mostraram-se potencialmente significativo, pois permitiu aos estudantes serem ativos no processo de aprendizagem e, por consequência, protagonistas de seu conhecimento. Além disso, o *software* GeoGebra permitiu aos estudantes a confecção das imagens e a exploração dos movimentos delas, o que contribuiu para potencializar a aprendizagem e a distinção entre os tipos de Transformações Geométricas. Isso vem ao encontro da segunda condição para ocorrência da aprendizagem significativa: o material a ser utilizado para o ensino deve ser potencialmente significativo e relacionável à estrutura de conhecimento do aprendiz de forma não-arbitrária e não-literal.

Para que a terceira condição da TAS ocorra, o aprendiz precisa estar predisposto a aprender, ou seja, a relacionar o novo material de forma não arbitrária, mas substancial a sua estrutura cognitiva. Ao longo do desenvolvimento das atividades com o uso do *software* GeoGebra percebeu-se que os estudantes demonstraram disposição, autonomia e uma grande vontade de aprender os conceitos de Matrizes e suas operações, pois encontravam significado no que estavam fazendo, além de perceber a aplicação do tema Transformações Geométricas em algo que é do seu cotidiano como a Computação Gráfica.

Pôde-se perceber que os estudantes gostaram de trabalharem com o *software* GeoGebra, pois ele proporcionou uma visualização dinâmica das Transformações Geométricas e da identificação de cada vértice para a construção das Matrizes. Isso potencializou aspectos da diferenciação progressiva e reconciliação integradora acerca dos conceitos envolvidos nessa temática.

A pesquisa realizada demonstrou que a utilização dos conceitos de Transformações Geométricas, especialmente aqueles presentes na Computação Gráfica, constitui uma estratégia eficaz para promover a aprendizagem significativa das operações com Matrizes no contexto da Educação Básica. Ao articular conteúdos matemáticos abstratos com aplicações concretas e tecnológicas, o estudo contribui para tornar o ensino mais atrativo, contextualizado e alinhado às demandas contemporâneas da formação escolar.

A adoção do *software* GeoGebra como recurso didático revelou-se inovadora, pois possibilitou aos estudantes uma experiência de aprendizagem dinâmica, interativa e visual. Essa abordagem rompe com o modelo tradicional de ensino expositivo e favorece o protagonismo estudantil, permitindo que os alunos construam e manipulem representações gráficas, explorem movimentos e identifiquem relações matemáticas de forma ativa. Tais práticas potencializam a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora dos conceitos, conforme preconizado pela TAS, de Ausubel.

Além disso, observou-se que os estudantes demonstraram autonomia, interesse e predisposição para aprender, o que reforça a importância de se considerar o engajamento e a motivação como elementos centrais no processo de ensino e aprendizagem. O uso de TIC, como o GeoGebra, mostrou-se um catalisador para esse envolvimento, ao permitir que os estudantes conectem os conhecimentos escolares com situações reais e significativas, como aquelas presentes na Computação Gráfica.

Diante dos resultados obtidos, espera-se que esta pesquisa possa inspirar professores e educadores a explorar abordagens interdisciplinares e tecnológicas no ensino da Matemática, promovendo práticas pedagógicas mais significativas, inclusivas e conectadas à realidade dos estudantes. A integração entre teoria, prática e tecnologia representa um caminho promissor para o fortalecimento da aprendizagem e para a formação de sujeitos críticos, criativos e preparados para os desafios do século XXI.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

A investigação aqui apresentada foi desenvolvida pela primeira autora, sob a orientação da segunda autora. A primeira autora desenvolveu a pesquisa (do estudo, coleta e análise dos dados) e a segunda autora realizou a revisão e orientação de todo o processo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que sustentam o desenvolvimento empírico desta pesquisa estão armazenados junto às pesquisadoras, respeitando princípios éticos.

APROVAÇÃO POR UM CONSELHO DE ÉTICA

Essa pesquisa não foi submetida ao Comitê de Ética, pois foi realizada junto aos estudantes na qual a primeira autora era docente e a coleta de dados foi realizada no ano do lançamento da Resolução Nº510/16 do Conselho Nacional de Ética em Pesquisa (CONEPE).

REFERÊNCIAS

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva*. Platano Edições Técnicas.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. MEC/SEF.

Brasil. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. (2006). Orientações curriculares para o ensino médio. Brasília: MEC/SEB.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. (2010). Resolução nº 4, de 13 de julho de 2010: Define Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Diário Oficial da União, seção 1, n. 134, p. 824.

Brasil. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. (2016). *Base nacional comum curricular*.

Brandt, S. T. J., & Montorfano, C. (2007). *O software GeoGebra como alternativa no ensino da geometria em um mini-curso para professores*. http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf

Bulegon, A. M. (2011). *Contribuições dos objetos de aprendizagem, no ensino de física, para o desenvolvimento do pensamento crítico e da aprendizagem significativa* (Tese de doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Dante, L. R. (2005). *Matemática* (Vol. único, 1ª ed.). São Paulo:Ática.

Dante, L. R. (2013). *Matemática: Contexto & aplicações* (2ª ed.). São Paulo:Ática.

Delizoicov, D., Angotti, J. A., & Pernambuco, M. M. (2011). *Ensino de ciências: Fundamentos e métodos* (4ª ed.). Cortez.

Fiolhais, C., & Trindade, J. (2003). Física no computador: O computador como uma ferramenta no ensino e na aprendizagem das ciências físicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 25*(3), 259–272.

Gomes, J., & Velho, L. (1998). *Computação gráfica* (Vol. 1). IMPA.

Gonçalves, H. S. A importância das matrizes e transformações lineares na computação gráfica. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística.

Halpern, D. F. (1999). Teaching for critical thinking: Helping college students develop the skills and dispositions of a critical thinker. *New Directions for Teaching and Learning, 80*, 69–74.

Moreira, M. A. (1999a). Aprendizagem Significativa. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Moreira, M. A. (1999b). Teorias de Aprendizagem. São Paulo: EPU.

Moreira, M. A. (2012). O que é, afinal, aprendizagem significativa? La Laguna, Espanha: Qurriculum.

Moura, I. M. de. (2014). *Contextualização de matrizes para o ensino médio* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Goiás.

Schons, D. K. (2017). *Estudo da condutividade térmica no curso normal: Uma contribuição das tecnologias de informação e comunicação e atividades experimentais* (Dissertação de mestrado profissional). Universidade Franciscana.