Modelo matemático do crescimento da *Araucaria angustifolia*: aplicação da modelagem matemática no ensino do cálculo diferencial e integral

César Augusto Machado Freitas
Marilaine de Fraga Sant'Ana

RESUMO

Este artigo apresenta o relato e as reflexões decorrentes da aplicação da Modelagem Matemática como estratégia de ensino no caso específico de estudantes da terceira fase do curso de Ciências da Computação das Faculdades Integradas Univest - FACVEST em Lages/SC, na disciplina de Cálculo. Foi desenvolvido um modelo matemático para crescimento da *Araucaria angustifolia*, usando técnicas de Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo principal do trabalho consistiu na Modelagem como fator de integração entre a Matemática do estudante universitário e a investigação de problemas regionais. Pôde-se concluir quanto à eficácia da Modelagem para este fim, bem como para a compreensão dos conteúdos específicos da disciplina.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino-aprendizagem. *Araucaria angustifolia*.

Mathematical model of the growing of Araucária angustifolia: Application of mathematical modeling to the teaching of differential and integral calculus

ABSTRACT

This article presents the reflections about the application of Mathematical Modeling as a strategy of education in the specific case of students of the third phase of Computer Sciences of the Faculdades Integradas Univest - FACVEST in Lages/SC, in disciplines of Calculus. A mathematical model for growth of the *Araucaria angustifolia* was developed using techniques of Differential and Integral Calculus. The main objective of the work consisted of the Modeling in the integration of university students Mathematics and the inquiry of regional problems. It could be concluded about the effectiveness of the Modeling for this end, as well as for the understanding of the specific contents of Calculus.

Keywords: Mathematical modelling. Teaching/Learning. *Araucaria angustifolia*.

César Augusto Machado Freitas é Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA. E-mail: cesarfreitas@sle.br
Marilaine de Fraga Sant'Ana é Doutora em Matemática (UNICAMP-2000), professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática gradativamente vem conquistando espaço no ensino de matemática no Brasil, que pode fluir em todos os níveis desde os alicerces do ensino básico, perpassando pela graduação em ciências exatas, atingindo patamares das pesquisas cientificas.

Diversos autores têm contribuído para o desenvolvimento das pesquisas em Modelagem no Brasil, como Jonei Barbosa (2001, 1999), Rodney Bassanezi (2002) e Maria Salett Biembengutt (1999) abordando diversos aspectos da mesma.

É considerável o caráter interdisciplinar que a modelagem matemática proporciona, sendo em alguns momentos também a critérios do docente com a devida formação ser multidisciplinar, ou seja, o educador pesquisador pode transcender aos modelos tradicionais de ensino no momento de ministrar suas aulas, para isso deverá ter conhecimento de outras áreas da ciência.

Acreditando no potencial da Modelagem Matemática para a integração entre a Matemática do estudante universitário e a investigação de problemas regionais, foi proposto um projeto de pesquisa para a dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação da segunda autora, que aborda um estudo sobre a *Araucaria angustifolia*, floresta predominante na região até um século atrás e agora vítima do desmatamento, como tema central para a Modelagem Matemática em um curso regular de Cálculo. A escolha do tema foi diretamente vinculada ao contexto dos alunos devido à preocupação com a destruição desta floresta na região na qual a experiência foi realizada. A intenção da atividade foi direcionada à Modelagem Matemática vista como meio de reflexão acerca da realidade.

A aplicação da modelagem matemática no ensino do Cálculo tem sido discutida por diversos autores, como Araújo e Barbosa (2005), Sant'Ana (2004), Rilho (2005), entre outros.

Em contato direto com a araucária em aula de campo, deu-se início à coleta de informações, organização das etapas a serem aplicadas no objetivo de se definir um modelo matemático para representar o crescimento da *Araucaria angustifolia*. Orientados da importância em relatar as dificuldades encontradas no desenvolvimento do trabalho, a maior dificuldade dos alunos foi o da transferência de conceitos matemáticos na fundamentação da modelagem do fenômeno proposto. A modelagem enfim foi entendida pelos alunos como a forma de representar fenômenos do mundo real por meio da matemática como também do seu caráter interdisciplinar. Outra dificuldade apresentada foi a de definir quais seriam as variáveis consideradas conforme o fenômeno e como deveriam ser relacionadas. Estas dificuldades foram superadas gradativamente com o desenvolvimento do modelo.

2 MODELOS MATEMÁTICOS

Bender (2000) define modelo matemático como uma construção matemática abstrata e simplificada relacionada a uma parte da realidade e criada para um propósito particular.

Bassanezi (2002) define modelo matemático como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado, este apresenta uma linguagem concisa na formulação do modelo, expressando as idéias de maneira clara e sem ambigüidades.

Ainda, para Bassanezi (1994, p.31), "um modelo matemático é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise".

Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos analisados e classificados conforme o tipo de matemática utilizada. Segundo Bassanezi (2002), os modelos são classificados em modelo linear ou não linear, modelo estático ou dinâmico e modelo educacional ou aplicativo, este último é o modelo que envolve um número significativo de relações de variáveis, fornecendo em geral sistemas de equações com diversos parâmetros. O modelo matemático tem a intenção de facilitar a tomada de decisões, a realização de previsões em relação ao fenômeno estudado, com a capacidade de interferir nas mudanças das mais diversas situações do mundo real.

3 MODELO MATEMÁTICO PARA DETERMINAÇÃO DA ALTURA DA *ARAUCARIA ANGUSTIFOLIA* EM FUNÇÃO DA IDADE

Neste trabalho, apresentamos o modelo matemático que representa a altura da araucária em função da idade. Este modelo desenvolvido pelos acadêmicos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, passando por etapas da modelagem de acordo com Bassanezi (2002), as quais foram: experimentação, abstração, resolução, validação, modificação e aplicação.

Para a montagem do modelo os alunos apresentaram em sala de aula uma tabela de produção ligada a Araucaria angustifolia. A tabela apresenta dados sobre a idade, número de árvores e altura média. É importante observar que esta tabela foi pesquisada pelos alunos somente após uma saída de campo, na qual estiveram em contato com a Araucaria angustifolia em seu habitat natural, ou seja, a utilização de dados já armazenados pela Embrapa foi originada da dificuldade em colher seus próprios dados.

TABELA 1 - Produção (Araucaria angustifolia).

Idade	Altura Dominante	Número árvores	Diâmetro médio	Altura média
4	5,4	990	6,6	4,7
5	6,7	990	8,7	5,8
6	7,9	990	10,5	6,9
7	9,0	990	12,1	7,8
8	10,0	989	13,4	8,7
9	10,9	988	14,6	9,4
10	11,7	986	15,6	10,1
11	12,5	984	16,5	10,8
12	13,2	979	17,3	11,4
13	13,8	974	18,0	11,9
14	14,4	966	18,6	12,4
15	15,0	957	19,2	12,9
16	15,5	946	19,8	13,3
17	16,0	934	20,3	13,7
18	16,5	920	20,7	14,1
19	17,0	905	21,1	14,4
20	17,4	889	21,5	14,7
21	17,8	871	21,9	15,0
22	18,2	853	22,2	15,3
23	18,6	834	22,6	15,6
24	18,9	815	22,9	15,8
25	19,3	795	23,1	16,1
26	19,6	775	23,4	16,3
27	19,9	755	23,7	16,5
28	20,2	734	23,9	16,7
29	20,5	714	24,1	16,9
30	20,8	694	24,4	17,2

Fonte: EMBRAPA (2001)

Dados coletados no período de 2001, inventário de uma floresta com 990 árvores de trinta anos na região de Telêmaco Borba/PR.

3.1 Da construção do modelo

Sem dúvida, pode-se constatar que a maior dificuldade dos alunos foi a do levantamento das variáveis com o fenômeno do crescimento em função da idade. Este problema foi resolvido a partir da observação detalhada dos dados da Tabela 1. Os alunos observaram a coluna das idades e o comportamento da altura média e concluíram que a relação crescimento em função do tempo fisicamente representava velocidade de crescimento e que, quanto maior o tempo (idade), menor era a velocidade de crescimento. Calcularam a velocidade de crescimento (Tabela 2), acrescentando este dado como uma nova coluna na tabela (ver Tabela 3).

$$\boxed{v = \frac{\text{altura média}}{\text{idade}}} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{dh}{dt}}$$

Taxa de variação

TABELA 2 - Velocidade de crescimento metros por ano.

Idade (anos)	Altura Média (m)	Velocidade de crescimento (m/a)
4	4,7	-
5	5,8	$v = \frac{5,8 - 4,7}{5 - 4} = 1,10 m/a$
6	6,9	$v = \frac{6,9 - 5,8}{6 - 5} = 1,10 m/a$
7	7,8	$v = \frac{7,8 - 6,9}{7 - 6} = 0,90 m/a$
8	8,7	$v = \frac{8,7 - 7,8}{8 - 7} = 0,90 m/a$
9	9,40	$v = \frac{9,40 - 8,7}{9 - 8} = 0,7 m/a$

Fonte: Tabela elaborada pelos alunos do grupo em sala de aula, utilizaram dados da Tabela 1.

Procederam desta forma sucessivamente obtendo a coluna velocidade média de crescimento em metros por ano conforme Tabela 2.

TABELA 3 - Modelagem do crescimento da altura da Araucaria angustifolia em função da idade.

Idade	Altura média	Intervalo altura	Intervalo idade acumulado	Velocidade (m/a)
4	4,70	-	-	-
5	5,80	1,10	1	1,10
6	6,90	1,10	2	1,10
7	7,80	0,90	3	0,90
8	8,70	0,90	4	0,90
9	9,40	0,70	5	0,70
10	10,10	0,70	6	0,70
11	10,80	0,70	7	0,70
12	11,40	0,60	8	0,60
13	11,90	0,50	9	0,50
14	12,40	0,50	10	0,50
15	12,90	0,50	11	0,50
16	13,30	0,40	12	0,40
17	13,70	0,40	13	0,40
18	14,10	0,40	14	0,40
19	14,40	0,30	15	0,30
20	14,70	0,30	16	0,30
21	15,00	0,30	17	0,30
22	15,30	0,30	18	0,30
23	15,60	0,30	19	0,30
24	15,80	0,20	20	0,20
25	16,10	0,30	21	0,30
26	16,30	0,20	22	0,20
27	16,50	0,20	23	0,20
28	16,70	0,20	24	0,20
29	16,90	0,20	25	0,20
30	17,20	0,20	26	0,20

Fonte: Tabela elaborada após cálculo da velocidade de crescimento médio ano a ano.

Partindo da taxa de variação $v = \frac{dh}{dt}$ e da hipótese formulada, desenvolveram seus cálculos:

$$\boxed{v = \frac{dh}{dt}} \qquad \boxed{v = \frac{K}{t}}$$

(velocidade de crescimento médio inversamente proporcional ao tempo).

$$dh = v.dt$$

$$\int dh = \int v.dt$$

$$h + c_1 = \int \frac{K}{t} dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int du = u + c \\ \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \end{array}}$$

$$h + c_1 = K \int \frac{dt}{t}$$

$$h + c_1 = K.\ln|t| + c_2$$

$$h = K.\ln|t| + c_2 - c_1$$

$$\boxed{h = K.\ln|t| + \hat{c}}$$

Condições iniciais conforme Tabela 1: modelo matemático do crescimento médio de uma amostra de 990 árvores ao longo de 30 anos.

Aleatoriamente consideram-se os seguintes valores:

$$\begin{cases} t = 5 \text{ anos} - \text{substituindo os respectivos valores na equação.} \\ h = 5{,}8 \text{ m} \end{cases}$$

$h = K.\ln|t| + \hat{c}$, obtemos:

$$5{,}8 = a.\ln|5| + \hat{c}$$

$\boxed{5{,}8 = K.1{,}609437 + \hat{c}}$ Equação 1.

$$\begin{cases} t = 20 \text{ anos} \\ h = 14{,}7 \text{ m} \end{cases}$$

$$14{,}7 = K.\ln|20| + \hat{c}$$

$\boxed{14{,}7 = K.\,2{,}9958 + \hat{c}}$ Equação 2

Assim obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} 5{,}8 = 1{,}609437K + \hat{c} \\ \underline{14{,}7 = 2{,}9958K + \hat{c}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14{,}7 = -\,2{,}9958\,K - \hat{c} \\ \underline{5{,}8 = 1{,}609437\,K + \hat{c}} \end{cases}$$

$$-\,8{,}9 = -\,1{,}386363\ K$$

$$K = \frac{8{,}9}{1{,}386363}$$

$$1{,}386363\ K = 8{,}9$$

$$\boxed{K = 6{,}42}$$

Substituindo K = 6,42 na equação 1, temos:

$$5{,}8 = 1{,}609437\,K + \hat{c}$$

$$5{,}8 = 1{,}609437\,(6{,}42) + \hat{c}$$

$$5{,}8 = 10{,}33258554 + \hat{c}$$

$$5{,}8 - 10{,}33258554 = \hat{c}$$

$$\boxed{\hat{c} = -\,4{,}5375}$$

Como $h = K.\ln|t| + \hat{c}$ logo

$$\boxed{h = 6{,}42.\ln|t| - 4{,}5375}$$

Os alunos utilizam então esta equação para expressar o modelo matemático do crescimento médio das araucárias ao longo de 30 anos.

Para a confirmação da validade do modelo matemático, os alunos testaram em dados da tabela original (Tabela 1). Por exemplo: considerando t = 28 anos conforme a Tabela 1, devemos ter h = 16,70 m.

Na equação temos:

$$h = 6{,}42.\ln|t| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42.\ln|28| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42 \text{ x } (3{,}332204) - 4{,}5375$$

$$h = 21{,}40 - 4{,}5375$$

$$\boxed{h = 16{,}8 \text{ m}}$$

O referido valor da altura "h" praticamente se iguala ao apresentado na Tabela 1.

Considerando t = 30 anos, segundo a Tabela 1, devemos ter h = 17,20 m.

Na equação temos:

$$h = 6{,}42.\ln|30| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42 \text{ x } (3{,}40119738) - 4{,}5375$$

$$h = 21{,}83568719 - 4{,}5375$$

$$\boxed{h = 17{,}2 \text{ m}}$$

O referido valor h = 17,2 m confirma o apresentado na Tabela 1, validando desta forma a equação do modelo matemático do crescimento médio.

Em um de nossos encontros apresentamos aos alunos a possibilidade de que modelos matemáticos nos permitem fazer previsões. Um dos componentes do grupo sugeriu que se realizasse a definição da altura média para os 50 anos.

$$h = 6{,}42.\ \ln\left|50\right| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42 \text{ x } (3{,}91202301) - 4{,}5375$$

$$h = 25{,}1151 - 4{,}5375$$

$$\boxed{h = 20{,}57 \text{ m}}$$

3.2 Utilização de software para o ajuste ou regressão de curvas

A regressão ou ajuste de curvas é um recurso utilizado para representar a tendência de uma variável y em função de outra variável x.

Os ajustes de curvas são diversos, os mais conhecidos são: logístico, Michaelis-Menten, exponencial geométrico ajuste linear, ajuste polinomial. Neste trabalho utilizamos para o ajuste de curvas o *software Microsoft Excel*, que deve ser aplicado com cautela pelo fato de apresentar falhas na determinação de curvas de tendência decorrentes de ajustes polinomiais.

Ainda, segundo Bassanezi (2002) uma curva de regressão é bastante útil para uma formulação simplificada dos dados ou verificação de alguma tendência entre eles. Quando analisamos alguns fenômenos ou situação através de dados numéricos estamos interessados, além da descrição e tendências locais fornecidas por uma curva de regressão em saber se a relação funcional corresponde (y = fcx) e também adequada para se fazer previsão de y quando x escapa do intervalo pesquisado.

Os alunos realizaram o ajuste de curvas com o objetivo de encontrar aquela que melhor descrevesse, que melhor se aproximasse dos dados colhidos, já se preocupando em definir o modelo matemático do crescimento em função do tempo sempre na expectativa que a mesma coincidisse com o modelo encontrado mediante método algébrico.

A Figura 1 indica o ajuste da curva do modelo obtido com a planilha Excel que apresenta um bom ajuste, ou seja, apresenta o modelo muito próximo do fenômeno estudado.

Os alunos chegaram a esta conclusão, pois a equação obtida é praticamente a mesma equação definida pelo processo algébrico apresentado anteriormente.

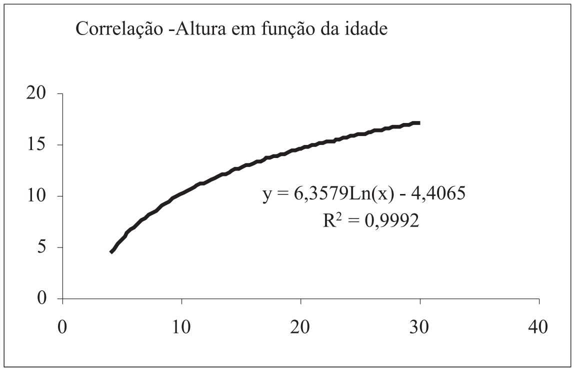

FIGURA - 1 Modelo ajustado com Excel.

O ajuste de curva realizado pelos alunos nos leva a concluir que a aplicação do software Excel e o processo algébrico se complementam e esta relação comparativa serviu de comprovação de todo o procedimento no objetivo da obtenção do modelo matemático.

Observamos que os alunos só recorreram ao ajuste de curvas fornecido pelo programa após realizarem seus próprios cálculos, como um elemento a mais para a validação de seu modelo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Modelos matemáticos, como o apresentado neste trabalho, podem ser construídos com os alunos em sala de aula, auxiliando desta forma a melhor compreensão da aplicação das técnicas de derivação e integração, assim o aluno interessado em estudar esta disciplina de forma mais objetiva se motivará em aplicar tais técnicas no estudo de problemas de seu cotidiano.

Ainda é importante destacar que a aplicação da modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem pode tornar as aulas de Cálculo Diferencial e Integral mais dinâmicas, mais interessantes, pois não nos limitaremos em somente conhecer as técnicas de derivação e integração. A modelagem matemática pode proporcionar a oportunidade de aplicar a teoria do cálculo no entendimento de questões do mundo real em sala de aula.

Podemos concluir que este trabalho atingiu os objetivos propostos, reforçando o potencial da Modelagem Matemática para a integração entre a Matemática do ambiente universitário e a investigação de problemas regionais. A escolha do tema da modelagem foi fundamental para o despertar do interesse do aluno pelo trabalho, bem como para o acesso aos dados. Os alunos demonstraram autonomia e persistência, assim como uma preocupação em proceder dentro das etapas da modelagem, com especial enfoque para a validação. Além disso, podemos concluir que os conteúdos específicos de Cálculo Diferencial e Integral utilizados no modelo foram plenamente compreendidos pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L.; BARBOSA, J. C. *Face a face com a Modelagem Matemática*: como os alunos interpretam essa atividade? Bolema, Rio Claro, n.23, p.79-95, 2005.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

______. Modeling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Mathematics*, v.14, pp.31-35, 1994.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática e os professores*: a questão da formação. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n.15, p.5-23, 2001.

______. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? *Zetetiké*, Campinas, v.7, n.11, p.67-85, 1999.

BENDER, E. A. *An introduction to mathematical modeling*. Mineola, New York: Dover, 2000.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática e implicações no ensino-aprendizagem de matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

RILHO, B. C. *Uma experiência em ensino-aprendizagem*: modelos de fundos de investimento e as derivadas. 2005, 156f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas/RS, 2005.

SANT'ANA, M. F. Trabalhando o cálculo a partir da modelagem de um experimento. *Acta Scientiae*, v.6, n.2, Canoas: 2004.

Recebido em: maio 200 **Aceito em:** jul. 2007